



НАНОСТРУКТУРЫ

математическая физика и моделирование



Nanostructures. Mathematical physics & modelling

НАНОСТРУКТУРЫ

математическая физика и моделирование

Nanostructures.
Mathematical Physics & Modelling

2018, volume 18(1)

Наноструктуры. Математическая физика и моделирование

Редколлегия:

В.А. Аветисов, И.В. Волович, В.В. Гусаров, П.Н. Дьячков, Р.Г. Ефремов, М.В. Карасев (зам. главного редактора), Ю.Е. Лозовик, М.А. Мазо, В.П. Маслов (главный редактор), А.В. Махиборода (ответственный секретарь), А.Ю. Морозов, С.А. Никитов, Г.Э. Норман, Р.А. Сурис, В.А. Тулин, В.Е. Фортов, А.С. Холево, А.Р. Хохлов, А.В. Чаплик, Л.А. Чернозатонский, К.В. Шайтан

Электронная версия журнала размещается на сайте
<http://nano-journal.ru>

Адрес редакции:

123458, Москва, ул. Таллинская, д. 34, каб. 429
+7 (495) 916-88-76
nanostructures@hse.ru

Москва

© 2018, Европейский центр по качеству

Содержание

Ю.М. Брук

Фазовые превращения в сверхплотном веществе.

Опыт моделирования белых карликов и нейтронных звёзд 5

Н.В. Селина

Квазиодномерные цилиндрические поверхностные плазмон-поляритоны 45

Актуальные публикации прошлых лет

Э. Мах

Популярные лекции по физике. Форма жидкости. О скорости света 65

Информация и правила для авторов 89

Contents

Yu.M. Bruk

**Phase Transformations in Superdense Matter:
An Experience in the Modeling of White Dwarfs and Neutron Stars**5

N. V. Selina

Quasi-one-dimensional cylindrical surface plasmon-polaritons45

Actual matter published in the last years

E. Mach

Popular Lectures on Physics. Shape of liquid. About the speed of light65

The information and rules for authors89

ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ В СВЕРХПЛОТНОМ ВЕЩЕСТВЕ. ОПЫТ МОДЕЛИРОВАНИЯ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ И НЕЙТРОННЫХ ЗВЁЗД

Ю.М. Брук

*Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН)
yubruk@gmail.com*

Поступила 12.06.2018

Темой статьи являются физические процессы и фазовые превращения в сверхплотном веществе белых карликов и нейтронных звезд. Рассказывается о возможных перестройках в веществе в интервале плотностей от 10^5 г/см³ до 10^{14} г/см³. Экстремальные условия, существующие в рассматриваемых объектах, характеризуются температурами, достигающими до 100 миллионов градусов, магнитными полями до 10^{12} Гаусс, давлениями до 10^{22} Мегабар. Такие условия невозможно создать в земных лабораториях. Для решения физических задач, связанных с поведением вещества в столь экстремальных условиях, широко используются аналогии с задачами обычной ядерной физики и физики твердого тела.

УДК 524.354; 533.9; 52+53: 523.11

DOI: 10.31145/2224-8412-2018-18-1-05-44

И я больше всего дорожу Аналогиями,
моими самыми верными учителями.
Они знают все секреты Природы,
и ими меньше всего следует пренебрегать.
Иоганн Кеплер

Давайте играть в шарики.

Предположим, что мы можем построить набор гравитирующих шариков из одинаковых атомов, но разной массы. Конструируя эти шары, будем «закладывать» в центр шарика «прибор», который будет информировать нас о

давлении и физическом состоянии вещества. Наша задача сейчас в том, чтобы предсказать, какова будет эта информация. Мы будем считать пока, что наши «эксперименты» происходят при достаточно низкой температуре, а все перестройки обусловлены только изменением давления. Давление p_c в центре гравитирующего шара может зависеть только от «глобальных» характеристик этого шара – его массы M и радиуса R . Сам шар существует благодаря гравитационному взаимодействию, поэтому в формулу для p_c должна войти и характеристика этого взаимодействия – гравитационная постоянная γ . Из соображений размерности единственно возможной оказывается формула

$$p_c \sim \gamma (M^2/R^4).$$

Легко понять, что такова же по порядку величины и плотность гравитационной энергии w . В самом деле, гравитационная энергия шара $\sim \gamma (M^2/R)$, объем его $\sim R^3$, следовательно $p_c \sim w$. Это очень важный для нас результат. Он показывает, что о перестройках в веществе можно говорить на энергетическом языке.

В только что приведенном рассуждении плотность энергии оказалась порядка характерного давления. Из этого вовсе не следует, конечно, что давление равно плотности энергии – это существенно разные величины. Тем не менее, и в других физических ситуациях при оценках подобное равенство по порядку величины имеет место. Мы убедимся в этом на других примерах и будем это использовать в дальнейшем.

Глядя на формулу для p_c , очень естественно задать такой вопрос: а надо ли иметь шары разной массы, чтобы создавать разные давления p_c ? Нельзя ли взять один-единственный шар и, не меняя M , изменять его R ? Тогда ведь будет соответственно изменяться и p_c , и мы сможем моделировать вещество с разной плотностью (и давлением) в центре одного-единственного шара. Оказывается, что это не так. В общем случае существует связь между M и R – это не независимые параметры. В частности, для металлической планеты, построенной из одинаковых атомов, и для белых карликов, внутреннее давление в которых создается нерелятивистскими электронами, связь M и R имеет вид $MR^3 = \text{const}$. Поэтому, интересуясь разными перестройками в веществе, мы должны будем выбирать из построенного нами набора шар соответствующей массы. Хотя наша основная цель – изучение вещества при плотностях $\rho \geq 10^5$ г/см³, мы начнем с шаров меньшей массы, плотность в центре которых примерно такая же, как у обычных «земных» материалов.

Характерные параметры «земных» веществ и фазовый переход диэлектрик—металл.

Предположим, что «устройство» одного из наших шаров таково же, как и кристалла поваренной соли $NaCl$, с тем только отличием, что наш шар по-

строен из атомов с примерно одинаковой массой. Последнее условие нам нужно только для упрощения рассуждений и, как будет ясно из дальнейшего, не является принципиальным. Пусть a – расстояние между атомами (постоянная кристаллической решетки), а ионы в соседних узлах решетки имеют заряды $\pm e$. Если плотность кристалла ρ , а масса атома (или атомного ядра, массой электронов можно для наших оценок пренебречь) – $m_{\text{я}}$, то в 1 см^3 кристалла содержится $n_{\text{я}} = \frac{\rho}{m_{\text{я}}} = \frac{1}{a^3}$ атомов. Средняя энергия кулоновского взаимодействия пары ионов по порядку величины равна e^2/a , а электростатическая энергия, заключенная в 1 см^3 , очевидно, $\sim n_{\text{я}} \frac{e^2}{a} \sim \frac{e^2}{a^4}$.

Если взять для $n_{\text{я}}$ типичное значение $\sim 10^{23}$ атомов/ см^3 , то плотность электростатической энергии окажется по порядку величины такой же, как и модуль Юнга кристалла. (Напомним, что размерности давления и плотности энергии совпадают.)

Обычно понятие о модуле Юнга вводится в механике деформируемого тела и соответствует некоторому давлению. Но сама эта величина вовсе не зависит, конечно, от того, деформируется ли кристалл. Можно сказать, что мы имеем здесь еще одно подтверждение сформулированного раньше утверждения о том, что плотность энергии и характерное давление – величины одного порядка. Этот вывод не зависит от того, ионный ли кристалл мы взяли за основу наших рассуждений или какой-то другой. Единственное, что нам придется изменить в сказанном выше, если кристалл будет не ионным, – это способ вычисления модуля Юнга (или характерной энергии). Порядки величин при этом остаются без изменений.

Типичные значения модуля Юнга «земных веществ» не превосходят величины ~ 1 Мбар. Заметим здесь же, что давления в центральных областях большинства планет (исключая планеты-гиганты) не больше десятков Мбар, а в Юпитере p_c достигает значения ~ 100 Мбар.

Примерно в том же диапазоне давлений (от нескольких сотен килобар до одного-двух Мегабар) происходит фазовый переход диэлектрик—металл.

В отличие от диэлектрика в металле есть свободные (или коллективизированные) электроны. Эта группа электронов, не связанных со своими атомами, ответственна за процессы электро- и теплопроводности, дает свой существенный вклад в теплоемкость и магнитную восприимчивость металла.

Если бы мы поставили задачу создать из атомов металлический образец, мы могли бы рассуждать так. Возьмем нейтральные атомы, построим из них некоторую кристаллическую решетку и будем сжимать эту решетку равномерно со всех сторон. Рассуждая об условиях в центре наших гравитирующих шаров, мы должны будем выбирать, соответственно, шары все большей и большей массы.

Внешние электроны каждого атома находятся в среднем на определенных расстояниях от соответствующих ядер. В элементарной квантовой тео-

рии (модели атома Бора) эти расстояния называют радиусами внешних орбит. Грубо говоря, когда расстояния между атомами становятся порядка этих радиусов, электроны отрываются от своих атомов и начинают путешествие по всему кристаллу. Отсюда ясно, что сжатие любого диэлектрика обязательно приводит рано или поздно к образованию металла.

Можно рассуждать и на «энергетическом» языке. Энергия электрона на внешней орбите по порядку величины равна $m_e v_e^2$. Множитель 1/2 в кинетической энергии при оценках порядка величины мы опускаем, кроме того, мы учитываем, что для атомных электронов кинетическая, потенциальная и полная энергии – величины одного порядка (этот факт легко проверяется, если использовать, например, водородоподобную модель атома). Скорость электрона v_e можно оценить из соотношения неопределенностей

$$v_e \sim \frac{\hbar}{m_e a_0}.$$

Здесь a_0 – размер атома (радиус внешней орбиты). Предположим, что первоначально от каждого атома отрывается по одному электрону, тогда число электронов в 1 см^3 $n_e = n_a$. Величина $m_e v_e^2 n_e \sim \left(\frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}\right) n_e$ и есть та энергия, которую нужно «накачать» в 1 см^3 , чтобы ионизовать атомы и создать металл. Учтем еще, что $a_0 \sim 10^{-8} \text{ см}$, а $n_e \sim n_a \sim 10^{23} \text{ частиц/см}^3$, и убедимся теперь, что плотность энергии электронного газа в обычном металле $\sim 10^{12} \text{ эрг/см}^3$. Заметьте, что порядок плотности энергии в ионном кристалле примерно таков же. «Накачка» в кристалл энергии $\sim 10^{12} \text{ эрг/см}^3$ как раз соответствует сжатию, при котором атомы сближаются на расстояния порядка их размеров. Можно сказать, что и для металлов модуль Юнга можно оценивать по плотности энергии. Роль характерной энергии играет теперь энергия электронного газа.

Если взять гравитирующий шар с радиусом и массой примерно такими же, как у Земли, то можно проверить, что условия в центре шара не очень далеки от тех, которые характерны и для ионного кристалла, и для металла. Стоит подчеркнуть, конечно, что не нужно слишком уж буквально применять к Земле рассуждения, приведенные выше. Напомним еще раз, что мы обсуждаем случай шаров, построенных из одинаковых атомов, а Земля к таковым не принадлежит. Внутри Земли вещество находится, вероятно, и в расплавленном состоянии. Существуют два способа превратить кристалл в жидкость – нагреть его или подвергнуть слишком большим деформациям. Температурные эффекты мы пока не учитываем вовсе, считая наши гравитирующие шары холодными. Рисуя «кристаллическую карикатуру» Земли, мы допускаем, что гравитация еще не столь сильна, чтобы сломать кристалл в центре шара. Для реальных планет все сложнее, но замечательно, что шары

с параметрами планет Солнечной системы можно было бы, в принципе, построить из кристаллов рассмотренных нами типов (ионных или металлических). Сделать соответствующие простые оценки читатель легко сможет сам.

Давление электронного газа.

По существу мы уже оценили порядок этого давления выше. Давление электронного газа есть основа того, что противодействует сжатию кристаллической решетки. Важно подчеркнуть, что при не слишком высоких температурах скорости, давление и энергия электронов от температуры не зависят. Они определяются квантовым характером электронного газа. Оценку для скорости v_e мы уже писали: $v_e \sim (\hbar/m_e a)$. Если среднее расстояние между электронами $\sim a$, а их концентрация, т. е. число электронов в 1 см^3 , n_e , то $n_e a^3 \sim 1$. Легко проверить, что при $a \gg 10^{-11} \text{ см}$ $v_e \ll c$, c здесь скорость света. Поэтому допустимо пользоваться для оценок классическими (нерелятивистскими) формулами. Формулу для энергии электрона можно переписать так:

$$\frac{m_e v_e^2}{2} \sim \frac{\hbar^2}{2m_e a^2} \sim \frac{\hbar^2}{2m_e} n_e^{2/3}$$

Опуская, как и раньше, множитель $1/2$ и умножая энергию электрона на n_e , получим характерное значение плотности электронной энергии $\frac{\hbar^2}{m_e} \cdot n_e^{5/3}$. Таково же по порядку величины и давление электронного газа. И именно эту величину нужно сравнивать теперь с гравитационным давлением. Увеличение последнего ведет к сближению частиц. Перекрытие внутренних электронных орбит означает отрыв внутренних электронов, т. е. дальнейшую ионизацию атомов. Соответственно увеличиваются при этом v_e , n_e , давление и плотность энергии электронов. Напишем здесь для полноты еще условие независимости наших оценок от температуры. Это условие называется критерием вырождения (а электронный газ, соответственно, вырожденным газом) и записывается в виде неравенства $kT \ll \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{2/3}$. Здесь справа стоит энергия электрона. При обычных для металлов плотностях это неравенство выполнено вплоть до температур порядка десятка тысяч градусов. Другими словами, металлы раньше испарятся, чем нарушится критерий вырождения. Устойчивое существование металлического гравитирующего шара определяется равенством электронного и гравитационного давлений. Множество шаров этого типа очень велико, в него входят шары с параметрами планет и более массивные, которые планетами уже не назовешь. Такие шары со звездными массами (например, порядка массы нашего Солнца $\sim 10^{33} \text{ г}$) называются белыми карликами. К обсуждению их свойств и процессов внутри них мы сейчас и перейдем.

Можно ли построить два белых карлика с одинаковыми массами, но разными радиусами?

Мы уже отмечали выше, что $MR^3 = const$. Попробуем разобраться теперь, что за константа стоит в правой части этого равенства и как такое соотношение получается. Предположим, что масса гравитирующего шара и соответствующее давление p_c таковы, что атомы внутри шара уже целиком ободраны, т. е. все электроны уже покинули свои орбиты. Будем пока предполагать, что электроны нерелятивистские, для этого средние расстояния между ними должны быть больше $\sim 10^{-11}$ см.

Качественно разумной является такая схема. Пусть звезда построена у нас из одинаковых атомов с массовым числом A и зарядом ядра Z . Число электронов (в расчете на один атом) тоже равно Z , и все они свободные. Если масса нуклона равна m_p (мы считаем, что массы протонов и нейтронов равны), то масса ядра $m_{\text{я}} \approx Am_p$. Число ядер в звезде, очевидно, $\sim (M/m_{\text{я}})$, а полное число электронов в Z раз больше. Поделив число электронов на объем звезды $\sim R^3$ (численные коэффициенты мы опять опускаем), получим характерное значение для концентрации электронов

$$n_e \sim \frac{M}{m_{\text{я}}} Z \frac{1}{R^3} = \left(\frac{M}{m_p}\right) \left(\frac{Z}{A}\right) \frac{1}{R^3}.$$

Теперь мы можем оценить и давление в центральной части такого белого карлика

$$p_e \sim \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{5/3} \sim \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{5/3} \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} \frac{1}{R^5}.$$

Давление p_e уравнивает гравитационное давление $p_c \sim \gamma (M^2/R^4)$. Из равенства $p_e \sim p_c$ и получается интересующее нас соотношение

$$M^{1/3} R \sim \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\hbar^2}{m_e} \cdot \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} \cdot \frac{1}{m_p^{5/3}}.$$

Отсюда видно, что имеется довольно жесткая связь трех параметров: M , R и (Z/A) . Белые карлики с одинаковыми массами и разными радиусами можно строить только из разных атомов. Если же фиксировать отношение (Z/A) , то тем самым фиксируется и произведение MR^3 . Легко понять, что этот же вывод остается справедливым и для металлической планеты, построенной из одинаковых атомов. В последней формуле в этом случае нужно заменить Z на Z' – число действительно «отодранных» от атома электронов.

Написанные в этом разделе формулы позволяют выразить массу и радиус белого карлика также через параметры n_e и (Z/A) . Другими словами, задав электронную концентрацию и химический состав – сорт атомов, из которых мы строим звезды, мы можем вычислить их массы и радиусы. Любителям геометрических построений в пространстве будет интересно, быть может, построить «универсальные» поверхности

$$M = f_1 \left(R, \frac{Z}{A} \right); R = f_2 \left(n_e, \frac{Z}{A} \right); M = f_3 \left(n_e, \frac{Z}{A} \right).$$

Читатель легко получит явные выражения функций f_2 и f_3 и может заняться вычислениями масс и радиусов белых карликов. Надо только помнить, что эти функции описывают белые карлики, давление в которых создается нерелятивистскими электронами. Кроме того, следует учитывать, что мы описали предельную ситуацию, когда атомы в белых карликах полностью ионизованы. Существует, конечно, набор гравитирующих шаров, в которых атомы ионизованы лишь частично. Как и для металлической планеты, в этом случае должно быть вместо Z введено эффективное число Z' .

Белый карлик с ультрарелятивистскими электронами

Рассмотрим теперь гравитирующий шар, в котором средние расстояния между электронами стали порядка 10^{-11} см. Из соотношения неопределенностей мгновенно следует, что $v_e \sim c$. Чтобы определить электронное давление, мы воспользуемся методом размерностей, предположив, что $p_e \sim \hbar^\alpha c^\beta n_e^\gamma$, α , β и γ – некоторые числа. Выписывая размерности правой и левой частей этого равенства и сравнивая их, мы найдем, что $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 4/3$. Итак, $p_e \sim \hbar c n_e^{4/3}$. Такова же по порядку величины и плотность энергии электронного газа. Критерий вырождения запишется теперь в виде $kT \ll m_e c^2$. При рассматриваемых плотностях $m_e c^2 \sim \hbar c n_e^{1/3}$. Если подставить численные значения m_e , c и k в написанное неравенство, то окажется, что $T \ll 10^{10}$ К.

Расчеты звездной эволюции говорят о том, что реальные температуры внутри белых карликов меньше 10^{10} К, а электронный газ в них всегда вырожден.

Внимательный читатель уже заметил, конечно, что наши рассуждения несколько не корректны. Пока речь шла о нерелятивистских электронах и средних расстояниях между ними, больших 10^{-10} см, мы «забывали» о том, что в квантовой механике электрон описывается волновой функцией. Теперь, когда речь зашла о расстояниях между частицами порядка 10^{-11} см, нам придется все-таки вспомнить об этом. Чтобы говорить точнее, надо приписать электрону характерную длину волны. Такая длина волны сейчас оказывается порядка комптоновской длины для электрона $\lambda_0 = (\hbar / m_e c)$, которая

приблизительно равна $3,9 \cdot 10^{-11}$ см. Сжимая электронную систему, мы попали в область, где объем, приходящийся на один электрон, стал порядка λ_0^3 . Характерная плотность энергии может быть записана теперь и так:

$$\frac{m_e c^2}{\lambda_0^3} \sim \frac{m_e^4 c^5}{\hbar^3} \sim \hbar c n_e^{4/3}.$$

Очевидно также, что

$$n_e \sim (1/\lambda_0^3) = \frac{m_e^3 c^3}{\hbar^3}.$$

Число атомных ядер $n_{\text{я}}$ в Z раз меньше числа электронов. Вычислим теперь плотность вещества в центре гравитирующего шара с ультрарелятивистскими электронами. Эта плотность равна просто произведению $n_{\text{я}}$ на $m_{\text{я}}$. Подставляя численные значения параметров, мы получим $\sim 10^9$ г/см³ – число по земным масштабам фантастическое.

Какова же связь между отношением (Z/A) и параметрами карлика с релятивистскими электронами? Предположим пока, что число электронов в системе не меняется (как мы увидим дальше, часть электронов в столь экстремальных условиях будет поглощаться атомными ядрами). Если предположение об отсутствии перестроек в системе «ядра + электроны» выполнено, то, как и раньше, $n_e = Zn_{\text{я}} \sim Z \frac{M}{m_{\text{я}}} \cdot \frac{1}{R^3}$. Приравниваем $\hbar c n_e^{4/3}$ и $\gamma (M^2/R^4)$ и учитываем, что $m_{\text{я}} = Am_p$. В результате этой простой операции получится соотношение

$$\frac{Z}{A} \sim \left(\frac{m_p}{M}\right) \left(\frac{\gamma M^2}{\hbar c}\right)^{3/4} \sim \left(\frac{\gamma m_p^2}{\hbar c}\right)^{3/4} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{1/2}.$$

Обратите внимание на то, что в отличие от случая нерелятивистских электронов, радиус R сократился при приравнивании гравитационного и электронного давлений. Задавая отношение (Z/A) , мы можем оценить массу звезды M . Конечно, формулы этого типа применять к реальным звездам нужно очень осторожно. Нельзя забывать об основных предположениях, которые мы сделали выше. Кроме того, мы неявно предположили, что гравитирующие шары такого типа действительно существуют. Мы не будем обсуждать сейчас вопрос об устойчивости звезд с релятивистским электронным газом, хотя этот вопрос и является очень важным и нетривиальным.

Но если, при всех наших предположениях, мы сможем установить (по порядку величины) значение M , то можем ли мы оценить порядок радиуса

R ? Оказывается, и это возможно. Грубую оценку можно сделать так. Запишем еще раз равенство гравитационного и электронного давлений в таком виде:

$$\gamma (M^2 R^4) \sim (m_e^4 c^5 / \hbar^3) .$$

Справа здесь стоит давление электронного газа для вполне конкретного случая, когда $n_e \lambda_0^3 = 1$. Отсюда по известной массе можно оценить и радиус. Удобно переписать эту оценку так:

$$R \sim \frac{\hbar}{m_e c} \left(\frac{\gamma m_p^2}{\hbar c} \right)^{1/4} (M/m_p)^{1/2} .$$

Типичные значения для $M \sim 10^{33}$ г, вычисления дают $R \sim 10^8$ см = 10^3 км. Подчеркнем еще, что выписанная нами связь R с M не является сейчас «универсальным» соотношением. По существу эта формула годится только для той конкретной звезды, в которой средние расстояния между электронами $\approx \lambda_0$. Экстраполяция же на звезды с другими значениями M и R здесь была бы просто незаконна.

Поучительно сравнить это с тем, что мы говорили раньше об «универсальных» соотношениях для звезд с нерелятивистскими электронами. «Универсальность» тех формул была связана с тем, что мы не фиксировали раньше жестко величину n_e , как сделали это только что.

Но... проследите еще раз за выводом связи между M и (Z/A) в этом разделе. Здесь также еще не фиксируется n_e , а получилось, что M однозначно определяется отношением (Z/A) . Другими словами, задав сорт атомов и потребовав, чтобы выполнялось условие

$$p_c \sim p_e \sim \hbar c n_e^{4/3} ,$$

мы приходим к тому, что такая звезда имеет вполне определенную массу. В этом существенное отличие звезд с релятивистскими электронами от звезд с электронами нерелятивистскими. В последнем случае задание сорта атомов и закона $p_e \sim (\hbar^2/m_e) \cdot n_e^{5/3}$ не приводило к такой однозначности – могли существовать звезды с разными M , лишь бы $MR^3 = const$.

И еще раз вернемся к началу этого раздела. Мы получили выражение для плотности электронной энергии (или давления), используя соображения размерности. Давайте сделаем это еще раз, но по-другому. Общая формула, связывающая энергию E и импульс q частицы в теории относительности, записывается так: $E^2 = q^2 c^2 + m^2 c^4$. Применяя эту формулу к электрону и учи-

тывая соотношение неопределенностей $q_e \sim \hbar n_e^{1/3}$, мы должны, в принципе, различать два случая. Первый случай, когда $q_e \sim m_e c$. При этом энергия электрона $\sim m_e c^2 \sim q_e c \sim \hbar c n_e^{1/3}$. Такая ситуация реализуется в белых карликах и обсуждалась выше. Другая возможность заключалась бы в том, что $q_e \gg m_e c$, и в этом случае энергию электрона нельзя было бы уже оценивать как $m_e c^2$, она была бы $\sim q_e c \sim \hbar c n_e^{1/3}$. Именно такой случай называется, строго говоря, ультрарелятивистским. Плотность энергии определяется, как обычно, умножением энергии $q_e c$ на n_e .

Мы применяли термин «ультрарелятивистские электроны» для случая $q_e \sim m_e c$, потому что с самого начала использовали формулу для давления ультрарелятивистского электронного газа $p_e \sim \hbar c n_e^{4/3}$. Это не приводит, конечно, ни к каким недоразумениям при наших оценках. Отметим еще, что случай $q_e \gg m_e c$ в реально существующих устойчивых белых карликах не реализуется.

Заканчивая этот раздел, сделаем еще совсем маленькое замечание. Релятивистские эффекты в белых карликах начинают сказываться уже при плотностях, примерно на три порядка меньших, чем 10^9 г/см³. Такую численную оценку мы получили, изучая предельно релятивистскую ситуацию. Фактически электроны становятся релятивистскими уже при меньших плотностях. И это вовсе не говорит о том, что наши численные оценки в каком-то смысле плохи. Изменение плотности (или объема, приходящегося на одну частицу) на три порядка означает изменение линейных размеров – расстояний между частицами – всего на порядок. С той точностью, с которой мы все время рассуждаем, о лучшем согласии оценок с действительностью трудно и мечтать.

Захват электронов ядрами

Представим себе, что электроны стали при сжатии звезды релятивистскими. Попытки сильнее сжать звезду приводят к появлению, а потом и интенсификации принципиально нового процесса, связанного с «забытыми» нами пока атомными ядрами. С энергетической точки зрения такой процесс оказывается в целом довольно выгодным.

А происходит вот что. Электроны «бомбардируют» ядра, и часть их поглощается. Внутри ядер электроны вступают в реакцию с протонами. В результате «протон + электрон» превращаются в «нейтрон + нейтрино». Нейтрино обладает очень большой проникающей способностью – оно беспрепятственно покидает ядро и звезду. В атомном же ядре теперь изменилось соотношение чисел протонов и нейтронов. Таких реакций может в каждом ядре произойти и несколько. Чем больше протонов превратится в нейтроны, тем меньше будет заряд ядра Z и тем меньше останется электронов снаружи от ядер. Общее число нуклонов в ядре – массовое число A – при такой

перестройке в системе, конечно, не меняется. Процесс этот называется часто нейтронизацией или обратным бета-процессом. Обсудим его немного подробнее.

Поскольку теперь в нашу игру вступили атомные ядра, нам придется сказать о них несколько слов. Нуклоны, находящиеся в ядре, взаимодействуют друг с другом, но не разлетаются – они находятся в связанном состоянии. Это значит, что нужно было бы затратить определенную энергию, если бы мы захотели это ядро разрушить. Энергией связи ядра и называется та самая энергия, которая нужна, чтобы отделить частицы друг от друга.

В наших предыдущих рассуждениях мы считали, что массы протонов и нейтронов примерно равны: $m_p \approx m_n$. При определении энергии связи ядер прежней точности недостаточно, теперь нужно учитывать, что это величины отличающиеся. Известно, что и масса атомного ядра $m_{\text{я}}$ не равна в точности сумме масс составляющих его нуклонов. Выражение для энергии связи ядра с массовым числом A и зарядом Z очень простое:

$$E_{\text{св}}(A, Z) = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}(A, Z)]c^2.$$

Нейтронизацию обычно описывают, пользуясь языком химических реакций. Условие химического равновесия выглядит для этой реакции так:

$$E_{\text{св}}(A, Z) = E_{\text{св}}(A, Z - 1) + E_{\text{в}}(n_e)$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства называется химическим потенциалом электронного газа и равно максимально возможному, значению электронной энергии, т. е. имеет порядок $\hbar c n_e^{1/3}$. Разность $\Delta_1 = E_{\text{св}}(A, Z) - E_{\text{св}}(A, Z - 1)$ можно назвать порогом реакции, физический смысл ее ясен из определения энергии связи. Если реакция идет, то это означает, что Δ_1 по порядку величины примерно совпадает с энергией электрона. Таким образом можно определить значение электронной энергии и электронной плотности, при которых ядра с (A, Z) перестроятся в ядра с $(A, Z - 1)$. Следующий этап перестройки начнется, когда в системе останутся только ядра с $(A, Z - 1)$ и электроны, число которых теперь уже меньше первоначального. Если еще чуть-чуть «поджать» систему, то станет возможной реакция $(A, Z - 1) + e \rightarrow (A, Z - 2)$. Можно снова вычислить $\Delta_2 = E_{\text{св}}(A, Z - 1) - E_{\text{св}}(A, Z - 2)$ и значение n_e , при котором пойдет такая реакция. Она, конечно, опять будет проходить при некоторой фиксированной электронной плотности. Ясно, что возможны и следующие ступеньки нейтронизации. Конечным результатом, как мы уже говорили выше, будет относительное переобогащение ядер нейтронами и уменьшение числа протонов и электронов. Уменьшение же концентрации электронов приводит к ограничениям роста их импульсов и энергий.

Плазменные колебания и ядерные кристаллы!

Один из самых обычных и привычных для нас фазовых переходов – это кристаллизация. Никого не удивляет, что зимой на реке образуется лед. Замерзают порой даже моря.

Но разве не удивительно, что кристаллизация может произойти и в плазменном море, образуемом электронами и атомными ядрами внутри белых карликов? Более того, этот процесс может быть и не связанным с охлаждением системы. К вопросу об охлаждении мы вернемся позже, а в этом разделе постараемся понять, что же за кристаллы можно построить в сильно сжатых звездах.

В ранних теориях белых карликов принималось, что вещество при плотностях, характерных для их внутренностей, представляет собой жидкую смесь (раствор) ядер (или еще не целиком ионизованных атомов) и электронов. Такая плазменная система по существу мало чем отличается от электронно-ионной плазмы, изучаемой в лабораторных условиях. Ядра, как и частицы в обычной жидкости, могут двигаться совершенно хаотически и без особых усилий перемещаться на довольно значительные расстояния!

Идеи о построении и устойчивости решеток из атомных ядер, погруженных в электронное море, начали разрабатываться около пятидесяти лет назад. В первой же работе, посвященной этим вопросам и опубликованной советским физиком Д.А. Киржницем, были проанализированы возможности создания кристаллов из ядер и важные следствия существования кристаллических структур для эволюции звезд. Характеристики кристаллических решеток в сильно сжатом веществе изучались также и другим советским теоретиком – А.А. Абрикосовым. Аналогичные результатам Д.А. Киржница выводы о возможности существования кристаллов в белых карликах были получены американским физиком Е. Солпитером.

Опубликование этих работ послужило толчком к довольно радикальному пересмотру представлений о термодинамическом состоянии внутренних областей белых карликов. Некоторые из этих представлений мы и обсудим, не слишком претендуя, конечно, на количественную точность. Разумно напомнить сначала о том, что такое плазменная частота. Электронейтральная в целом плазма состоит, как мы знаем, из положительных и отрицательных зарядов. Рассмотрим элемент объема, занятого плазмой, который ограничен двумя параллельными плоскими площадками.

Пусть площадь каждой площадки S , а расстояние между ними z . Заряды частиц будем считать равными $\pm e$, а их концентрацию равной n . Предположим, что мы смогли разделить заряды в этом объемчике и поместить все положительные заряды на одну площадку, а все отрицательные – на другую. По существу мы создали заряженный плоский конденсатор. Очевидно, что заряд пластин равен $neSz$, а емкость конденсатора $C = (S/4\pi z)$. Поделив за-

ряд на емкость, мы найдем разность потенциалов между пластинами $4\pi ne z^2$, которая, в свою очередь, равна произведению напряженности электрического поля E на z . Отсюда $E = 4\pi nez$.

В реальной плазме никаких площадок-пластин, конечно, не существует, но ясно, что взаимное смещение зарядов разных знаков приводит к появлению сил, стремящихся это смещение ликвидировать. Сила, действующая на одну частицу с массой m , равна $eE = 4\pi ne^2 z$, а соответствующее ускорение есть $\frac{4\pi ne^2}{m} z$. Обратите внимание на то, что сила и ускорение частиц пропорциональны их смещению, а направлены они так, чтобы восстановить равновесие. Поэтому это типичная задача о колебаниях, и мы можем сразу же сказать, какова должна быть частота этих колебаний ω_0 . Очевидно, что $\omega_0^2 = \frac{4\pi ne^2}{m}$. Колебания с частотой ω_0 называют электростатическими, ленгмюровскими или просто плазменными. Мы могли бы получить связь ω_0 с n , e и m и из соображений размерности, но, конечно, без численного коэффициента.

Вернемся теперь к электронно-ядерной плазме. Здесь также должны быть колебания, обусловленные взаимными смещениями зарядов. Но этот случай отличается от рассмотренного простейшего тем, что заряд и масса ядра не равны заряду и массе электрона.

Предположим, что атомные ядра действительно образуют некоторую кристаллическую решетку, т. е. «привязаны» к определенным местам в пространстве. Окружающие их электроны «вольны», конечно, «гулять» по всему этому кристаллу, но в среднем около каждого ядра находится Z электронов (при полной ионизации они все свободные). Разрушение решетки было бы, очевидно, возможно, если бы ядра могли сильно смещаться из своих положений равновесия. Но малые колебания ядер могут к разрушению решетки и не приводить. В обычных твердых телах колебания кристаллической решетки имеют в основном температурное происхождение. Для ядерного кристалла, напротив, очень важную роль должно играть кулоновское взаимодействие. Колебания плазменного типа должны быть эффективными даже при очень низких температурах.

Наша цель сейчас в том, чтобы оценить частоту и энергию таких колебаний и сравнить ее с потенциальной энергией ядра. Если энергия колебаний значительно меньше глубины потенциальной ямы ядра, то это будет означать, что ядро привязано к своему узлу в кристаллической решетке. Такая задача и рассматривалась впервые в упоминавшейся выше работе Д.А. Киржница.

Удобно разделить всю нашу систему на условные ячейки, имеющие сферическую форму, и такие, что в каждой из них находится одно ядро и Z электронов. В целом каждая такая ячейка электронейтральна. Радиус ячейки r определим из естественного условия: $\frac{4}{3}\pi r^3 n_{\text{я}} = 1$. Здесь $n_{\text{я}}$ — концентрация ядер в нашей звезде:

$$n_{\text{я}} \sim \frac{M}{m_{\text{я}} R^3}.$$

Так как число электронов $Z \gg 1$, можно считать, что электронное облако «равномерно размазано» по ячейке. Колебания же ядра относительно этого «равномерно размазанного» отрицательного заряда происходят, очевидно, с плазменной частотой

$$\Omega_0^2 \sim \frac{n_{\text{я}}(Ze)^2}{m_{\text{я}}} \sim \frac{Z^2 e^2}{m_{\text{я}} r^3}$$

Здесь-то нам и оказалась полезной аналогия с плазменным «конденсатором». Оценка потенциальной энергии (глубины ямы) также пишется просто: $U_0 \sim (Z^2 e^2 / r)$ и вряд ли требует пояснений. Оставшаяся нам процедура совершенно элементарна. Характерная энергия колебаний ядра есть $\hbar\Omega_0$, поделив ее на U_0 мы получим

$$\frac{\hbar\Omega_0}{U_0} \sim \left(\frac{\hbar^2}{Z^2 e^2 r m_{\text{я}}} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/2}$$

где $r_0 = \frac{\hbar^2}{m_{\text{я}} Z^2 e^2}$ – параметр, характеризующий ядро с заданными A и Z . Типичное значение отношения (r_0 / r) для белых карликов равно по порядку величины $\sim 10^{-5}$. Это число получается, если считать плотность вещества в звезде $\sim 10^6$ г/см³, а $Z \sim 10$. Тем самым мы убедились в том, что кулоновская ядерная решетка является устойчивой, во всяком случае если не учитывать температурные эффекты. А значит, вещество холодных белых карликов должно быть кристаллическим! Вопрос о влиянии температуры и некоторые другие вопросы, связанные с существованием решетки, мы обсудим дальше.

Нулевые колебания и разрушение решетки в ионных кристаллах

Те колебания в решетке, образованной атомными ядрами, о которых шла речь выше, носят название нулевых колебаний. Термин «нулевые» подчеркивает то обстоятельство, что они существуют независимо от температуры. Колебания ядер обусловлены кулоновскими силами и существовали бы и при температуре, равной нулю. В этом нет ничего удивительного. Вспомните, например, что и скорости электронов в атоме тоже не зависят от температуры, и это нас не удивляет.

Возникает естественный вопрос: только ли для ядерных решеток существуют пулевые колебания? Оказывается не только. Они есть, конечно, и в обычных земных кристаллических решетках.

Имея в виду воспользоваться в дальнейшем естественными аналогиями, мы вернемся сейчас к обсуждавшейся нами раньше ионной кристаллической решетке. Колебания ионов в этой решетке при достаточно низких температурах есть, очевидно, обычный звук. Скорость звука s в твердом теле всегда можно оценить, зная плотность ρ и модуль Юнга E . По порядку величины $s^2 \sim (E/\rho)$. Вспомним, что модуль Юнга $E \sim n_{\text{я}} (e^2/a)$, а $\rho \approx n_{\text{я}} m_{\text{я}}$. Поэтому и скорость звука в ионной решетке можно выразить через массу ядер и расстояние между ними: $s^2 \sim (e^2/m_{\text{я}} a)$. В твердом теле могут распространяться звуковые волны разных частот. Но все они, как оказывается, должны быть меньше некоторой характерной для каждого конкретного вещества частоты Ω . Причина этого в том, что в кристалле не могут распространяться волны, длина которых меньше характерного размера – постоянной решетки a . Существование минимальной длины звуковой волны и означает одновременно существование максимальной частоты $\Omega \sim (s/a)$. Эта частота называется дебаевской частотой. Ее тоже легко выразить через микроскопические параметры: $\Omega^2 \sim (e^2/m_{\text{я}} a^3)$.

Обратите теперь внимание на то, что эта формула очень похожа на выражение для квадрата плазменной частоты в рассматривавшейся в предыдущем разделе ядерной решетке. Отсюда, кстати, вытекает и очень простая оценка для скорости звука в решетке, построенной из атомных ядер: $s^2 \sim \Omega_0^2 r^2 \sim (Z^2 e^2/m_{\text{я}} r)$. Вполне естественно называть дебаевской частотой и Ω_0 .

Для ионного кристалла существуют, таким образом, тоже два характерных энергетических параметра. Один из них – $\hbar\Omega$, другой – энергия взаимодействия ионов $\sim (e^2/a)$. Отношение этих параметров можно легко вычислить, и оказывается, что это малое число. Ионный кристалл, как мы сейчас убедились, очень похож на ядерную решетку.

Стоит упомянуть здесь еще о том, что существуют объекты, энергия нулевых колебаний в которых не мала по сравнению с характерным взаимодействием. Именно из-за этого не затвердевает при понижении температуры при атмосферном давлении жидкий гелий.

Если мы «включим» теперь температуру, то к нулевым колебаниям добавятся колебания, обусловленные тепловым движением ионов. Появится еще один параметр с размерностью энергии – kT . Вопрос об устойчивости кристаллических решеток будет теперь решаться сравнением kT , $\hbar\Omega$ и (e^2/a) для ионного кристалла и kT , $\hbar\Omega$ и U_0 – для ядерного. Но, прежде чем перечислить разные возможности, мы должны сказать еще несколько слов о температуре плавления $T_{\text{пл}}$.

Начнем опять с ионного кристалла. Нагрев его достаточно сильно, мы его, конечно, расплавим. Значит ли это, что характерная энергия плавления (в расчете на одну частицу) – $kT_{пл}$ должна быть порядка (e^2/a) ? Оказывается нет, она должна быть примерно на два порядка меньше. Плавление представляет собой разрушение кристаллической решетки. Но разрушить решетку можно и механическим путем: приложив к кристаллическому образцу достаточно большое напряжение.

Пусть напряжение, при котором ломается кристалл, равно G . Мы хорошо знаем, что эта величина всегда меньше модуля Юнга E . По порядку величины можно, очевидно, написать такую оценку для температуры плавления: $kT_{пл} \sim Ga^3$ (G , как и E , имеет размерность плотности энергии).

В кристалле из атомных ядер характерная энергия $kT_{пл}$ также меньше, чем U_0 . Многочисленные расчеты показывают, что отношение $(kT_{пл}/U_0) \sim 10^{-2}$, как и в обычных кристаллах.

Кристаллизация в белом карлике

Теория эволюции звезд предсказывает, что в начальный период своей жизни белый карлик не такой уж холодный. Даже если ядерные реакции внутри звезды, из которой карлик образовался, уже закончились, его внутренняя температура может быть порядка 10^7 К. Все, что мы говорили, когда обсуждали вопрос о давлении электронного газа, остается, однако, и теперь справедливым. Причина этого в том, что и при «включении» температуры электроны остаются вырожденными, их энергия реально всегда оказывается много большей, чем kT . Что касается существования ядерной кристаллической решетки, то мы рассмотрим теперь несколько возможностей. Из существования трех энергетических параметров – kT , $\hbar\Omega_0$ и U_0 следует, что мы можем образовать два независимых безразмерных отношения: $\Gamma = (U_0/kT)$ и $(\hbar\Omega_0/kT)$. Частоту Ω_0 мы называли раньше дебаевской частотой, можно ввести еще соответствующую ей дебаевскую температуру Θ , определив ее равенством $\hbar\Omega_0 \sim k\Theta$. Введем еще обозначение $\Gamma_{пл} = (U_0/kT_{пл})$.

После всех этих подготовительных мероприятий мы приступим к простому качественному анализу разных случаев.

Если звезда достаточно «горячая», ее температура T может быть больше и $T_{пл}$ и Θ , при этом $\Gamma < \Gamma_{пл}$. Никакой кристаллической решетки в этом случае не существует. Ядра «растворены» в электронном море и такую кулоновскую систему можно называть жидким раствором.

Понижение температуры при остывании звезды приводит к тому, что неравенство $\Gamma < \Gamma_{пл}$ сменяется сначала равенством $\Gamma < \Gamma_{пл}$, а затем противоположным неравенством. При этом $T < T_{пл}$, и ядра образуют кристаллическую решетку. Относительная величина температуры T и дебаевской температу-

ры Θ для факта существования решетки не существенна. Что касается характера колебания атомных ядер, то при $T > \Theta$ они являются в основном тепловыми, а при $T < \Theta$ – более существенны колебания нулевые. Последний случай $\Theta > T > T_{пл}$. Очевидно, что при этом $\Gamma < \Gamma_{пл}$. Если это так, то нулевые колебания ядер велики и кристаллизация невозможна.

Как и в обычных кристаллах, процесс образования ядерной решетки сопровождается выделением тепла. Можно очень грубо оценить суммарную энергию, которая выделится при кристаллизации, если первоначально звезда была относительно горячей и жидкой, а в конце концов «вся» закристаллизовалась. Мы отвлекаемся сейчас от того, что в звезде плотность меняется вдоль радиуса.

Предположим снова, что электроны в звезде релятивистские, а их характерное давление $\sim \hbar c n_e^{4/3}$. По порядку величины это давление совпадает с гравитационным $\gamma(M^2/R^4)$, если звезда устойчива. Сравнение плотности электронной энергии и плотности ядерной кулоновской энергии ($Z^2 e^2/r^4$) показывает, что их отношение порядка $\frac{\hbar c}{e^2} Z^{-2/3}$. Теплота плавления $\sim kT_{пл}$ на одно ядро, но в $1 \text{ см}^3 \sim n_{\text{я}}$ ядер, поэтому энергия, выделяющаяся при кристаллизации всей звезды, по порядку величины есть

$$kT_{пл} n_{\text{я}} R^3 \sim \frac{kT_{пл}}{r^3} R^3 \sim \Gamma_{пл}^{-1} \frac{Z^2 e^2}{r^4} R^3,$$

Полную гравитационную энергию звезды нетрудно выразить через те же параметры, что и энергию кристаллизации. Очевидно, что

$$\gamma \frac{M^2}{R} \sim \hbar c n_e^{4/3} R^3 \sim \frac{\hbar c}{e^2} Z^{-2/3} \frac{Z^2 e^2}{r^4} R^3.$$

Отношение энергии кристаллизации к гравитационной энергии равно

$$\Gamma_{пл}^{-1} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) Z^{2/3}.$$

Гравитационная энергия звезды должна, конечно, быть больше энергии, выделяющейся при кристаллизации. Из этого требования вытекает естественное неравенство $\Gamma_{пл} > \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) Z^{2/3}$. Численные расчеты для реальных ситуаций приводят, как уже упоминалось, к $\Gamma_{пл} \sim 10^2$. Из этих оценок следует, что максимальная энергия, которая могла бы выделиться при кристаллизации «всей» звезды, может достигать значений $\sim 10^{-4}$ от энергии гравитационной! На самом деле кристаллизация происходит, вероятно, лишь в некоторой «центральной» части белого карлика, и нашу оценку нужно еще несколько уменьшить. Но с другой стороны сильно уменьшиться она не должна, так

как основная масса звезды сосредоточена как раз в той области, где происходит кристаллизация.

Совершенно аналогичное рассуждение можно проделать и в том случае, если электроны в звезде нерелятивистские. Отношение плотности электронной энергии $\sim \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{5/3}$ к плотности ядерной кулоновской энергии равно теперь

$$\left(\frac{a_0}{a}\right)^{1/3} Z^{-2/3}.$$

Здесь $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$ – боровский радиус, a – среднее расстояние между электронами, $a < a_0$. Предположим, что и в этом случае закристаллизовалась «вся» звезда. Поделив тогда максимально возможную энергию кристаллизации на гравитационную энергию, мы получим величину $\sim \Gamma_{\text{пл}}^{-1} (a/a_0)^{1/3} Z^{2/3}$, Разумные численные значения этого отношения могут достигать $\sim 10^{-2}$. Это в общем несколько больше, чем в звезде с релятивистскими электронами. Заметил еще, что в этом случае

$$\Gamma_{\text{пл}} > \left(\frac{a}{a_0}\right)^{1/3} Z^{2/3}.$$

Энергия, выделяющаяся при кристаллизации белого карлика, перерабатывается в конечном счете в излучение. Но это, разумеется, не единственный внутренний источник энергии звезды. Другим важным источником является запас тепловой энергии. Этой энергией звезда обладает независимо от того, жидкая она или кристаллическая. Атомные ядра в жидкой звезде можно считать в отличие от электронов невырожденным газом. Это означает, что их кинетическая энергия определяется как раз температурой. В расчете на одно ядро эта тепловая энергия составляет $3/2 kT$. Поэтому при $T \sim T_{\text{пл}}$ тепловая энергия и энергия кристаллизации ($\sim kT_{\text{пл}}$ на ядро) вполне сравнимы.

Приглашение на экскурсию по радиальному «каналу»

Изучение перестроек и физических процессов в белых карликах имеет большой самостоятельный интерес хотя бы уже просто потому, что в окрестности нашего Солнца с радиусом около сотни парсек (1 парсек = $3 \cdot 10^{18}$ см) карликов известно сейчас несколько тысяч.

Теория эволюции звезд предсказывает, что многие звезды становятся белыми карликами в «конце» своего жизненного пути.

Другим громадным гравитирующим шарам «судьбой предопределено» стать на последних этапах своей эволюции нейтронными звездами. Своеобразна «ирония судьбы»: звезды типа нашего Солнца превращаются в шары

относительно небольших размеров. Типичные значения радиусов нейтронных звезд всего порядка десятков километров. Напомним для сравнения, что радиус нашего Солнца примерно $7 \cdot 10^5$ км. Но зато средняя плотность вещества в нейтронных звездах достигает и даже превосходит ($10^{14} \div 10^{15}$) г/см³! Это по крайней мере на пять порядков больше, чем максимальные плотности в белых карликах. Примерно таково же значение плотности и внутри атомных ядер.

Интересно, конечно, понять как устроена нейтронная звезда и какие физические процессы могут происходить в макроскопических сгустках ядерной материи.

Мы сейчас уже в какой-то степени подготовились к тому, чтобы попробовать «выполнить» некоторый «эксперимент». Мы попытаемся мысленно «просверлить канал» вдоль радиуса нейтронной звезды и будем изучать свойства вещества, двигаясь от поверхности к центру этого сверхплотного гравитирующего шара.

То, что мы узнали уже о белых карликах, нам очень поможет. Вещество во внешних областях нейтронной звезды находится примерно в таких же условиях, какие существуют и в белых карликах. Несколько глубже мы попадем в область плотностей и давлений, которые в белых карликах никогда не достигаются. Основной компонентой вещества в центральной части нейтронной звезды (самой значительной и по объему, и по массе!) является вырожденная нейтронная жидкость. Это и определяет название звезды.

Наша подготовка к «путешествию» в глубины нейтронной звезды была бы, однако, неполной, если бы мы хотя бы очень кратко не перечислили некоторые, теперь уже исторические, факты.

Совсем недавно – не только по астрономическим, но и по земным масштабам времени – были открыты первые пульсары. Так были названы источники строго периодического радиоизлучения с характерными частотами следования импульсов от нескольких герц до $\sim 10^2$ с⁻². Честь этого открытия принадлежит группе английских радиоастрономов из Кембриджа, руководителем которой является А. Хьюиш. Самый первый открытый пульсар наблюдался этой группой летом 1967 г. Через десять лет после этого открытия число изученных пульсаров превысило уже полторы сотни. Но намного раньше – фактически почти сразу после открытия Хьюиша – стало понятно, что периодическое импульсное излучение приходит к нам от вращающихся и намагниченных нейтронных звезд.

То, что такое понимание пришло очень быстро, было по существу подготовлено работами, выполненными задолго до открытия пульсаров. На возможность самого существования нейтронных звезд первыми обратили внимание известные астрономы В. Бааде и Ф. Цвикки еще в 1934 г. Через четыре года после этого предсказания Дж. Р. Оппенгеймером и Г. Волко-

вым было рассчитано равновесное состояние нейтронной звезды. Упомянем еще, что очень важные работы, посвященные массивным гравитирующим шарам, были выполнены советскими теоретиками Я- И. Френкелем, Л. Д. Ландау и М. П. Бронштейном в конце 20-х – в 30-х гг. прошлого века.

После открытия пульсаров поток работ, посвященных физике этих объектов и механизмам их излучения, стал поистине астрономическим. Отождествление пульсаров и нейтронных звезд стало возможным еще, конечно, и потому, что физические процессы в сверхплотном веществе оказались связанными с характеристиками излучения. По особенностям принимаемого памп излучения в радио-, оптическом и гамма-диапазонах можно пытаться понять, что же на самом деле происходит в интересующих нас объектах.

Область плотностей меньших $4,3 \cdot 10^{11}$ г/см³

До сих пор мы обсуждали свойства вещества при разных плотностях, выбирая из построенного нами набора гравитирующих шаров тот, плотность в центральной части которого как раз такая, которая нас интересует. Шары же мы пытались строить из одинаковых атомов с фиксированными значениями A и Z . Мы не рассматривали вопрос о том, каким образом приходит звезда в такое состояние в процессе своей эволюции.

Такой подход оказался, как теперь понятно, довольно ограниченным хотя бы уже потому, что по мере сжатия вещества не сохраняется Z . Процесс нейтронизации неизбежно ведет, как мы убедились, к изменению относительного числа протонов и нейтронов в атомных ядрах. Но теперь, отправляясь в путешествие по «радиальному каналу», естественно задать и другой вопрос: а сохраняется ли при сжатии массовое число A ? Этот вопрос очень серьезен, ибо из теории эволюции звезд нам хорошо известно, что в звездах, еще не ставших белыми карликами или нейтронными звездами, а находящихся где-то на пути к этим состояниям, происходят ядерные реакции и одни ядра превращаются в другие.

Освобождающаяся ядерная энергия вполне компенсирует при этом «затраты» звезды на излучение. А последовательный ядерный синтез, начавшись со стадий водородных и гелиевых реакций, может доходить до ядер элементов, расположенных вблизи железа в периодической системе Менделеева. Эта область называется железным максимумом, название связано с существованием максимума на кривой распространенностей элементов, соответствующего Fe и Ni. Ядра железа и никеля при обычных условиях наиболее устойчивы – их энергии связи $E_{CB}(A, Z)$ тоже максимальны! Поэтому, если звезда «шла длинным путем» к стадии белого карлика или нейтронной звезды, и ядра железного максимума образовались, они должны, казалось бы, выжить и после прекращения ядерных реакций. Это справедливо для

тех областей карликов и пульсаров, где плотность еще недостаточно велика, чтобы ядра начали захватывать электроны.

Будем рассматривать теперь более глубокие слои наших звезд, где уже возможны процессы нейтронизации.

Задачу о равновесных состояниях системы «ядра + электроны» нужно решать, отыскивая минимум полной энергии системы. Полная энергия состоит из нескольких слагаемых. Во-первых, в нее входит энергия самих ядер, включая энергию покоя нуклонов (так называются величины $m_p c^2$ и $m_n c^2$) и энергию кулоновского взаимодействия протонов в ядрах. Во-вторых, полная энергия электронного газа. В-третьих, кулоновская энергия ядерной кристаллической решетки. Если же вещество в соответствующем слое звезды не кристаллическое, а жидкое, то вместо энергии решетки войдет кулоновская энергия взаимодействия ядер друг с другом. Энергию кулоновского взаимодействия ядер с электронами можно включить в полную энергию электронов. Для нас очень важно, что параметрами, от которых зависит полная энергия системы, в частности, являются A , Z и $n_{\text{я}}$. Первые два из этих параметров входят в выражение для энергии связи ядра. Концентрация ядер $n_{\text{я}}$ характеризует плотность вещества, а концентрация электронов выражается, очевидно, через $n_{\text{я}}$ и Z .

Сразу понятно, что любая попытка варьировать Z , оставив неизменными все другие параметры, приведет скорее всего к выводу системы из состояния с минимальной энергией, если она в этом состоянии находилась. Система тут же «захочет» что-то так изменить, чтобы ее энергия снова стала минимальной (хотя и не обязательно, конечно, совпадающей с исходным минимумом). Задача минимизации энергии не проста, но она решена.

Основной результат решения таков. Предположим, что мы фиксируем давление, т. е. «останавливаемся» в достаточно тонком (по радиальной координате) шаровом слое звезды. Мы обнаружим в этом слое вполне определенные ядра, имеющие параметры Z и A . В более глубоком шаровом слое мы обнаружим ядра с $Z' \neq Z$, $A' > A$. Существенно, что отношение (Z/A) монотонно уменьшается с ростом плотности.

Очень аккуратные численные расчеты в этой области были проделаны, в частности, американскими физиками Г. Беймом, К. Петиком и П. Сюзерлэндом. Они показали, что ядра ^{56}Fe находятся в равновесии с электронным газом при плотностях, меньших $8,1 \cdot 10^6$ г/см³, ядра ^{62}Ni стабильны до плотностей $2,7 \cdot 10^6$ г/см³, ^{64}Ni – до $1,2 \cdot 10^9$ г/см³. При больших плотностях возникают ядра с массовыми числами $A \sim 80$. А в диапазоне плотностей $(1,9 \div 4,3) \cdot 10^{11}$ г/см³ должны существовать уже ядра с $A \sim 120$. Назовем эти ядра (в порядке возрастания предельной плотности, при которой они еще существуют): ^{124}Mo , ^{122}Zr , ^{120}Sr , ^{118}Kr .

Из сказанного следует сделать еще два вывода. Первый – в равновесных белых карликах с плотностью в центральных областях $\sim 10^9$ г/см³ тоже существуют элементы железного максимума, несмотря на то, что нейтронизация в них реальна. Второй вывод мы сделаем, еще раз обратив внимание читателя на написанную последовательность ядер с $A \sim 120$. Заметьте, что с ростом плотности A уже монотонно уменьшается. При $\rho \rightarrow 4,3 \cdot 10^{11}$ г/см³ более выгодными оказываются ядра, «потерявшие» нуклоны!

Обсудим здесь же вопрос о возможностях ядерных реакций в белых карликах и соответствующих им по плотности слоях нейтронных звезд. Рождение этих звезд вовсе не является равновесным процессом. И в том шаровом слое, где в равновесии должны быть ядра с конкретными A и Z , непосредственно после рождения могут оказаться ядра самые разные. Для иллюстрации рассмотрим такую чисто условную ситуацию.

Пусть белый карлик образуется при сжатии потерявшей устойчивость, но еще очень горячей звезды, в которой только что закончился термоядерный синтез и образовались элементы железного максимума. Сжатие сопровождается некоторым дополнительным разогревом. Если выделение тепла превосходит потери на излучение (хотя бы в течение малого времени), то часть ядер железа может расщепиться на более легкие, даже до ядер гелия и нейтронов. Поэтому в молодых белых карликах (и соответствующих слоях нейтронных звезд) образуется смесь легких и тяжелых ядер. Ядра захватывают нейтроны, возникающие при рождении сверхплотной звезды. Захват нейтронов сопровождается процессами β -распада. Это – основной механизм образования ядер с массовыми числами, большими, чем у ядер железа и никеля. Если же звезда теряет устойчивость еще до того, как кончится цепочка термоядерных реакций, то ядер железного максимума в ней может и не быть. Как бы то ни было, для нас важно лишь одно – родившийся карлик может быть неравновесным по своему химическому составу. Время перехода к равновесному состоянию определяется скоростями соответствующих ядерных реакций.

До тех пор, пока карлик молодой и горячий ($T \geq 10^8$ К), ядерных кристаллических структур внутри него нет, и идут обычные термоядерные реакции. Пусть через какое-то время температура понизилась и образовалась кристаллическая решетка. Если к этому времени еще не все ядра успели перестроиться, то «стремление» звезды к равновесию обуславливает ее «желание» продолжить перестройки. Но для этого должны происходить столкновения ядер, а решетка этому мешает. Оказывается, однако, что существует принципиальная возможность ядерных реакций и в холодной звезде. Каждое ядро в решетке находится в потенциальной яме. Есть, однако, ненулевая, а при соответствующих параметрах даже и не очень малая вероятность того, что ядро протунеллирует в соседний узел решетки и взаимодействует с

«сидящим там» соседом. Этот чисто квантовый эффект приводит к тому же эффективному результату (ядерной реакции), что и другой – классический эффект. Мы имеем в виду диффузию ядер в решетке, механизм которой в сущности таков же, как и в обычных металлах.

Возможность диффузионных перескоков ядер обсуждал в уже цитированной работе Д. А. Киржниц. Он же показал, что скорость ядерных реакций в кристаллических белых карликах действительно сильно уменьшается по сравнению со случаем, когда вместо кристалла есть электронно-ядерная жидкая плазма. Вопросу о туннельных перескоках и ядерных реакциях в холодной плазме посвящено много работ. Первые из них выполнены В. Уайлдхэком, Я. Б. Зельдовичем, А. Камероном и Е. Солпитером.

Само собой разумеется, что во внешних кристаллических слоях нейтронных звезд могут проходить такие же процессы, как и в белых карликах. Не только любопытным, но и приводящим ко многим принципиальным выводам, является и сам факт существования твердой коры у звезд. У нас еще будет повод к этому вернуться.

Подкорковое вещество

Предположим сначала, что тенденция к уменьшению в равновесных состояниях числа нуклонов в атомных ядрах, которая при увеличении плотности обнаружилась при $A \sim 120$, сохраняется и в еще более глубоких слоях – под корой нейтронной звезды.

Можно проделать еще один мысленный эксперимент, помещая в подкорковую область ядра с $A > 120$. Это означало бы создание неравновесной для этих слоев звезды ситуации. Переход же к равновесию означал бы частичное разрушение ядер – они начали бы терять нейтроны.

Реально такой эксперимент со звездой проделать, конечно, нельзя, но ясно, что в области плотностей выше $4,3 \cdot 10^{11}$ г/см³ мы вправе ожидать существования, кроме ядер и электронов, еще и нейтронного газа. Решение задачи об отыскании минимума полной энергии системы приведет нас к нахождению относительных равновесных концентраций этих компонент.

Вполне разумно здесь и использование капельной модели атомного ядра. Для совсем грубых оценок можно считать, что поверхностная энергия примерно того же порядка, что и энергия связи ядра. Уменьшение последней при пересыщении ядра нейтронами ведет к уменьшению «коэффициента поверхностного натяжения», а значит естественным становится и испарение частиц из ядер. Напомним, кстати, что идея испарения частиц из ядер была высказана еще в 1936 г. Я. И. Френкелем.

В области плотностей, где существуют только электроны и ядра, определяющий вклад в давление вносят, как мы знаем, электроны. С ростом плотности, однако, растет и равновесная концентрация нейтронов. Нетрудно

убедиться в том, что ядра всегда дают в давление малый вклад. Вклад же нейтронов в давление постепенно увеличивается, сравнивается с электронным, а затем становится основным.

Мы можем проделать очень простые вычисления. Предположим, что ядра не образуют кристаллической решетки, и у нас есть жидкая плазма – смесь электронов, ядер и нейтронов. Электроны являются, конечно, в этой области плотностей ультрарелятивистскими. Формулу для их давления мы знаем: $p_e = \hbar c n_e^{4/3}$. Ядра образуют невырожденный газ частиц. Они имеют большую массу ($m_j \gg m_n \gg m_e$), а скорость их движения определяется просто температурой: $m_j v_j^2 \sim kT$. Соответствующая плотность тепловой энергии ядер $\sim m_j v_j^2 n_j$. Ядерный вклад в давление, грубо говоря, такого же порядка. При всех сколько-нибудь разумных для звезд температурах $m_j v_j^2 n_j \ll \hbar c n_e^{4/3}$.

Что касается нейтронного вклада в давление, то можно рассуждать так. Оценим сначала скорости нейтронов внутри атомных ядер. Воспользуемся для этого опять соотношением неопределенностей. Импульс нуклона в ядре $\sim \frac{\hbar}{a_j}$. Здесь a_j – характерный размер (радиус) ядра, определяемый ядерными силами. Силы эти действуют только на малых расстояниях. Численное же значение $a_j \sim 10^{-13}$ см. Легко видеть, что $\frac{\hbar}{a_j} < m_n c$, поэтому для описания нуклонов при ядерных плотностях можно в первом приближении пользоваться нерелятивистскими формулами. Из соотношения $m_n v_n \sim \frac{\hbar}{a_j}$ мы найдем, что скорость нуклона в ядре по порядку величины равна $5 \cdot 10^9$ см/с. В нейтронном газе, окружающем ядро, средние расстояния между нейтронами, конечно, больше, чем 10^{-13} см. Это значит, что импульсы и скорости нейтронов здесь меньше, чем при ядерных плотностях. Очевидно, что для нейтронного газа мы можем записать: $m_n v_n \sim \frac{\hbar}{a_n}$, понимая под a_n средние расстояния между нейтронами. В нейтронном газе при интересующих нас сейчас плотностях тоже, разумеется, нет нужды пользоваться релятивистскими формулами. Поэтому кинетические энергии нейтронов $\sim m_n v_n^2$. Нейтронный вклад в давление должен быть порядка $m_n v_n^2 n_n$, буквой n_n мы обозначили концентрацию нейтронов $n_n \sim \frac{1}{a_n^3}$. Нейтронный газ, как и электронный, можно считать вырожденным. Условием этого служит неравенство $m_n v_n^2 \gg kT$, которое всегда выполняется при существующих в звездах температурах и в интересующем нас сейчас диапазоне плотностей.

Формулу для нейтронного давления p_n можно переписать, используя связь v_n с концентрацией n_n : $p_n \sim \frac{\hbar}{a_n} n_n^{5/3}$. Естественно, что она имеет точно такой же вид, как и формула для давления нерелятивистского электронного газа.

Численные расчеты показывают, что нейтронный вклад в полное давление $p \approx p_e + p_n$ при плотности $1,5 \cdot 10^{12}$ г/см³ составляет уже около 20%, а при плотности, немногим большей 10^{13} г/см³, уже $p_n > p_e$.

Если мы будем рассматривать еще более глубокие слои звезды, то обнаружим, что ядра теряют все больше нейтронов, становятся очень неустойчивыми, и в конце концов разваливаются. Происходит этот развал ядер при $\rho \sim 10^{14}$ г/см³. Средние расстояния между нуклонами и их скорости приближаются теперь к соответствующим значениям в атомных ядрах. Фактически развал ядер и происходит как раз тогда, когда средние расстояния между ними становятся порядка их размеров (последние лишь в несколько раз могут превышать расстояния между нуклонами внутри ядер).

Теперь надо сказать о том, что свойства вещества в подкорковой области звезды физики умеют рассчитывать пока с гораздо меньшей точностью, чем свойства коры при $\rho < 4,3 \cdot 10^{11}$ г/см³. Нельзя считать обоснованным и то предположение, которое мы сделали в начале этого раздела. Мы считали, что максимальное значение массового числа A равновесных ядер ~ 120 . Существует не менее десятка очень серьезных работ, в которых предсказывается существование в подкорке звезды ядер-гигантов. Грубых оценок здесь уже явно недостаточно. Качественная картина, которую мы выше описали, существенно не меняется. А вот гарантировать, что максимальные значения параметра $A \sim 120$, увы, никак нельзя. В некоторых расчетах это значение вырастает до $A \sim 600$ и даже ~ 1000 . Заряды Z этих громадных ядер соответственно ~ 90 или ~ 120 .

Сама возможность существования ядер с массовыми числами порядка нескольких сотен не противоречит, конечно, тому, что вокруг них есть нейтронное море. Это можно понять, опять обратившись к аналогии с жидкими каплями. Представим себе, что в некотором слое звезды равновесными являются ядра со сравнительно большими A . Если бы мы поместили в этот слой ядра относительно легкие, то при переходе к равновесной ситуации они должны были бы слиться, «сбросив», быть может, лишние нейтроны.

Картина эта очень напоминает слияние нескольких дождевых капель в одну большую. Это может, как и нейтронный захват, оказаться энергетически выгодным, но вовсе не исключает испарения частиц из ядер. Зависимость массового числа A от плотности оказывается не строго монотонной. Образование ядер – гигантов связано с кинетическими явлениями захвата нейтронов ядрами при рождении звезды, сочетающимися с процессами β -распада. Природа сама проделывает эксперимент «по слиянию капель».

Возможно, конечно, что этот процесс не успел пройти в «момент рождения» и завершился (или продолжается) уже тогда, когда звезда «покинула колыбель». В конечном счете при увеличении плотности ядра с очень большими A все равно окажутся неустойчивыми. Но мы не можем точно

сказать, при каком значении ρ это произойдет. Не исключено поэтому, что и при $\rho = 10^{14}$ г/см³ в веществе, состоящем из нейтронов, протонов и электронов останется еще относительно небольшое число больших и не очень устойчивых атомных ядер.

Если бы, двигаясь внутрь нейтронной звезды по «радиальному каналу», мы измеряли пройденное нами расстояние, то оказалось бы, что до центра звезды еще относительно далеко. Для звезд с радиусом ~ 10 — 15 км кора и рассмотренный сейчас подкорковый слой имеют вместе толщину всего около 1 км!

Несколько замечаний о структуре нейтронных звезд

Вблизи того значения плотности, при котором происходит окончательный развал атомных ядер, в системе еще есть электроны. Сохраняются они и после того, как ядра развалились.

Соображения электронейтральности системы в целом требуют, чтобы число электронов равнялось числу протонов: $n_e = n_p$. Концентрация нейтронов n_n во всяком случае больше n_p . Основная масса вещества звезды заключена именно в той центральной области, до которой мы теперь, наконец, добрались. Для звезд не слишком больших масс плотность может в совсем близких к центру областях вырасти еще в несколько раз по сравнению с плотностью, при которой развалились ядра.

Более массивные звезды могут, вероятно, иметь центральные плотности $\sim 10^{15}$ г/см³. Свойства вещества при таких плотностях очень сложны и еще, во многом – непонятны. Мы ограничимся в этой статье рассказом лишь о некоторых физических явлениях и возможных процессах в той области плотностей, в которой сосуществуют нейтроны, протоны и электроны. При этом мы не будем касаться очень интересного и важного вопроса о перестройке в ядерной системе, называемой пионной конденсацией. На возможность такого фазового перехода в обычных атомных ядрах и нейтронных звездах впервые обратил внимание академик А. Б. Мигдал. Связанные с этим вопросы активно изучались. О некоторых результатах этих работ можно прочитать в книге А. Б. Мигдала.

Шаровую область, где плотность выше $\sim 10^{14}$ г/см³ и где в равновесном случае уже не существует атомных ядер, можно называть сердцевиной звезды. Смысл терминов «кора» и «подкорка» ясен из предыдущего изложения. Само собой разумеется, что все эти термины весьма условны, никаких очень резких границ между корой, подкоркой и сердцевиной в реальной звезде нет. Кроме того, в звезде могут, в принципе, сохраняться следы ее неравновесного происхождения; например, в разных слоях могут быть неравновесные атомные ядра и т. п. Интересно отметить, что плотность очень быстро меняется вдоль радиуса звезды, пока мы «движемся» через кору и подкорку.

Обычно считается, что на поверхности звезды вещество имеет плотность $\sim 10^6$ г/см³, а на глубине ~ 1 км она возрастает на восемь (!) порядков. Но, когда вещество сжато уже почти до ядерной плотности, радиальная скорость изменения ρ (градиент плотности) резко уменьшается. Это связано с тем, что уравнение состояния ядерного (или нуклонного) вещества (связь давления и плотности) существенно отличается от уравнения состояния вещества при меньших плотностях. Уже интуитивно ясно, что ядерное вещество довольно трудно сжимать.

Знание истинного уравнения состояния $p = p(\rho)$ позволило бы очень точно рассчитывать структуру нейтронных звезд. К сожалению, здесь еще много нерешенных вопросов и пока нам приходится ограничиваться не слишком точными модельными уравнениями состояния. Но все же в каком-то смысле и здесь нет худа без добра. Моделей сейчас рассчитано очень много. Благодаря этому довольно хорошо понято, к каким последствиям приводит пренебрежение теми или иными явлениями. И, во всяком случае, мы можем сейчас уже вполне определенно считать, что физика процессов в области плотностей вблизи $\sim 10^{14}$ г/см³ понята в основных чертах сравнительно неплохо. Именно эта область нас и будет интересовать дальше. Те идеи и результаты, о которых мы расскажем, могут иметь отношение и к достаточно массивным нейтронным звездам. Область плотностей $\sim 10^{14}$ г/см³ является в них довольно большим шаровым слоем (с радиальной толщиной порядка нескольких километров). Самые центральные области таких звезд – их ядра – мы не рассматриваем. Скажем только, что «химический» состав этих ядер очень сложен. В них должны присутствовать», по-видимому, различные гипероны, барионные резонансы и мезоны. Об уравнении состояния в этой области пока мало что можно сказать. Ясно лишь, что здесь не обойтись без последовательной релятивистской модели, основанной на несуществующей пока теории сильных взаимодействий.

Принцип Паули и уровень Ферми

Оценивая импульс электрона или нуклона из соотношения неопределенностей $q \sim \hbar/a$ мы не должны забывать, что a имеет смысл среднего расстояния между частицами. Поэтому и импульс q тоже является средней характеристикой.

При более полном описании мы должны были бы учесть возможность существования частиц с отличающимися импульсами. В квантовой механике состояния частицы можно классифицировать по их импульсам и проекциям момента количества движения на некоторую ось. Момент количества движения измеряется в единицах \hbar . У электрона, протона и нейтрона существует собственный механический момент – спин. Проекция спина этих частиц на выделенное в пространстве направление может принимать только

два значения: $\pm\hbar/2$. Поэтому нуклоны и электроны называют частицами с полуцелым спином. Такие частицы называются также фермиевскими, и для них должен выполняться принцип Паули. Этот принцип требует, чтобы в каждом квантовом состоянии было не больше одной частицы. Это значит, что в состоянии с определенным значением импульса не может быть более двух частиц (проекция спина одной из них $\pm\hbar/2$, другой – $\hbar/2$). Очевидно, что знание импульса частицы позволяет нам определять и ее энергию. Если в состоянии с определенным импульсом уже есть два электрона, протона или нейтрона, то мы говорим, что соответствующий энергетический уровень занят. Разумеется, точность определения каждой компоненты импульса, например Δq_x , связана с неопределенностью соответствующей координаты: $\Delta q_x \sim (\hbar/\Delta x)$. Чем больше Δx , тем точнее определяется q_x . Основным состоянием системы называется состояние с минимальной энергией. Понятно теперь, что в соответствии с принципом Паули система частиц находится в основном состоянии, если заняты все энергетические уровни от нулевого до некоторого максимального. Последний называется фермиевским уровнем (или энергией Ферми) и определяется полным числом частиц в системе. Максимальное значение импульса – фермиевский импульс – тоже определяется полным числом частиц, а по порядку величины он совпадает со средним импульсом $q \sim (\hbar/a)$.

Можно теперь сказать, что и средняя кинетическая энергия частицы порядка энергии Ферми. Условие вырождения означает малость kT по сравнению с энергией Ферми. Для дальнейшего нам важно подчеркнуть, что если все уровни энергии ниже фермиевского заполнены, то частицу с энергией, меньшей фермиевской, добавить в эту систему мы не сможем.

Бета-стабильность, плазменные колебания и предельные концентрации заряженных частиц в электрон-протонной плазме

Нейтрон в обычных условиях является нестабильной частицей. Характерное время жизни изолированного нейтрона $\sim 10^3$ с. Распад его происходит по схеме $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$, где $\bar{\nu}$ – антинейтрино. Но теперь мы можем понять, почему этот факт не противоречит обсуждавшейся нами схеме нейтронизации вещества.

Если бы нейтроны, в избытке присутствующие в ядрах после захвата электронов и реакции $p + e \rightarrow n + \nu$, пожелали распасться, то снова возникли бы электроны. Однако их энергии были бы теперь, как нетрудно понять, меньше, чем у тех, которые ядра захватили. Это ясно уже из того, что ν и $\bar{\nu}$, уходя из ядра и из звезды, тоже уносят энергию. Но электроны с относительно малыми энергиями имеют и соответственно малые импульсы. Поэтому длина волны их оказывается больше размеров ядра. А это означает,

что родившийся электрон должен «выскочить» из ядра – «вернуться в свой коллектив». Но этот коллектив его как раз и не примет в силу того, что сказано в конце предыдущего раздела. Поэтому пересыщенные нейтронами ядра оказываются β -стабильными, если они погружены в электронное море при соответствующих плотностях.

Если ядро с избытком нейтронов по каким-то причинам окажется в области, где электронная плотность меньше той, которая обеспечивает его стабильность, может произойти β -распад. Условие этого прежнее: энергия вылетающего электрона должна быть не меньше фермиевской энергии электронного газа, окружающего теперь ядро.

Перейдем теперь к рассмотрению тех областей, где ядра уже не существуют. Обсудим вопрос: может ли существовать «чисто нейтронная» звезда без примеси протонов и электронов? Если допустить, что мы такую звезду «построили», то мы сразу же «увидим», что нейтроны будут распадаться на протоны, электроны и антинейтрино. Этот процесс будет проходить до тех пор, пока фермиевская энергия родившегося электронного моря не станет больше энергий электронов, образующихся при распаде. Ситуация вполне аналогична обсуждавшейся выше.

Таким образом мы убеждаемся в том, что примесь электронов и протонов необходима. Кроме того, нам понятно теперь, что вопрос о стабильности или нестабильности атомных ядер относительно β -распада в сверхплотном веществе связан с тем, какова концентрация n_e . «Желание» ядра перестраиваться не есть ею «личное дело». Решая задачу о равновесии, мы всегда должны минимизировать полную энергию системы. Неправильным было бы отыскивать минимум энергии ядра, забыв о той среде, в которой оно находится. Понятно и то, что концентрации n_p и n_e в нашей системе равны и ограничены сверху.

Существует и еще одна возможность для оценки максимально допустимого значения n_e в электрон-протонной плазме. Нам снова удобно воспользоваться сейчас представлениями о плазменных колебаниях. Плазменная частота электронов определяется известной нам формулой: $\omega_{0e}^2 \cong \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}$. Характерным для электронов пространственным масштабом является $a_e \sim n_e^{-1/3}$. Соответствующая «скорость звука» $S_e \sim \omega_{0e} \cdot a_e$ не должна во всяком случае превосходить скорость света c . Из этого условия сразу получаются неравенства

$$a_e > \left(\frac{4\pi e^2}{m_e c^2}\right) \text{ и } n_e < \left(\frac{m_e c^2}{4\pi e^2}\right)^3$$

Реальные концентрации электронов в нейтронно-протонно-электронной смеси вблизи ядерных плотностей и в самом деле не очень отличаются от вычисленного нами из «плазменных» соображений максимального значения n_e .

Они составляют несколько процентов от концентрации $n_n \sim \frac{\rho}{m_n} \sim 10^{38} \text{ см}^{-3}$, если $\rho \sim 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$. Это довольно интересное совпадение.

Заметим, однако, что приведенные «плазменные» рассуждения не имеют отношения к существованию в системе, нас интересующей, нейтронов и к возможности β -распада. Реальное ограничение на концентрацию электронов получается именно из-за того, что энергия Ферми электронного моря сравнивается с энергиями вылетающих при β -распаде электронов даже несколько раньше, чем достигается «плазменный» предел. Говоря о β -распаде, мы тоже должны были бы быть «осторожнее в выражениях». Энергии вылетающих при β -распаде электронов могут и отличаться друг от друга, мы имели в виду, конечно, некоторую среднюю величину.

Если мы вычислим теперь характерную энергию электронов, соответствующую предельной концентрации n_e , полученной из «плазменных» рассуждений, то убедимся, что она существенно превосходит $m_e c^2$. В действительности оказывается, что при таких энергиях в рассматриваемой нами системе становится возможным рождение новых частиц, а потому система может состоять только из нейтронов, протонов и электронов лишь до поры до времени.

Любопытно сравнить еще средние расстояния между электронами в белом карлике с релятивистским электронным газом и в нейтронной звезде. Для белого карлика $a_e \sim 10^{-11} \text{ см}$, а при ядерных плотностях $n_e \sim 10^{-2} n_n \sim 10^{36} \text{ см}^{-3}$, и значит $a_e \sim 10^{-12} \text{ см}$. Относительное сжатие электронной системы не так уж велико, всего на порядок (по расстоянию). Напомним еще, что в белом карлике импульс электрона q_e не превосходил по порядку величины $m_e c$. В сердцевине нейтронной звезды $q_e \gg m_e c$.

Подчеркнем еще, что расстояние между электронами или нуклонами мы должны понимать как $n^{-1/3}$. Вопрос об измерении координат частиц мы не должны ставить, ибо определение координат опять связано с соотношением неопределенностей. Нас интересуют состояния с определенными импульсами, но координаты частиц при этом не фиксируются ($\Delta x \rightarrow \infty$).

Удивительные атомы

Существование очень сильных магнитных полей может, оказывается, повлиять и на структуру поверхности пульсара. Мы рассмотрим совсем элементарную модель, из которой будет ясно, какие перестройки могут произойти на поверхности. Строгое решение подобных задач принадлежит Б. Б. Кадомцеву и М. Рудерману с сотрудниками.

Вспомним, как движется электрон в магнитном поле. Фиксируем направление поля H и предположим сначала, что у электрона нет компоненты скорости, направленной вдоль H . В этом случае движение электрона будет происходить по окружности некоторого радиуса r_0 , лежащей в плоскости,

перпендикулярной магнитному полю. Импульс электрона можно оценить из соотношения неопределенностей. Очевидно, что он $\sim \hbar/r_0$, а скорость электрона $v_e \sim (\hbar/m_e r_0)$. С другой стороны, скорость, $\omega_c r_0$, ω_c – частота вращения электрона по окружности (она называется циклотронной частотой). Приравнявая выражения для скорости, мы получим $r_0^2 \sim (\hbar/m_e r_0) \sim$ Теперь напомним, что циклотронная частота $\omega_c = (eH/m_e c)$. Это следует хотя бы из такого простого рассуждения. Сила, действующая на движущийся по окружности в магнитном поле электрон, есть $(e/c)v_e H$, она и есть центростремительная сила, поэтому $m_e \omega_c^2 r_0 = \frac{e}{c} \omega_c r_0 H$. Подставляя ω_c в написанное раньше выражение для r_0 , получим $r_0^2 \sim (\hbar c/eH)$. Чем больше поле H , тем меньше r_0 .

Если бы электрон имел с самого начала компоненту скорости, направленную вдоль H , то, очевидно, он стал бы двигаться по спирали, «намотанной» на цилиндр с радиусом r_0 . Шаг этой спирали определялся бы, конечно, составляющей скорости электрона в направлении поля.

Теперь представим себе, что рассматриваемый нами электрон принадлежит водородоподобному атому. Так мы называем атом с зарядом ядра Z и одним электроном. Боровский радиус для этого электрона $a = (\hbar^2/Zm_e e^2)$. Если этот атом поместить в достаточно сильное магнитное поле, то может случиться, что r_0 окажется меньше a . В этом случае движение электрона в атоме исказится. Вдоль поля характерным размером будет по-прежнему боровский радиус a . В направлении же, перпендикулярном полю, электронная траектория «сожмется». Если бы движение электрона в атоме было классическим, мы бы сказали, что атом вытянулся и стал «цилиндрическим». Приведенные рассуждения, конечно, непоследовательны в том же самом смысле, в каком непоследовательна теория атома Бора, использующая представление об электронных орбитах в атоме. Тем не менее, нам нет нужды отказываться здесь от такого наглядного описания искажения атомов очень сильными полями. Строгий квантовомеханический расчет лишь уточняет наши простые выводы, но не отвергает их.

Мы можем вычислить значения H , при которых существуют «цилиндрические» атомы. Неравенство $r_0 \ll a$ эквивалентно условию $H \gg \left(\frac{\hbar c}{ea^2}\right) = \frac{\hbar c}{ea_0^2} Z^2$; $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$. Для условий на поверхности нейтронной звезды такое неравенство может иметь место. Если считать $a \sim 10^{-8}$ см, то оно выполнено при $H > (10^8 \div 10^9)$ Гс. Заметим еще, что водородоподобная модель атома совсем неплоха, когда мы говорим о поверхности пульсара. Плотность вещества там все-таки достаточно велика и, заведомо, большая часть внешних электронов у атомов уже «отодрана». Любопытно еще, что полученному нами неравенству можно придать и «энергетический» смысл, если переписать его в виде $(H^2/8\pi) \gg (e^2/a^4)(\hbar c/e^2)^2/8\pi$ и заметить, что слева стоит плотность магнитной энергии, а справа – умноженная на безраз-

мерный множитель плотность кулоновской энергии в неискаженном атоме. Грубо говоря, можно сказать, что форма атома искажается, когда плотность магнитной энергии на три порядка превосходит плотность кулоновской. Не так-то просто, оказывается, исказить атом магнитным полем!

И все же вывод, к которому мы приходим, таков, существование полей $H \sim 10^{12}$ Гс означает, что атомы, существующие в самом внешнем слое звезды, искажены. Предполагается (и подтверждается более полными расчетами), что сильно вытянутым вдоль магнитного поля «цилиндрическим» атомам выгодно образовать полимерные цепочки.

Гипотезы о кристаллах и источниках энергии пульсаров

То, что пульсары являются конечным продуктом звездной эволюции, во все не означает, что интенсивности физических процессов в них малы. В этом разделе мы затронем вопрос о том, сколь громадные запасы энергии запасены в этих объектах. Мы еще далеко не все знаем о механизмах преобразования энергии в пульсарах. Поэтому утверждения о том, что эти звезды светят за счет энергии, выделяющейся при каких-то конкретных процессах, всегда в известной степени условны. Не очень надежны пока и численные оценки характерных энергий, имеющих разное происхождение. И тем не менее, такие оценки позволяют нам выделять процессы, которые являются наиболее вероятными и важными на каждой стадии эволюции нейтронной звезды. Полный анализ энергетики нейтронной звезды мы сделать здесь, конечно, не сможем. Наша цель сейчас в том, чтобы проиллюстрировать возможность извлечения энергии из звезды.

Любопытно, кстати, заметить, что если бы вся запасенная в звезде энергия $\sim (\gamma M^2/R) \sim 3 \cdot 10^{17}$ эрг могла равномерно излучаться в течение времени $\sim 3 \cdot 10^{17}$ с (таково время существования Вселенной), то мы имели бы источник с интенсивностью $\sim 10^{36}$ эрг/с. Примерно такая же интенсивность характерна для известных нам пульсаров. Разумеется, конечно, что всю свою энергию нейтронная звезда уже не излучит. Те энергетические запасы, которые могут переработаться в излучение, на несколько порядков меньше гравитационной энергии, но и их хватает надолго.

Много интересных механизмов накопления и освобождения энергии связано с кристаллическими структурами в звездах. То, что существование этих структур во внешних слоях нейтронных звезд вполне реально, мы знаем. И, может быть, теперь читателю не покажется уже неестественной постановка вопроса о возможности существования кристаллов и в сердцевинах пульсаров. Эта удивительная гипотеза была подвергнута серьезному анализу многими теоретиками. Если нейтронный кристалл существует, то энергия нулевых колебаний частиц должна быть во всяком случае мала по сравнению с энергией их взаимодействия. Как и для известных нам кри-

сталлов, это необходимое условие. Проверка его выполнимости и является первоочередной задачей.

Раньше мы называли ядерным кристаллом кристаллическую решетку, существование которой обеспечивалось кулоновским взаимодействием атомных ядер. Ядерные силы к существованию этого кристалла никакого отношения не имели.

Для существования нейтронного кристалла нужно, чтобы стабильность решетки обеспечивали именно ядерные силы. Решить вопрос о том, образуется ли такая решетка, и если образуется, то при какой плотности это происходит, оказалось теперь гораздо сложнее. Окончательного решения этого вопроса нет до сих пор. Было проведено довольно много расчетов, свидетельствующих о том, что нейтронная кристаллическая решетка могла бы образоваться. Но результаты разных работ приводят к заметно отличающимся друг от друга значениям плотности, при которой может происходить переход из жидкого состояния в кристаллическое. Есть здесь и другие ядерно-физические проблемы, касаться которых мы сейчас не будем. И хотя кристаллизация нейтронной жидкости остается пока гипотетической, не лишен интереса вопрос о возможных следствиях такой кристаллизации. Они могут оказаться важными и для энергетики, и для эволюции нейтронных звезд.

Во многих отношениях нейтронная компонента вещества очень похожа на другую квантовую фермиевскую систему. Мы имеем сейчас в виду гелий-3. При нормальном давлении и очень низких температурах гелий-3 существует только в жидком виде. Под давлением соотношение между энергией нулевых колебаний и энергией взаимодействия атомов гелия-3 изменяется так, что он может стать кристаллическим. Свойства такого кристалла не совсем обычны. Оказывается, что в определенном температурном интервале и при фиксированном давлении кристалл гелия-3 будет плавиться при... понижении температуры! Более того, если обычно при плавлении тепло должно поглощаться, то для гелия-3 в том же температурном интервале плавление сопровождается выделением тепла. Такое поведение связано с особенностью кривой плавления гелия-3 (так называется график зависимости давления кристаллизации от температуры). В других веществах давление кристаллизации обычно растет с ростом температуры. Для гелия-3 кривая плавления имеет минимум. Существование этого минимума связано с квантовыми свойствами этой ферми-системы. Укажем еще, что адиабатическое сжатие гелия-3 приводит не только к кристаллизации, но и к резкому охлаждению. Эти любопытные свойства были предсказаны для гелия-3 академиком И. Я. Померанчуком еще в 1950 г. В дальнейшем этот эффект Померанчука лег в основу способа получения сверхнизких температур. Сейчас этот способ широко используется в низкотемпературных лабораториях. Оказывается, что совершенно

аналогично могла бы вести себя и нейтронная система. Предположим, что нейтронный кристалл существует в сердцевине звезды. Тогда при остывании ее в определенной области температур нейтронный кристалл может плавиться, выделяя при этом тепло! Ситуация очень любопытная. Но, кроме того, мы должны учесть и еще одно обстоятельство. Удельный объем (объем, приходящийся на одну частицу) в жидкости несколько больше, чем в кристалле. Упрощая ситуацию, мы можем сказать теперь так. При плавлении за счет разности удельных объемов появится «лишний» объем. Звезда при этом должна, грубо говоря, стремиться «разбухать». Но пульсары имеют кристаллическую кору, которая мешает «разбуханию». Значит, должны накапливаться радиальные напряжения в кристаллическом веществе коры. Рано или поздно они могут стать довольно значительными, превзойти соответствующий предел прочности и сломать кору. Таким образом, результатом накопления радиальных напряжений может стать «звездотрясение»! Более подробный анализ описанной сейчас качественной схемы показывает, что она может быть реальной. Удастся сделать и численные оценки, правда, довольно грубые. Если со всеми необходимыми оговорками принять, что нейтронный кристалл занимает шаровой слой с радиальной толщиной $\sim 10^5$ см, то энергия, которую он выделит, расплавившись целиком, может достигать величины $\sim (10^{48} \div 10^{49})$ эрг. Примерно таков же запас тепловой энергии, имеющейся в жидкой и несверхтекучей нейтронной звезде при $T \sim 10^9$ К. Сравните эту ситуацию с оценками, которые мы делали, говоря о кристаллизации белых карликов.

Энергию вращения и энергию магнитного поля нейтронной звезды оценить не очень сложно. Скажем теперь несколько слов о других энергетических запасах звезды. Во-первых, нельзя забывать о запасах ядерной энергии. В родившейся неравновесной звезде еще возможны ядерные реакции. Запас соответствующей энергии может достигать до $\sim 10^{48}$ эрг. Во-вторых, всегда существует некоторая дополнительная гравитационная энергия, обусловленная деформацией вращающейся звезды. У пульсаров, как и у всех других вращающихся гравитирующих шаров, экваториальный и полярный радиусы несколько отличаются друг от друга. Энергия, соответствующая такой деформации, совсем не мала. Интуитивно это вполне понятно, ведь сжать звезду совсем непросто! Если в звезде есть кристаллическая сердцевина, она конечно тоже слегка деформирована, и в ней запасена энергия «упругой» деформации. То же самое можно сказать и о кристаллической коре. Оценки энергии деформации показывают, что она в общем не отличается сильно от энергии вращения, т. е. тоже $\sim 10^{49}$ эрг.

Мы видим таким образом, что в излучение звезды могут давать свой вклад энергии: вращения, выделяющаяся при плавлении кристаллической сердцевины (если, конечно, такое плавление происходит), избыточная

гравитационно-деформационная, ядерная и тепловая. Вероятно, и это еще не все, но мы сейчас ограничимся этими видами энергии – представление о возможных источниках внутренней энергии у нас теперь есть. Подчеркнем еще раз, что освобождение избыточной энергии деформации происходит после того, как соответствующие напряжения в кристаллических структурах превзойдут прочность решетки. Накапливание таких напряжений может быть и довольно длительным процессом. Если ломка и перестройка кристаллической решетки происходит в коре нейтронной звезды, пульсар испытывает «звездотрясение». Идея такого типа впервые была высказана М. Рудерманом. Из условия сохранения механического момента звезды ($\sim MR^2\Omega$) сразу следует, что перестройка, сопровождающаяся малым изменением момента инерции, должна автоматически приводить и к соответствующему изменению угловой скорости Ω . Такова простейшая схема возможного объяснения скачков периода вращения звезд, использующая гипотезу «звездотрясений». Более того, можно было бы построить и ряд (бесконечный!) разумные комбинированные схемы. Вряд ли, конечно, стоит этим заниматься. Было предложено очень много механизмов, объясняющих как именно накапливаются напряжения в кристаллических структурах пульсаров (в том числе и в сердцевине, если нейтронный кристалл там существует). Оценивались, конечно же, и характерные времена, через которые кристаллы ломаются. Любопытно отметить», что даже при отсутствии каких-либо активных процессов внутри звезды кристаллическая кора пульсара все равно могла бы время от времени ломаться. Причина этого в том, что в ней всегда накапливаются нерадиальные напряжения, связанные с замедлением вращения звезды.

Возможность разломов коры и наличие радиальных напряжений в звезде позволили дать одно из возможных объяснений наблюдавшихся γ -вспышек. Московские астрофизики Г. С. Бисноватый-Коган, В. С. Имшенник, Д. К. Надежны и В. М. Чечеткин предложили так объяснять эти, во многом пока загадочные, γ -вспышки. В подкорковой области звезды существует довольно большой запас потенциально радиоактивного вещества. Выделять очень быстро запасенную ядерную энергию это вещество не может, пока оно не будет выброшено из звезды. Здесь ситуация похожа на ту, которую мы обсуждали раньше, говоря о невозможности β -распада перегруженных нейтронами ядер в электронном море достаточно большой плотности. Но после выброса вещества в «момент звездотрясения» из звезды ядерная энергия выделяется очень интенсивно, происходит взрыв. На Земле этот взрыв будет тогда регистрироваться как γ -вспышка. Мы привели этот пример для того, чтобы проиллюстрировать еще раз ту связь, которая может существовать между перестройками в веществе нейтронных звезд и их наблюдаемыми характеристиками.

На пути к количественным расчетам

Все те оценочные расчеты, которые мы до сих пор делали, дают нам вполне разумное представление о порядках физических величин и о тех перестройках, которые происходят в веществе при плотностях, меньших $\sim 2 \times 10^{14}$ г/см³. Ограничив диапазон рассматриваемых плотностей, мы лишили себя тем самым возможности подробнее рассказать о том, что происходит в самой центральной части нейтронной звезды. В оправдание автору и в утешение читателю можно сказать, что мы не очень хорошо знаем, что там происходит на самом деле.

Несомненно, однако, что при достаточно высоких плотностях должны появиться новые частицы. Мы имели возможность убедиться в том, что нестабильные в обычных условиях нейтроны не могут распадаться в системе, где электронная энергия Ферми достаточно велика. В глубоких слоях нейтронных звезд могут присутствовать и другие частицы, которые мы привыкли считать в земных лабораториях нестабильными. Впервые условия и последовательность рождения частиц при сверхвысоких плотностях проанализировали еще в 1960 г. советские астрофизики В. А. Амбарцумян и Г. С. Саакян.

Простейшим примером, иллюстрирующим перестройки в системе, связанные с рождением частиц, является появление μ^- -мезонов. Мы видели раньше, что электронные энергии могут существенно превосходить $m_e c^2$. Можно представить себе, что электронные энергии стали больше энергии покоя μ^- -мезона. В этом случае при столкновении электронов с энергиями порядка фермиевской становится возможным рождение μ^- -мезонов и покидающих звезду пар нейтрино—антинейтрино. Процесс же распада $\mu^- \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$ будет запрещен принципом Паули (совершенно аналогично запрету на процесс $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$). Численный расчет показывает, что малая примесь μ^- -мезонов есть уже и в том диапазоне плотностей, который мы рассматривали. Мы не учитывали это в наших рассуждениях потому, что на качественные оценки, которые мы делали, наличие μ^- -мезонов практически не влияет.

Говорили мы и о том, что корректное построение уравнения состояния вещества при ядерных и сверх- ядерных плотностях требует возможно более точного описания взаимодействия частиц. В то же время следует заметить, что формулы для давления и плотности энергии, которыми мы все время пользовались, есть, по существу, формулы для идеальных фермиевских газов. Учет взаимодействия частиц, переход от «газового» описания к «жидкостному» совершенно необходимы при построении более точных моделей.

Мы не будем углубляться в эти построения. Для нас здесь вполне достаточно того, что качественные выводы можно получать, пользуясь сравнительно простыми представлениями и «газовыми» формулами.

Переход к численным расчетам звездных структур подразумевает предварительное получение ответов и еще на несколько существенных вопросов. Во-первых, надо выяснить, когда можно и когда нельзя пользоваться формулами ньютоновской теории гравитации. Во-вторых, следует оценить, велико ли влияние магнитного поля и вращения на равновесную структуру звезды. В-третьих, нужно сначала качественно исследовать вопрос об устойчивости звезды. Мы не будем обсуждать сейчас эти проблемы подробно. Несколько замечаний, которые приводятся ниже, являются лишь иллюстрациями и частичными ответами на поставленные вопросы.

Напомним читателю, что у нас уже имеются формулы, позволяющие оценить массу и радиус белого карлика с релятивистскими электронами. Используя эти формулы, можно убедиться в том, что гравитационный потенциал на поверхности такого карлика $(\gamma M/R) \sim (Z/A) \cdot (m_e/m_p) \cdot c^2$. Гравитационный потенциал белого карлика с нерелятивистскими электронами во всяком случае не больше выписанного только что. Совершенно ясно, что $(\gamma M/R) \ll c^2$, а это означает, что для расчета равновесного белого карлика нет нужды использовать общую теорию относительности. Хитрость, однако, заключается в том, что для белых карликов с релятивистским электронным газом, давление которого пропорционально $n_e^{4/3}$, вопрос об устойчивости очень актуален. И именно при расчете устойчивости могут сказаться даже малые поправки, вносимые в теорию общей теорией относительности. Для белых карликов с нерелятивистским электронным газом дело обстоит проще, для расчетов их структуры и устойчивости вполне достаточно ньютоновской теории.

Оценим теперь гравитационный потенциал на поверхности нейтронной звезды. Вспомним, что $M \sim m_n N_n$, $R \sim a_n N_n^{1/3}$, тогда $(\gamma M/R) \sim \gamma (m_n/a_n) \cdot N_n^{2/3}$. Однако мы уже знаем, что a_n связано с N_n . Используя эту связь, мы легко получим для гравитационного потенциала выражение $\sim (\hbar/a_2)^2 (1/m_n^2) \sim (m_n^2 v_n^2 / m_n^2 = v_n^2)$. Мы считали нейтроны в звезде нерелятивистскими, поэтому $v_n < c^2$, а, значит, для грубых оценок опять можно пользоваться ньютоновской теорией. Поправки, связанные с общей теорией относительности, теперь уже, однако, вполне ощутимы. Чтобы убедиться в этом, нужно оценить скорости нейтронов. При ядерной плотности v_n не намного меньше скорости света c (например, при $a_n \sim 10^{-13}$ см скорость $v_n < 10^{10}$ см/с). Поэтому для построения точных моделей нейтронных звезд нужно использовать формулы общей теории относительности. Заметим, кстати, что гравитационный потенциал $(\gamma M/R) \sim gR$, где g – ускорение свободного падения на поверхности гравитирующего шара. Но по порядку величины gR есть и квадрат скорости отрыва (космической скорости). Любопытно, что для нейтронной звезды $v_n^2 \sim gR$, т. е. космическая скорость порядка скорости нейтронов в сердцевине звезды. Вылетать же из

звезды нейтроны, конечно, не могут. Разумной численной оценкой можно считать $v_n^2 \sim 0,1 c^2$.

Для того чтобы получить представление о величине поправок, вносимых в расчеты вращением, можно сравнить характерную скорость частиц на экваторе звезды со скоростью отрыва. Наконец, оценим величину магнитного поля, которое могло бы оказать влияние на структуру звезды. Очевидно, что для этого нужно было бы, чтобы плотность магнитной энергии стала порядка плотности энергии гравитационной. Если приравнять эти энергии, то получится значение магнитного поля $\sim 10^{18}$ Гс. Таких полей в звездах, вероятно, нет. Поля же $\sim 10^{12}$ Гс на внутреннюю структуру звезды влияния не оказывают. Не надо забывать, правда, что вещество на поверхности звезды перестраивается, как мы видели, уже в полях $\sim 10^{12}$ Гс. Но эта последняя перестройка относится лишь к сферическому слою с толщиной, много меньшей R .

Заканчивая на этом рассказ о возможных перестройках и фазовых переходах в сверхплотном веществе, существующем в белых карликах и нейтронных звездах, автор хотел бы подчеркнуть еще раз, что о многих других содержательных и интересных идеях и задачах здесь не рассказано вовсе не потому, что они этого не заслуживают. Читатель сможет получить представление о них, обратившись теперь к обзорам и книгам, указанным в приведенном ниже списке литературы.

Литература

Обратим внимание читателей этой статьи на то, что о работах, упоминаемых в тексте физиков и астрофизиков, довольно подробно рассказывается в цитируемых в списке литературы книгах и статьях.

1. *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.* Теория тяготения и эволюция звезд // М. Наука, 1971, 484 стр.
2. *Бисноватый-Коган Г.С.* Физические вопросы теории звездной эволюции // М. Наука 1989, 488 стр.
3. *Липунов В.М.* Астрофизика нейтронных звезд // М. Наука, 1987, 296 стр.
4. *Саакян Г.С.* Физика нейтронных звезд // Дубна, 1995, 349 стр.
5. *Чандрасекар С.* Введение в учение о строении звезд. // М. Иностранная литература, 1950, 476 стр.
6. *Шапиро С., Тьюколски С.* Черные дыры, белые карлики, нейтронные звезды. Часть 1. // М. Мир, 1985, 256 стр.
7. *Шапиро С., Тьюколски С.* Черные дыры, белые карлики, нейтронные звезды. Часть 2. // М. Мир, 1985, 257-656 стр.
8. *Под ред. Рутковской М.* Сборник статей «Белые карлики» // М. Мир, 1975, 255 стр.
9. *Чандрасекар С.* Величайшие теории. Вып. 50. Звездная эволюция. Жизнь и смерть одной звезды. // М. Де Агостини, 2014-2015, 166 стр.
10. *Давыдов А.С.* Теория атомного ядра // М. Физматия, 1954, 611 стр.
11. *Маляров В.В.* Основы теории атомного ядра // М. Наука, 1967, 511 стр.
12. *Киржниц Д.А.* Обзор, посвященный экстремальным состояниям вещества. // Успехи физических наук, 1971, т. 101, вып. 3
13. *Гинзбург В.Л.* Обзор о пульсарах // Успехи физических наук, 1971, т. 103, вып. 3
14. *Гинзбург В.Л.* Пульсары // М. Знание, 1970, 64 стр.
15. *Гинзбург В.Л.* Современная астрофизика // М. Наука, 1970
16. *Гинзбург В.Л.* О физике и астрофизике // М. Наука, 1974
17. *Дайсон Ф., Тер Хаар Д.* Нейтронные звезды и пульсары // М. Мир, 1973
18. *Шкловский И.С.* Звезды. Их рождение, жизнь и смерть // изд. 2-ое, М. Наука, 1977
19. *Блинников С.И.* Белые карлики // М. Знание, 1977, 64 стр.
20. *Каплан С.А.* Физика звезд // изд. 3-е, М. Наука, 1977
21. *Вайскопф В.* Современная физика в элементарном изложении // Успехи физических наук, 1971, том 103, вып. 1
22. *Тейлер Р. Дж.* Строение и эволюция звезд // М. Мир, 1973
23. *Тейлер Р. Дж.* Происхождение химических элементов // М. Мир, 1975
24. *Саакян Г.С.* Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс // М. Наука, 1972
25. *Брук Ю.М.* Фазовые переходы в сверхплотном веществе // М. Знание, 1979, 64 стр.
26. *Мигдал А.Б.* Поиски истины // М. Знание, 1978

**PHASE TRANSFORMATIONS IN SUPERDENSE MATTER:
AN EXPERIENCE IN THE MODELING
OF WHITE DWARFS AND NEUTRON STARS**

Yu.M. Bruk

P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Science

yubruk@gmail.com

Received 12.06.2018

Physical processes and phase transformations in the superdense matter of white dwarfs and neutron stars are analyzed. The possible changes in the state of matter at densities ranging from 10^5 to 10^{14} g/cm³ are described. Extreme conditions existing in the objects under discussion are characterized by temperatures as high as 100 million degrees and magnetic fields up to 10^{12} Gauss, and pressures up to 10^{22} Megabar. Such conditions cannot be achieved in any laboratory existing at the Earth. To find out the solution of physical problems related to the behavior of the matter substance under such extreme conditions, the analogies with the usual problems of ordinary nuclear and solid-state physics are widely used.

КВАЗИОДНОМЕРНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОНЫ

Н.В. Селина

Кубанский государственный технологический университет

Selina_Natalia@mail.ru

Поступила 08.07.2018

Получено непосредственное (без использования специальных функций) решение уравнений Максвелла для кусочно-однородной среды с цилиндрической симметрией. На его основе разработан рациональный способ расчета материальных, геометрических и дисперсионных характеристик плазмонной металлодиэлектрической цилиндрической структуры. Численный расчет волнового вектора плазмонов с применением полученных формул подтвердил основные теоретические и экспериментальные результаты исследований одномерных поверхностных плазмон-поляритонов. Решение применимо к структурам с произвольным числом границ раздела «металл-диэлектрик».

УДК 533.9

DOI: 10.31145/2224-8412-2018-18-1-45-64

1. Введение

Начало теоретического исследования поверхностных плазмонов в системах с цилиндрической симметрией было положено А. Зоммерфельдом в 1899 году [1]. Научными исследованиями в результате анализа электромагнитных полей вблизи металлической поверхности теоретически доказано и экспериментально подтверждено, что вдоль границы раздела сред «металл-диэлектрик» могут возбуждаться поверхностные электромагнитные волны, существующие только во взаимодействии с колебаниями электронов в узком

приповерхностном металлическом слое. Данное взаимодействие является необходимым условием существования указанных поверхностных электромагнитных волн. Такое совокупное физическое явление названо возбуждением поверхностных плазмон-поляритонов [2]. Их существование в условиях резонанса возможно на плоскопараллельных и цилиндрических границах раздела сред в металлодиэлектрических наноструктурах, в том числе – в металлических нанопленках и нанопроволоках с многослойной оболочкой. Структурное ограничение в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, определяет единичную размерность цилиндрических плазмонов.

Область научно-технологического использования поверхностных плазмон-поляритонов неуклонно расширяется. Например, это физическое явление может применяться для преобразования электромагнитных волн из оптического диапазона частот в терагерцовый. Биологические молекулы имеют собственный излучательный и поглощательный спектры как раз в последнем из названных диапазонов. Поэтому изучение поверхностных плазмон-поляритонов имеет особое значение для практического применения в биологии, медицине [2, 3].

До недавнего времени предел возможного разрешения оптических приборов определялся классическим неравенством Рэлея, согласно которому минимальный размер изображения ограничен дифракцией электромагнитных волн. С развитием ближнепольной микроскопии появилась возможность преодолеть дифракционный предел. Это позволило находить идентификационные следы взаимодействия света с микроскопическими объектами, находящимися в ближнем световом поле. Указанные достижения имеют большое значение для медицины, биологических, химических, прикладных естественнонаучных исследований, судебной экспертизы и иных сфер аналогичного применения. Физической основой оптических ближнепольных приборов и устройств является процесс возбуждения плазмонов на границе металла и диэлектрика. Такой оптический элемент, как суперлинза, представляет собой многослойную металлодиэлектрическую наноструктуру плоскопараллельной или цилиндрической симметрии. Оба варианта линзы экспериментально реализованы.

Условия возбуждения поверхностных плазмон-поляритонов имеют резонансный характер, что является основой для конструирования сенсоров. Малое изменение среды, окружающей элемент наноструктуры, приводит к существенному колебанию отклика всей системы на воздействие оптической волны. Детектирование этого колебания (оптического сигнала) позволяет идентифицировать характеристики среды, поскольку для каждой из систем «среда + наноэлемент» характерны индивидуальные условия плазмонного резонанса. Описанным образом и достигается сенсорный эффект. В настоящее время практическое использование плазмонных биосенсоров – уже повседневная реальность [3].

Одним из существенно значимых научных направлений становится конструирование искусственных композитных сред, обладающих редкими для природных материалов свойствами. Они получили название «метаматериалы». Так, изотропные среды с отрицательным значением электрической и магнитной проницаемостей не встречаются в природе, однако именно в них, полученных экспериментально, имеют место явления, сопряженные с желаемым эффектом (например, распространение электромагнитных волн с противоположными направлениями фазовой и групповой скоростей, отрицательная рефракция или обратный эффект Доплера). Этот эффект часто невозможен с точки зрения законов классической оптики. Вместе с тем, развитие таких отраслей науки, как нанофотоника и наноплазмоника, преодолевающих пределы классической оптики, открывает новые перспективы. Возможность конструирования особенных сред, обладающих выше-названными свойствами и называемых «левыми» [3], экспериментально подтверждена. И именно плазмонный резонанс в наноструктурированных металлодиэлектрических материалах обеспечивает отрицательное значение магнитной и диэлектрической проницаемостей, поскольку его условия определяют оптический отклик среды на воздействие излучения. Если длина оптической волны больше размеров любого из элементов структуры, то волна их «не чувствует», и её распространение соответствует некоторым «усредненным» характеристикам среды. Отсутствие такой «чувствительности» придает метаматериалу желаемый эффект однородной среды. В описанном процессе прогнозируемый искомый параметр диэлектрической проницаемости обладает отрицательным значением благодаря большому отрицательному значению диэлектрической проницаемости металла, а магнитные свойства нанобъектов определяют отрицательную магнитную проницаемость метаматериала. Практические области применения композитных особенных сред расширяются с каждым годом, поскольку эти материалы обладают свойствами, перспективными к дальнейшему научно-промышленному исследованию, и имеют существенный научно-технический потенциал.

В продолжение научного физико-математического анализа модели поверхностных плазмон-поляритонов целесообразен поиск упрощения математического формализма модели. Математический аспект изучения поверхностных плазмон-поляритонов сводится к решению уравнений Максвелла для кусочно-однородной среды с плоскопараллельными и цилиндрическими границами раздела сред-компонентов. Существует решение задачи на плоских границах раздела «металл-диэлектрик». Результат представлен в виде уравнения плазмонного резонанса для трехслойной металлодиэлектрической среды со средним слоем нанометровой толщины и полубесконечными крайними слоями [3]:

$$(k_2/\varepsilon_2)tg(a(d)) = -(k_1/\varepsilon_1)i$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, k_1 = \sqrt{\varepsilon_1 k_0^2 - \beta^2}, k_2 = \sqrt{\varepsilon_2 k_0^2 - \beta^2}$ – диэлектрические проницаемости и волновые вектора в металлической и диэлектрической средах, k_0 -волновое число фотона в свободном пространстве, β -постоянная распространения (волновой вектор плазмонов). Аргумент тангенса – изменение фазы волны на ширине среднего слоя (d):

$$a(d)=k_2 d.$$

Поскольку физические принципы распространения плазмонов на плоской и цилиндрической границе «металл-диэлектрик» одинаковы, закономерно возникает предположение, что математический аппарат, применяемый к плоской структуре, может быть, с учетом соответствующих различий, применен к цилиндрической металлодиэлектрической структуре. Однако, в цилиндрической системе координат преобразование уравнений Максвелла приводит к уравнению Бесселя, решением которого являются специальные табулированные функции, а не аналитический результат. Традиционно дисперсионное соотношение для определения волнового вектора поверхностных плазмон-поляритонов определяется методом «сшивания» на границе раздела решений уравнений Максвелла в диэлектрической и металлической областях [1-3]. Полученное уравнение решается только численными программными методами, при этом исследователи иногда используют асимптотики функции Бесселя для упрощения расчетов [2].

По сравнению с задачей о поверхностных плазмонах на плоской границе раздела металла и диэлектрика, здесь уравнение Бесселя содержит не только элементарные, но и специальные функции, что усложняет численный анализ. Наноразмеры структуры в таком случае, хотя и не способствуют непосредственно упрощению численного математического анализа, но позволяют оценить характеристики физических процессов посредством разложения функций в ряд по малому параметру, и, тем самым, приблизить их к аналитическому виду. В целом, этот способ решения задачи предполагает использование достаточно большого вычислительного ресурса [3].

В настоящей статье представлено полученное аналитически решение уравнений Максвелла в однородной среде в цилиндрической системе координат, заданное неявно через элементарные функции:

$$f(r) = const \sqrt{\sin(2a(r))/r},$$

где r – радиальная координата, $f(r)$ -компонента магнитного или электрического поля, функция $a(r)$ определяется трансцендентным уравнением:

$$a(r) = k_1 r - \sin(a(r))^2 / 2k_1 r.$$

Это решение является самостоятельным результатом и может применяться в исследовании оптических задач.

Относительно уравнения плазмонного резонанса важен результат для кусочно-однородной среды, общий для всех сред-компонентов:

$$f(r) = \text{const} \sqrt{\sin(2\tilde{a}(r))/r}$$

$$\tilde{a}(r) = \text{arctg}(\alpha(r) \text{tg}(a(r)))$$

$$k_1 \varepsilon / (k_r \varepsilon_1) = \alpha(r),$$

где ε , k_r – диэлектрическая проницаемость и волновой вектор в среде, включающей координату r . Как следует из условия плазмонного резонанса, поле на границе при удовлетворении им характеристик металлодиэлектрической цилиндрической структуры, должно бесконечно возрастать по сравнению с нерезонансным случаем, следовательно, математически это условие запишется в виде:

$$(k_2/\varepsilon_2) \text{tg}(a(d)) = -(k_1/\varepsilon_1) i.$$

Как видим, оно совпадает с соответствующим уравнением в декартовой системе координат (индексы 1 и 2 относятся к двум средам-компонентам; d -радиус проволоки).

Таким образом, получено общее решение уравнений Максвелла для чередующихся металлической и диэлектрической областей в любом количестве, в результате выведено уравнение, определяющее волновой вектор поверхностных плазмон-поляритонов с включением только элементарных функций. Преимущества найденного решения особенно проявляются при применении его к структуре, характеризующейся, во-первых, наличием многих границ разделов металлических и диэлектрических сред, и, во-вторых – наномасштабом. Относительно первого аспекта, касающегося многослойности структуры, это объясняется тем, что исследование оптических свойств многослойной структуры даже численно не представлено в научной литературе в достаточной полноте. Можно предположить, что такая ситуация предопределена тем обстоятельством, что использование в традиционном подходе специальных функций сильно усложняет расчеты, и это не способ-

ствует развитию данного направления исследований. Во втором аспекте, относящемся к размерам структуры, следует отметить, что в случае использования выведенного в настоящей статье уравнения, наномасштаб оптической системы влияет на вид конечных расчетных формул, облегчая вычислительный процесс. Такое исследование необходимо, например, при моделировании цилиндрической суперлинзы.

2. Теоретическое решение задачи

Задача о распространении электромагнитных волн в периодической слоистой среде с цилиндрической симметрией предполагает решение уравнений Максвелла с целью определения электрических и магнитных полей в областях, заполненных диэлектриком и металлом.

При сложившемся научном подходе принято начинать решение основной физико-математической задачи с того, чтобы записать систему уравнений Максвелла для компонентов кусочно-однородной среды и решить её [2, 3]. В настоящей статье представлен другой вычислительный подход – найти общее точное решение уравнений Максвелла для всех областей кусочно-однородной среды и вывести из него картину оптических преобразований волн в металлической проволоке.

С целью решения поставленной задачи рассмотрим распространение монохроматической цилиндрической электромагнитной волны в неоднородной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(r)$, однородной вдоль оси OZ . Закон распространения электромагнитной волны описывается волновым уравнением, которое выводится из уравнений Максвелла для напряженностей электрического и магнитного полей в волне [4]:

$$\Delta \mathbf{H} + \frac{[\text{grad} \varepsilon \times \text{rot} \mathbf{H}]}{\varepsilon} + \frac{\mathbf{H} \varepsilon \omega^2}{c^2} = 0 \quad (1)$$

$$\omega^2 / c^2 = k_0^2,$$

где ω – частота электромагнитной волны, ε – диэлектрическая проницаемость двухкомпонентной кусочно-однородной среды:

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)T(r)$$

$$T(r) = \begin{cases} 1, & \varepsilon(r) = \varepsilon_2 \\ 0, & \varepsilon(r) = \varepsilon_1 \end{cases}$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – диэлектрические проницаемости областей 1 и 2 соответственно).

Так как граница раздела сред с различной диэлектрической проницаемостью имеет цилиндрическую симметрию, будем вести расчет в цилин-

дической системе координат. Запишем уравнения, определяющие ротор и векторное произведение векторов в цилиндрических координатах:

$$(\text{rot}\mathbf{b})_k = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_i} (b_j H_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} (b_i H_i) \right)}{H_i H_j} \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j,$$

где ϵ_{ijk} – символ Леви-Чивиты,

$$x_1 = r, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z$$

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1.$$

Электромагнитные поля, связанные с поверхностными плазмон-поляритонами, локализованы вблизи границы раздела двух сред и затухают при удалении в каждую из сторон от неё. Они являются частично продольными ТМ-волнами. Вектор электрического поля \mathbf{E} в осесимметричной среде имеет две компоненты: одна из них (E_z) направлена вдоль волнового вектора плазмонов k_s , вторая (E_r) – перпендикулярно к поверхности раздела сред. Вектор магнитного поля \mathbf{H} перпендикулярен к направлению распространения волны и лежит в плоскости поверхности границы раздела сред 1 и 2.

Таким образом, в волне отлична от нуля только φ -компонента напряженности магнитного поля. Для неё уравнение (1) имеет вид:

$$\Delta H_\varphi - \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} = -H_\varphi \epsilon k_0^2.$$

Принимая во внимание, что диэлектрическая проницаемость меняется в радиальном направлении, и все характеристики осесимметричной волны не зависят от координаты φ , из (1) получаем:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r d H_\varphi}{dr} \right) - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} = -H_\varphi \epsilon k_0^2.$$

Зависимость от координаты z определяется множителем $\exp(i\beta z)$, где β – постоянная распространения волны, то есть волновой вектор плазмонов k_s . Полагая

$$k_r^2 = \epsilon k_0^2 - \beta^2,$$

будем искать решение уравнения:

$$\frac{\varepsilon}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\varepsilon} \frac{df}{dr} \right) = -fk_r^2 \quad (2)$$

Оно определяет φ – компоненту напряженности магнитного поля при кусочно-постоянной диэлектрической проницаемости.

Заметим, что справедливо равенство, определяемое формулой дифференцирования произведения функций, известной из теории математического анализа:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\varepsilon f} \frac{df}{dr} \right) = \frac{1}{f} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\varepsilon} \frac{df}{dr} \right) - \frac{\varepsilon}{r} \left(\frac{r}{\varepsilon f} \frac{df}{dr} \right)^2.$$

С учетом него уравнение (2) преобразуется к следующему равенству:

$$\frac{\varepsilon}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\varepsilon f} \frac{df}{dr} \right) + \left(\frac{\varepsilon}{r} \right)^2 \left(\frac{r}{\varepsilon f} \frac{df}{dr} \right)^2 = -k_r^2 \quad (3)$$

Введем обозначение:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon f} \frac{df}{dr} = -k_1 \operatorname{tg}(a(r)), \quad (4)$$

используя которое, уравнение (3) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right) \frac{d}{dr} \left(k_1 \operatorname{tg}(a(r)) \right) - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right) \frac{k_1 \operatorname{tg}(a(r))}{r} + \left(k_1 \operatorname{tg}(a(r)) \right)^2 \\ & = -k_1^2 - \Delta \left(k_r^2 \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь k_1 – радиальная компонента волнового вектора в первой среде.

В первую очередь найдем решение уравнения (5) для однородной среды, где справедливо равенство: $\varepsilon(r)=\varepsilon_1$. Рассматривая решение (4) уравнения (3), найдем производную функции $a(r)$, которую назовем функцией фазы:

$$\frac{d}{dr} (a(r)) = k_1 - \frac{k_1^2 \operatorname{tg}(a(r))}{\left[r \left(\left(k_1 \operatorname{tg}(a(r)) \right)^2 + k_1^2 \right) \right]}. \quad (6)$$

Определим искомую функцию другим равенством, отличающимся от уравнения (4) изменением значения функции фазы на постоянную величину $\pi/2$:

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dr} = -k_1 \operatorname{ctg}(a_1(r)). \quad (7)$$

Для такого решения производная фазы (функции $a_1(r)$) равна:

$$-\frac{d}{dr}(a_1(r)) = k_1 - \frac{k_1^2 \operatorname{tg}(a_1(r))}{\left[r \left((k_1 \operatorname{tg}(a_1(r)))^2 + k_1^2 \right) \right]}. \quad (8)$$

Решение уравнения (3), соответствующее определению функции $(1/f)df/dr$ (4), рассчитывается интегрированием производной логарифма f :

$$f = \exp \left(- \int k_1 \operatorname{tg}(a(r)) dr \right)$$

Предположим, что функции a_1 и a отличаются друг от друга только знаком, и для них справедливо равенство: $a_1 = -a$. Тогда степень экспоненты в решении можно преобразовать следующим образом:

$$\int k_1 \operatorname{tg}(a(r)) dr = \int \operatorname{tg}(a(r)) d(a(r)) + \int \frac{[k_1 \operatorname{tg}(a(r))]^2}{\left[r \left((k_1 \operatorname{tg}(a(r)))^2 + k_1^2 \right) \right]} dr.$$

Используя равенства (6, 8), получаем, что интеграл в этом выражении равен:

$$\int \frac{[k_1 \operatorname{tg}(a(r))]^2}{\left[r \left((k_1 \operatorname{tg}(a(r)))^2 + k_1^2 \right) \right]} dr = \int \frac{dr}{r} - \int \operatorname{ctg}(a(r)) d(a(r)) - k_1 r$$

Суммируя два последних уравнения, перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} & \int k_1 \operatorname{ctg}(a(r)) dr - \int k_1 \operatorname{tg}(a(r)) dr \\ &= \int \operatorname{ctg}(a(r)) d(a(r)) - \int \operatorname{tg}(a(r)) d(a(r)) - \int \frac{dr}{r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя известное тригонометрическое тождество:

$$ctg(x) - tg(x) = 2ctg(2x),$$

запишем (9) в виде:

$$\int 2k_1 ctg(2a(r)) dr = \int 2ctg(a(r)) d(2a(r)) - \int \frac{dr}{r}. \quad (10)$$

Сложение обеих частей уравнения (5) для функций $k_1 ctg(a(r))$ и $-k_1 tg(a(r))$, приводит к уравнению:

$$\frac{d}{dr} (2k_1 ctg(2a(r))) - \frac{2k_1 ctg(2a(r))}{r} + (2k_1 ctg(2a(r)))^2 = -4k_1^2$$

Это уравнение вида (5), но записанное для волнового вектора $-2k_1$. Оно выводится из уравнения (3), записанного для такого значения волнового вектора, заменой:

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dr} = 2k_1 ctg(2a(r))$$

Определенная таким способом функция f равна:

$$f = \exp\left(\int 2k_1 tg(2a(r)) dr\right)$$

Соответствующее решение исходного уравнения находится с использованием равенства (10), и имеет вид:

$$f(r) = const \frac{\sin(2a(r))}{r}. \quad (11)$$

Выведем уравнение для фазы и подтвердим справедливость предположения: $a_1 = -a$. С целью определения фазы, предварительно найдем выражение для производной функции f , определяемой равенством (11):

$$\frac{d}{dr} \frac{\sin(2a(r))}{r} = 2k_1 ctg(2a) \exp\left(2k_1 \int_0^r ctg(2a) dx\right)$$

Интеграл в экспоненте уже определен выше и равен:

$$\int_0^r 2ctg(2a)dx = \int_0^r 2ctg(2a)da - \ln(r)$$

Следовательно, искомая производная определяется выражением:

$$\frac{d}{dr} \frac{\sin(2a(r))}{r} = 2k_1 \frac{\cos(2a(r))}{r}$$

Анализируя структуру уравнений (3) и (6), заметим, что справедливо утверждение: если функция $f = \sin(2a(r))/r$ является решением уравнения (3), то функция $f = \sin(2a(r) + \pi/2)/r$ тоже будет решением этого уравнения, поскольку дифференциал константы равен нулю. Для такой функции справедлива формула:

$$\frac{d}{dr} \frac{\cos(2a(r))}{r} = -2k_1 \frac{\sin(2a(r))}{r}. \quad (12)$$

Перейдем к вычислению фазы, непосредственное интегральное уравнение для которой имеет вид:

$$a(r) = k_1 r - \int \frac{tg(a(r))}{\left[r \left((tg(a(r)))^2 + 1 \right) \right]} dr = k_1 r - \int \frac{\sin(2a(r))}{2r} dr$$

Вычислив с использованием равенства (12) интеграл в нем, получаем трансцендентное уравнение для фазы с условием в нуле: $a(0)=0$:

$$a(r) = k_1 r - \sin(a(r))^2 / 2k_1 r$$

Проинтегрируем аналогичным способом также уравнение (8), получим уравнение:

$$-a_1(r) = k_1 r - \sin(a_1(r))^2 / 2k_1 r.$$

Второе слагаемое в этих определениях фазы есть четная по знаку фазы функция. Сравнивая результаты интегрирования (6) и (8), убеждаемся, что предположение: $a_1 = -a$ справедливо.

Для решения с волновым вектором k_1 справедлива формула:

$$f(r) = const \frac{\sin(a(r))}{r}$$

где для фазы $a(r)$ имеет место формула, получаемая из уравнения (5) с подстановкой $\frac{1}{f} \frac{df}{dr} = k_1 \operatorname{ctg}(a(r))$:

$$a(r) = k_1 r - \sin(a(r))^2 / 2k_1 r$$

Получив решение задачи для однородной среды, обратимся к металлодиэлектрической структуре. Для двухкомпонентной кусочно-однородной среды с цилиндрическими границами раздела сред-компонентов определим равенство:

$$\frac{k_1 \varepsilon_r}{k_r \varepsilon_1} = \alpha(r)$$

Где k_r – волновой вектор в среде, заполняющей область, к которой принадлежит точка с координатой r ; ε_r – диэлектрическая проницаемость среды в указанной области.

Магнитное поле волны в этом случае определяется как:

$$H_\varphi(r) = H_0 \exp \left(-(\varepsilon_r / \varepsilon_1) k_1 \int_0^r (2 \operatorname{ctg}(2a(x))) dx \right).$$

В обозначениях, соответствующих многослойной структуре, преобразование функции фазы аналогично уравнению (6):

$$\frac{d}{dr} (\tilde{a}(r)) = k(r) - \frac{k(r)^2 \operatorname{tg}(\tilde{a}(r))}{\left[r \left((k(r) \operatorname{tg}(\tilde{a}(r)))^2 + k(r)^2 \right) \right]} \quad (13)$$

где

$$\tilde{a}(r) = \operatorname{arctg}(\alpha(r) \operatorname{tg}(a(r))),$$

$k(r)$ – радиальные компоненты волновых векторов в двух средах-компонентах: k_1 либо k_2 . Интегрируя (13), получаем уравнение, общее для всех сред-компонентов, и определяем решение:

$$f(r) = \frac{\exp \left(\int_0^{\tilde{a}(r)} 2k(r) \operatorname{ctg}(2\tilde{a}) d\tilde{a} \right)}{r} = \frac{\sin(2\tilde{a})}{r}$$

Теперь можно записать выражение для продольной и поперечной компоненты электрического поля в волне. Согласно уравнениям Максвелла, они связаны с напряженностью магнитного поля уравнениями [4]:

$$k_r^2 H_\varphi(r) = i\varepsilon k_0 \frac{\partial}{\partial r} (E_z(r)),$$

$$k_r^2 E_r(r) = i\beta \frac{\partial}{\partial r} (E_z(r))$$

Подставляя в эти уравнения выражение для напряженности магнитного поля H_φ , убеждаемся, что такое решение уравнения (3) автоматически определяет непрерывность тангенциальной компоненты электрического и магнитного полей на границе раздела сред. Напряженность электрического поля конечна и отлична от нуля на оси цилиндра.

Для того, чтобы рассчитать поля в волне, необходимо знать постоянную распространения волны β , определяемую частотой волны, а также материальными параметрами и геометрическими характеристиками структуры. Эту величину можно рассчитать, используя дисперсионное соотношение:

$$\left(\frac{k_2}{\varepsilon_2}\right) \operatorname{tg}(a(d)) = -\left(\frac{k_1}{\varepsilon_1}\right) i \quad (14)$$

3. Алгоритм расчета электромагнитного поля в многослойной цилиндрической структуре

Рассмотрим подробно все этапы вычисления напряженностей электрического и магнитного поля оптической волны при распространении её в многослойной цилиндрической металлодиэлектрической структуре. Нас интересует задача определения полей, когда известны следующие исходные данные: материальные и геометрические параметры структуры, а также частота оптической волны и волновой вектор плазмонов β .

Во-первых необходимо вычислить значение функции фазы $a(r)$ на ближайшей к оси цилиндра границе раздела сред, используя формулу (13):

$$a_1 = k_1 d_1 - \frac{\sin(a_1)^2}{2k_1 d_1}$$

Здесь a_1 – значение функции фазы $a(r)$ на ближайшей к оси цилиндра границе раздела сред; $k_1 = \sqrt{\varepsilon_1 k_0^2 - \beta^2}$ – поперечная к оси компонента волнового вектора оптической волны в первой (ближайшей к оси) среде; ε_1 – диэлектрическая проницаемость первой среды; d_1 – радиус в поперечном сечении структуры области, заполненной первой средой.

Следующим шагом определяется значение функции фазы на второй, при последовательном перемещении от оси в радиальном направлении, границе раздела сред:

$$a_2 - \tilde{a}_1 = k_2 d_2 - \frac{\sin(a_2)^2}{2k_2 d_2} + \frac{\sin(\tilde{a}_1)^2}{2k_2 d_1}$$

Здесь

$$\tilde{a}_1 = \arctg(\alpha_1 \operatorname{tg}(a_1)),$$

$$\frac{k_1 \varepsilon_2}{k_2 \varepsilon_1} = \alpha_1$$

a_2 – значение функции фазы $a(r)$ на второй границе раздела сред; $k_2 = \sqrt{\varepsilon_2 k_0^2 - \beta^2}$ – поперечная к оси компонента волнового вектора оптической волны во второй, при отсчете от оси в радиальном направлении, среде; ε_2 – диэлектрическая проницаемость второй среды; d_2 – разность внешнего и внутреннего радиусов в поперечном сечении структуры области, заполненной второй средой.

Аналогично рассчитывается значение функции фазы на каждой границе раздела сред вплоть до внешней n -ой границы:

$$a_n - \tilde{a}_{n-1} = k_n d_n - \frac{\sin(a_n)^2}{2k_n d_n} + \frac{\sin(\tilde{a}_{n-1})^2}{2k_n d_{n-1}}$$

Здесь

$$\tilde{a}_{n-1} = \arctg(\alpha_{n-1} \operatorname{tg}(a_{n-1})),$$

$$\frac{k_{n-1} \varepsilon_n}{k_n \varepsilon_{n-1}} = \alpha_{n-1}$$

a_{n-1} , a_n – значения функции фазы $a(r)$ на $n-1$ -ой и n -ой границах раздела сред; $k_{n-1} = \sqrt{\varepsilon_{n-1} k_0^2 - \beta^2}$, $k_n = \sqrt{\varepsilon_n k_0^2 - \beta^2}$ – поперечная к оси компонента волнового вектора оптической волны в $n-1$ -ой и n -ой, при отсчете от оси в радиальном направлении, средах; ε_{n-1} , ε_n – диэлектрические проницаемости $n-1$ -ой и n -ой сред; d_{n-1} , d_n – разности внешнего и внутреннего радиусов в поперечном сечении структуры областей, заполненных $n-1$ -ой и n -ой средами.

Вычислив a_n , можно определить напряженность магнитного и электрического полей на внешней границе структуры, согласно формулам:

$$H(R_n) = \operatorname{const} \frac{\sin(2\tilde{a}_n)}{R_n}$$

$$\tilde{a}_n = \arctg(\alpha_n \operatorname{tg}(a_n))$$

$$\frac{k_n \varepsilon_0}{k_0 \varepsilon_n} = \alpha_n$$

Здесь $k_o = \sqrt{\varepsilon_o k_o^2 - \beta^2}$ – поперечная к оси компонента волнового вектора оптической волны в окружающей структуре среде; ε_o – диэлектрическая проницаемость внешней среды; R_n – радиус структуры.

Таким образом, для того, чтобы рассчитать электромагнитное поле в n -слойной цилиндрической структуре, необходимо последовательно решить n уравнений. Если же задача состоит в том, чтобы оптимизировать структуру относительно условий плазмонного резонанса, то к числу n неизвестных a_i ($i=1,2,\dots,n$) прибавится ещё одно – параметр оптимизации, в качестве которого можно выбрать ε_i , d_i ($i=1,2,\dots,n$) k_o или β . В этом случае необходимо решить систему уравнений, в которую входят уравнения для функции фазы на всех границах раздела сред и дисперсионное уравнение:

$$\left(\frac{k_n}{\varepsilon_n}\right) \operatorname{tg}(a_n) = -\left(\frac{k_o}{\varepsilon_o}\right) i$$

4. Численный расчет и обсуждение результатов

Полученные формулы аналитически объясняют природу плазмонного резонанса в металлических нанопроволоках, а именно – колоссальное усиление электромагнитных полей на границе металла и диэлектрика в резонансных условиях. Действительно, производная функции фазы по радиальной координате, определенная формулой (13), также может быть представлена выражением:

$$\frac{d}{dr}(\tilde{a}(r)) = \frac{d}{dr}(a(r)) \frac{\varepsilon(r)}{\varepsilon_1} (1 + (\alpha^2 - 1) \cos(a)^2)$$

где

$$\tilde{a}(r) = \operatorname{arctg}(\alpha(r) \operatorname{tg}(a(r))).$$

Таким образом, в диэлектрических частях кусочно-однородной среды производная фазы положительна ($\varepsilon(r)=\varepsilon_1$, $\alpha(r)=1$), а в металлических – отрицательна, из-за отрицательного знака и при этом большого модуля диэлектрической проницаемости металла. В статьях [5, 6] отмечена эта особенность скорости изменения фазы плазмонной волны в наноструктурах декартовой и сферической симметрии. Как и в названных случаях [5, 6], рассматривая металлические нанопроволоки, можно сделать вывод: фаза волны не возрастает, а убывает при распространении волны. Из это следует, что волна является обратной, а её фазовая и групповая скорости имеют различные направления. Следовательно, если радиальная компонента волнового вектора имеет большую мнимую часть, что характерно для поверхностного плазмо-

на, волна не затухает, а усиливается при распространении её в направлении от металлодиэлектрической границы вглубь металла и обратно к границе, и рассеянные на структуре электромагнитные поля сильно возрастают.

Формулу для напряженности магнитного поля на границе металла и диэлектрика можно записать следующим образом:

$$f(r) = \frac{\sin(2\tilde{a})}{r} = \frac{\sin(2a)}{r(1 + (\alpha^2 - 1) \cos(a)^2)}.$$

Становится ясным, что при выполнении резонансных условий, а именно, применении дисперсионного уравнения (14), что соответствует равенству нулю знаменателя выражения, определяющего функцию $f(r)$, электромагнитные поля в структуре на металлодиэлектрической границе неограниченно возрастают. Малое отклонение от условий резонанса приводит к существенному уменьшению напряженностей полей. Поэтому цилиндрические плазмонные структуры можно применять при конструировании сенсоров, и это свойство плазмонов на цилиндрической границе металла и диэлектрика хорошо демонстрируется выведенными в статье формулами. Их же удобно применять при расчете параметров сенсоров.

Используя уравнение (14), можно вычислить константу распространения плазмонной волны (волновой вектор плазмонов) β , соответствующую резонансным условиям, то есть решить задачу, рассмотренную в разделе 3 для двухкомпонентной среды с одной границей раздела сред-компонентов. При малой частоте и малом радиусе проволоки фаза $a(d)$ мала. В таком приближении выразим её значение через величину $k_1 d$:

$$a(d) = (\sqrt{3} - 1)k_1 d$$

Тогда структура дисперсионного уравнения (14) упрощается:

$$\left(\frac{k_2}{\varepsilon_2}\right) tg\left((\sqrt{3} - 1)k_1 d\right) + i\left(\frac{k_1}{\varepsilon_1}\right) = 0 \quad (15)$$

Это выражение близко к дисперсионному уравнению для двумерных плазмонов в трехслойной металлодиэлектрической среде со средним металлическим слоем толщиной d . Диэлектрическая проницаемость металла – ε_2 , диэлектрика – ε_1 . Поэтому, в подобие дисперсионной кривой в этих условиях, график зависимости волнового вектора от частоты плазмонов в металлической проволоке близок к дисперсионной зависимости для фотонов в диэлектрике:

$$\omega = (c\beta/\sqrt{\varepsilon_1}) \left(1 - (c\beta/\omega_{pl})^2 th^2(ia)/2 + \dots\right).$$

При больших значениях волнового вектора плазмонов β дисперсионные зависимости для одномерных и двумерных поверхностных плазмонов также близки. Максимальное значение частоты плазмонов в этих структурах:

$$\omega = \omega_{pl} / \sqrt{\epsilon_1 + 1} .$$

Такое же поведение дисперсионных кривых демонстрируют графики, построенные по традиционной формуле [3]. Они изображены на рисунке 1. Поверхностным плазмонам соответствует линия, лежащая ниже биссектрисы координатного угла, поскольку диэлектрическая проницаемость воздуха, принимаемого при расчете в качестве диэлектрика, равна 1. На рисунке 2 приведены дисперсионные кривые, рассчитанные по формуле (14) и выражению для фазы (13). Линии на рисунках 1 и 2 демонстрируют достаточно хорошее совпадение.

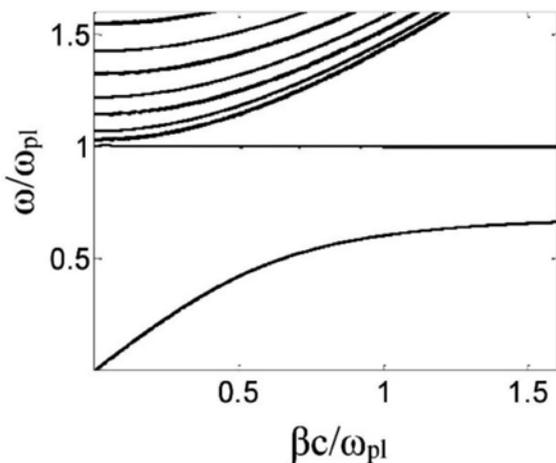


Рисунок 1. Дисперсионная кривая электромагнитной волны в металлической нанопроволоке с характеристиками: радиус металлической проволоки $d=0.2$ мкм, диэлектрическая проницаемость окружающей среды: $\epsilon_1=1$, плазменная частота металла $\omega_{pl}=9eV$. График построен по формуле, приведенной в [3].

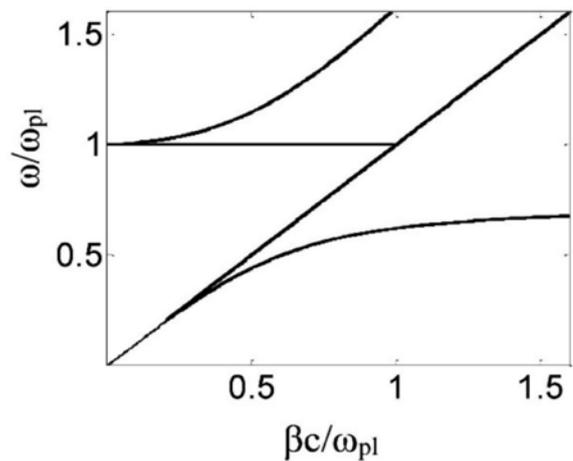


Рисунок 2. Дисперсионная кривая электромагнитной волны в металлической нанопроволоке с характеристиками: радиус металлической проволоки $d=0.2$ мкм, диэлектрическая проницаемость окружающей среды: $\epsilon_1=1$, плазменная частота металла $\omega_{pl}=9eV$. График построен по формулам (13-14).

Результат анализа, как формул, так и вида кривых, свидетельствует о том, что верхний предел частоты плазмонов для металлической проволоки, окруженной воздухом, равен: $\omega_{pl} / \sqrt{2}$. Диэлектрическая проницаемость металла рассчитывалась согласно результатам теории Друде [3]:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_{pl}}{\omega} \right)^2 .$$

В этом случае волновой вектор плазмонов не имеет мнимой части и возрастает при возрастании частоты. Характер кривых соответствует результатам классической теории А. Зоммерфельда [1, 3].

График дисперсионной зависимости плазмонов расположен на фазовой плоскости ниже дисперсионной кривой фотона в диэлектрике. Следовательно, частота плазмонов меньше частоты фотонов, если они соответствуют одинаковым волновым векторам, и резонансные частоты плазмонов в некотором диапазоне волновых векторов попадают не в оптический, а в терагерцовый диапазон. Плазменные волны (плазмоны) в двумерных электронных системах (на поверхностях раздела металла и диэлектрика) могут быть использованы для генерации, усиления, преобразования и детектирования терагерцового излучения, поскольку частоты плазменных резонансов находятся в терагерцовом диапазоне для субмикроволновых структур.

Если поперечные размеры сколько-нибудь протяженных металлических нанообъектов исчезающе малы (используется наноцилиндр или узкая нанополоска металла с квадратным поперечным сечением), то плазмоны на их границах описываются уравнением (15). Действительно, поперечный волновой вектор в параллелепипеде с квадратным сечением определяется в двух направлениях:

$$k_x = k_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 k_0^2 - \beta^2}{2}} \approx 0.7 \sqrt{\varepsilon_2 k_0^2 - \beta^2},$$

где β -волновой вектор плазмонов, ε_2 – диэлектрическая проницаемость металла.

В уравнении (15) коэффициент в тангенсе при функции фазы приблизительно равен 0.7. Общий вид дисперсионного уравнения для двух рассматриваемых структур имеет вид:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_2 k_0^2 - \beta^2}}{\varepsilon_2} \operatorname{tg} \left(0.7d \sqrt{\varepsilon_2 k_0^2 - \beta^2} \right) + i \frac{\sqrt{\varepsilon_1 k_0^2 - \beta^2}}{\varepsilon_1} = 0,$$

где ε_2 – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, d -поперечный размер структуры (радиус или длина стороны квадрата в сечении).

Таким образом, элементы теории металлдиэлектрических наноструктурированных сред цилиндрической симметрии, выведенные в настоящей статье, совпадают с алгоритмом расчета характеристик таких же сред плоскопараллельной симметрии. Конструировать материал с геометрически различающимися объектами можно одним способом. При этом он несет более конструктивный характер без привлечения в расчет специальных функций и позволяет предусматривать и аналитически рассчитывать свойства метаматериала уже на первых шагах алгоритма.

5. Выводы

В статье получено новое решение задачи математического описания распространения одномерных поверхностных плазмонов. В результате исследования выведены трансцендентное уравнение неявной зависимости фазы волны от координаты и уравнение, определяющее значение фазы волны на границе раздела сред «металл-диэлектрик». Результирующее уравнение содержит неизвестный волновой вектор поверхностных плазмонов. По функциональным характеристикам и асимптотикам результат близок к традиционному решению задачи об одномерных поверхностных плазмонах, полученному А. Зоммерфельдом. Новый результат в своей (актуальной) сфере применимости более удобен для расчета по сравнению с ранее принятым обращением к табулированному варианту. Данное преимущество особенно проявляется в случае, когда условия задачи включают в себя несколько границ раздела сред «металл-диэлектрик». Упрощение и доступность численной обработки этих формул облегчают решение задачи при очевидной общности математического выражения природы двумерных и одномерных поверхностных плазмон-поляритонов. При этом ключевые параметры традиционного и альтернативного решений, как и результаты их численного расчета, близки.

Литература

1. Sommerfeld A. Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen an einem zylindrischen// *Leiter Ann. der Physik und Chem.* 1899, Vol.67., P. 233-290.
2. Князев В.А., Кузьмин А.В. Поверхностные электромагнитные волны: от видимого диапазона до микроволн// *Вестник НГУ. Серия: физика.* 2007. 2 (1). С. 108-122.
3. Климов В.В. Наноплазмоника. М.: Физматлит 2009.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит 2003.
5. Seina N.V., Tumayev E.N. Propagation of electromagnetic waves in the Pendry lens// *Nanotechnologies In Russia.* 2016. Т. 11. № 7-8. С. 491-496.
6. Seina N.V., Tumayev E.N. Localized plasmon resonance// *Nanotechnologies In Russia,* 2017, Vol. 12, Nos. 5–6, Pp. 285–290

QUASI-ONE-DIMENSIONAL CYLINDRICAL SURFACE PLASMON-POLARITONS

N. V. Selina

Kuban state technological University

Received 08.07.2018

The direct (without using special functions) solution of Maxwell's equations for piecewise homogeneous medium with cylindrical symmetry is obtained. Was developed on the basis of a rational calculation method of the material, geometrical and dispersive characteristics of plasmon metal-dielectric cylindrical structure. Numerical calculation of the wave vector of plasmons using the obtained formulas confirmed the main theoretical and experimental results of studies of one-dimensional surface plasmons-polaritons. The solution is applicable to structures with an arbitrary number of metal-dielectric boundaries.

АКТУАЛЬНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПРОШЛЫХ ЛЕТ

Настоящим номером редакция журнала «Наноструктуры. Математическая физика и моделирование» открывает рубрику «Актуальные публикации прошлых лет». В рубрике будут перепечатываться некоторые избранные публикации различных изданий прошлых лет. В этом номере мы предлагаем вниманию читателей выдержки из книги Эрнеста Маха «Популярные лекции по физике». Книга впервые была издана в России в 1909 году в переводе Г.А. Котляра. В наши дни переиздание книги осуществило издательство НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» в 2001 году. (Мах Э. Популярная лекция по физике // НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск, 2001, 128 стр.). Издательство любезно разрешило нам выборочную перепечатку текстов, за что редакция журнала НМФМ выражает глубокую признательность.

Э. Мах

Популярные лекции по физике

Форма жидкости¹

Как ты полагаешь, любезный Эфтифрон, что есть святое, что справедливо и что есть добро? Свято ли святое потому, что боги это любят, или боги потому святы, что они любят святое? Такими и подобными им легкими вопросами мудрый Сократ сеял смуту в умных людях на рынках в Афинах, особенно смущал молодых государственных деятелей, которые кичились

¹ Лекция прочитанная, в немецком казино в Праге зимою 1868 года.

своими познаниями. Доказывая, как спутаны, неясны и полны противоречий их понятия, он освобождал их от бремени их мнимых познаний.

Вам знакома судьба этого мудреца, пристававшего ко всем со своими вопросами. Люди так называемого хорошего общества избегали встречи с ним и только люди несведущие продолжали ходить за ним. В конце концов ему пришлось выпить кубок яда, который и в настоящее время иному рецензенту его типа кое-кто, по меньшей мере, от души желает.

Но мы кое-чему научились от Сократа, кое-что нам осталось от него в наследие, это кое-что есть научная критика. Занимаясь наукой, всякий замечает, как неустойчивы и неопределенны понятия, знакомые ему из повседневной жизни, как при более тщательном рассмотрении вещей многие различия стираются и выступают новые. И постоянное видоизменение, развитие и выяснение понятий характеризует историю развития самой науки.

Общее рассмотрение этих неустойчивых понятий может становиться даже неприятным, внушить известное беспокойство, если принять в соображение, что нет ничего, что от этой неустойчивости было бы свободно. В настоящей лекции мы не будем, однако, останавливаться на этом общем явлении. Наша задача здесь другая: мы хотим на одном естественно-научном примере рассмотреть, в какой сильной степени изменяется вещь, если ее изучать все точнее и точнее, и как форма ее становится при этом все более и более определенной.

Большинство из вас полагает, вероятно, что они прекрасно знают, что такое жидкость и что – твердое тело. И именно тот, кого никогда не занимали вопросы физики, скажет, что ничего нет легче, как ответить на эти вопросы. Другое дело – физик: он знает. Это один из самых трудных вопросов физики и что провести границу между твердым и жидким вряд ли возможно. Напомню здесь только опыты Треска. Они показали, что твердые тела, подверженные высокому давлению, обнаруживают те же свойства, что и жидкости: они вытекают, например, в форме струи из отверстия в дне сосуда, в котором они находятся. Мнимое различие состояния, различие между «жидким» и «твердым» здесь сводится к простому различию в степени.

Исходя из сплюсненной формы Земли, принято обыкновенно делать тот вывод, что Земля некогда была в жидком состоянии. Но если принять в соображение факты, подобные только что приведенным, то этот вывод нельзя не признать слишком поспешным. Шар в несколько дюймов диаметром, вращаясь, будет сплющиваться, конечно, только тогда, когда он будет очень мягким, например, из свежеприготовленной глины, или даже жидким. Земля же должна быть раздавлена собственной своей огромной тяжестью, если бы она состояла даже из самых твердых камней, и потому не может не обнаруживать некоторые свойства жидкости. Да и горы наши не могут быть выше определенных границ, за пределами которых они не могут не осесть.

Возможно, что некогда земля была жидкой, но из того факта, что она теперь имеет сплюсненную форму, это никоим образом не следует.

Частицы жидкости чрезвычайно подвижны. Как вас учили в школе, они не имеют собственной формы, а принимают форму того сосуда, в котором они находятся. Приспосабливаясь до мельчайших деталей к форме сосуда, не обнаруживая даже на свободной поверхности своей ничего, кроме улыбающегося, зеркальногладкого, ничего не выражающего лица своего, она воплощает собой среди всех тел природы самый совершенный тип царедворца.

Жидкость не имеет собственной своей формы! Да, для того, кто бегло ее наблюдает. Но кому случалось заметить, что дождевая капля круглая и никогда не бывает с острыми краями, тот не станет уже столь безусловно верить в этот догмат.

О всяком человеке, даже наиболее бесхарактерном, вы могли бы сказать, что он *обладал* бы характером, если бы в нашем мире все не было так трудно. Так и жидкость имела бы собственную свою форму, если бы этому не мешал гнет обстоятельств, если бы она не раздавливалась собственной своей тяжестью.

Один досужий астроном рассчитал однажды, что на солнце люди не могли бы жить, даже если бы этому не мешала невыносимая жара: они там были бы раздавлены под тяжестью собственного своего тела, ибо большая масса мирового тела обуславливает большой вес человеческого тела на нем. На луне же, где мы были бы гораздо более легкими, мы могли бы одной силой наших мышц делать без труда огромные прыжки, чуть ли не в башню вышиной. Художественное изваяние из сиропа принадлежит и на луне к области вымыслов. Но там сироп так медленно разливается, что можно было бы, если не в серьез, то в шутку, устроить сиропную бабу, как мы у нас делаем снежную бабу.

Но если жидкость у нас на земле собственной своей формы не имеет, то, может быть, они имеют таковую на луне или на каком-либо другом мировом теле, еще меньшем и более легком? Чтобы познакомиться с собственной формой жидкости, нам остается только одно: устранить действие тяжести.

Эта мысль была вполне осуществлена в Генте ученым *Плато*. Он погружал одну жидкость (масло) в другую равного (удельного) веса, именно в смесь воды с винным спиртом. Согласно принципу *Архимеда*, масло теряет в этой жидкости весь свой вес, оно не падает уже вниз под собственной своей тяжестью, и силы, придающие маслу определенную форму, как бы слабы они ни были, имеют возможность свободно действовать.

И действительно, к нашему удивлению мы замечаем, что масло не разливается по смеси отдельным слоем и не образует бесформенной массы, а принимает форму прекрасного, вполне совершенного шара, свободно паря-

щего в смеси, подобно луне в мировом пространстве, так можно получить из масла шар в несколько дюймов диаметром.

Если в этот масляный шарик внести на проволоке небольшой диск и вращать проволоку между пальцами, то можно привести в движение весь шарик. При этом он немного сплющивается и можно даже добиться того, чтобы от него отделилось кольцо, подобно кольцу Сатурна. Кольцо это в конце концов разрывается и распадается на несколько небольших шариков, давая приблизительное представление о возникновении нашей планетной системы, согласно теории *Канта* и *Лапласа*.

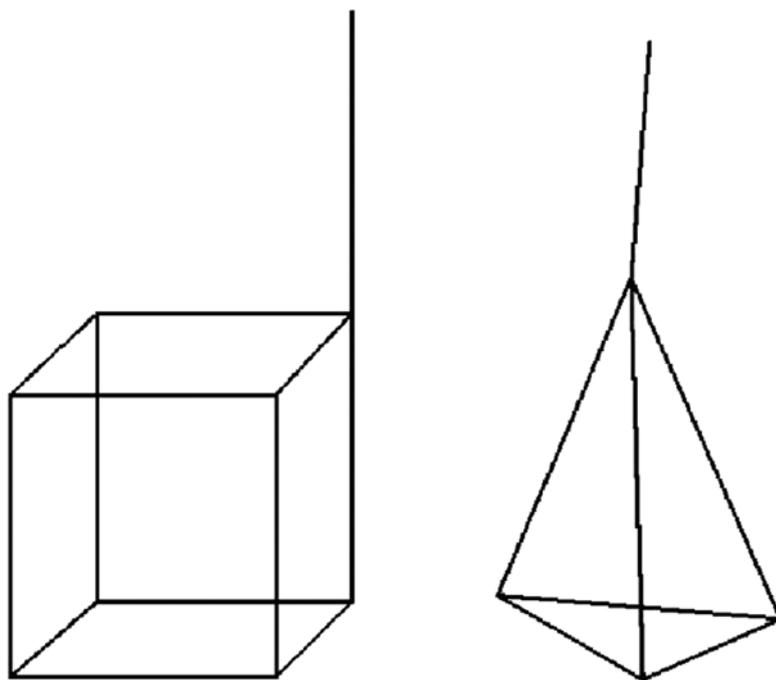


Рис. 1. Проволочные фигуры

Явления становятся еще более своеобразными, если помешать до известной степени действию формирующих сил жидкости, приведя в соприкосновение с ее поверхностью какое-нибудь твердое тело. Если, например, в масло погрузить проволочный остов куба, масло везде будет прилипать к проволоке. При достаточном количестве масла можно получить масляный куб с совершенно плоскими стенками. Если же масла слишком много или слишком мало, то стенки куба становятся выпуклыми или вогнутыми. Подобным же образом можно получить из масла самые разно-образные геометрические фигуры, трехгранную пирамиду или цилиндр; в последнем случае масло помещалось между проволочными кольцами.

Интересно, как изменяется форма жидкости, если из того куба или из пирамиды высасывать постепенно масло с помощью небольшой стеклянной трубочки. Проволока крепко удерживает масло. Фигура становится внутри все беднее и беднее маслом и в конце концов совершенно тонкой. Она состо-

ит, наконец, из нескольких тонких плоских пластинок, отходящих от ребра куба и сходящихся в середине его в небольшой капле масла. То же самое происходит и в пирамиде.

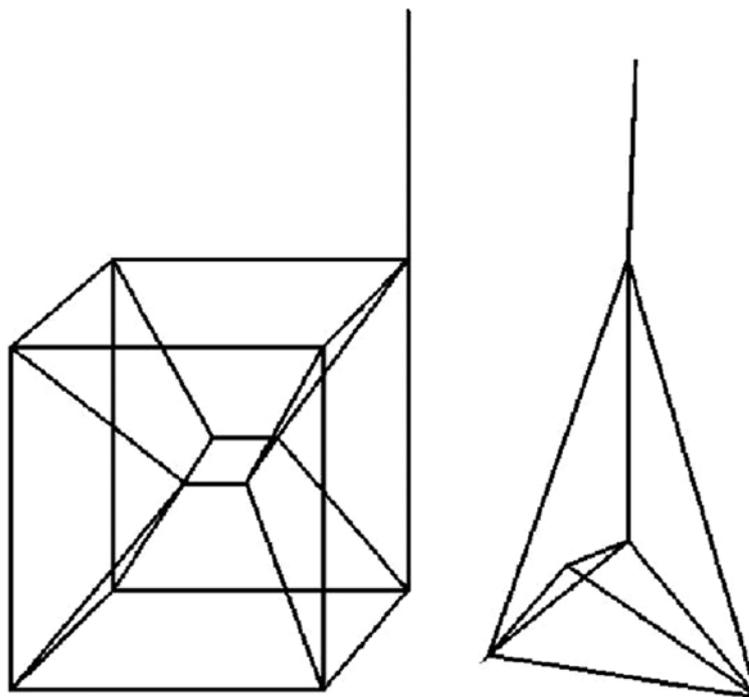


Рис. 2. Образовавшиеся фигуры

Здесь сама собой напрашивается мысль, что такая тонкая жидкая фигура, обладающая и весом весьма незначительным, не может уже быть раздавлена под его тяжестью, как не может быть раздавлен под тяжестью своего тела небольшой мягкий шарик из глины. Но в таком случае нам нет вовсе необходимости в смеси воды с винным спиртом для получения наших фигур, а мы можем получать их на открытом воздухе. И действительно, как нашел тот же Плато, можно получить такие тонкие фигуры или, по крайней мере, весьма сходные с ними просто на открытом воздухе. Для этого нужно только погрузить упомянутые проволочные фигуры на один момент в мыльный раствор. Опыт этот проделать нетрудно. Фигура образуется сама собой без всякого затруднения. На рисунке 2 изображены куб и пирамида, которые при этом получаются. В кубе от его ребра отходят тонкие полоски мыльной пленки к небольшой квадратной пленке в его середине. В пирамиде от каждого ребра по пленке к центру пирамиды.

Фигуры эти такие красивые, что трудно их точно описать. Их замечательная правильность и геометрическая точность приводят в замешательство всякого, кто видит их в первый раз. К сожалению, они только недолговечны. Они лопаются, высыхая на воздухе, показав нам предварительно самую блестящую игру красок, столь характерную вообще для мыльных пузырей.

Отчасти ради красоты фигуры, отчасти ради более точного их исследования возникает желание закрепить их форму. Достигается это очень просто. Вместо мыльного раствора погружают для этого проволочную стенку в расплавленную чистую канифоль или клей. Как только мы извлекаем ее оттуда, фигура сейчас же образуется и застывает на воздухе.

Следует заметить, что и массивные жидкие фигуры могут быть получены на открытом воздухе, если только сделать их достаточно малого веса, т. е. если воспользоваться для этого достаточно малыми проволочными сетками. Если приготовить себе, например, из очень тонкой проволоки остов кубика, ребро которого имело бы в длину не более 3 мм, то стоит погрузить таковой просто в воду, чтобы получить массивный небольшой водяной кубик. При помощи кусочка пропускной бумаги нетрудно удалить излишнюю воду и сделать стенки кубика более ровными.

Есть еще и другой, более простой способ наблюдать фигуры из жидкости. Капелька воды, помещенная на покрытой жиром стеклянной пластинке, если она достаточно мала, не расплывается, а только несколько сплющивается под действием своего веса, которым она придавливается к подставке. Сплющивание это тем меньше, чем меньше капля. Далее, чем меньше капля, тем более она приближается к форме шарика. Наоборот, капля, висящая на палочке, под действием своего веса удлинится. Нижние части капли, прилегающие к подставке, придавливаются к ней, верхние части придавливаются к нижним, потому что последние не могут переместиться и уступить им место. Если же капля падает свободно, то все части ее движутся с равной скоростью, ни одна не мешает другой, а потому и ни одна не давит на другую. Свободно падающие капли не испытывают, следовательно, действия собственной своей тяжести, она как бы не имеет тяжести и принимает форму шара.

Обозревая все фигуры из мыльной пленки, которые могут быть получены с помощью различных проволочных стоек, мы можем констатировать большое разнообразие их. Последнее не может, однако, скрыть от нас их общие черты.

«Alle Gestalten sind ähnlich, und keine gleicht der anderen; Und so deutet das Chor auf ein geheimes Gesetz.»²

Плато открыл этот тайный закон. Он может быть кратко выражен в следующих двух положениях:

1. Если в фигуре встречается несколько плоских пленок жидкости, то их всегда бывает числом три, а каждая пара их образует почти равные углы.

2. Если в фигуре из жидкости встречаются между собой несколько ребер, то их всегда бывает числом четыре, и каждая пара их образует почти равные углы.

² «Все формы подобны, но ни одна не равна другой; и Хор толкует это, как про явления тайного закона».

Перед нами два довольно странных параграфа непоколебимого закона, основание которого нам трудно понять. Но то же самое приходится часто наблюдать и в других законах. Не всегда удается по редакции закона узнать разумные мотивы законодателя. В действительности же нетрудно свести наши два параграфа к весьма простым основаниям. Если они выполнены в точности, то дело сводится к тому, чтобы поверхность жидкости имела наименьшие, возможные при данных условиях размеры.

Представим себе, что какой-нибудь очень интеллигентный, знакомый со всеми приемами высшей математики портной поставил себе задачу покрыть проволочный остов куба какой-нибудь тканью так, чтоб каждый кусок ее примыкал к проволоке и был так же в связи со всей тканью. Допустим, что, совершая эту работу, он руководствуется еще побочным намерением возможно больше ткани сберечь. Он мог бы получить тогда одну только фигуру, именно ту, которая образуется сама собой из мыльного раствора на проволочной сетке. При образовании фигур из жидкости природа следует принципу этого алчного портного и совершенно не заботится о фасоне. Но странно: при этом сам собой получается самый прекрасный фасон!

Приведенные нами выше два параграфа имеют силу только для мыльных фигур. К массивным фигурам из масла они, само собой разумеется, применены быть не могут. Но тот принцип, что поверхность жидкости должна быть при этом наименьшей, возможной при данных условиях, относится ко всем фигурам из жидкости. Если человек знаком не только с буквой закона, но и с мотивами его, он разберется и в тех случаях, к которым буква закона не совсем уж удачно подходит. И так именно обстоит дело с принципом наименьшей поверхности. Им можно руководствоваться везде, даже там, где приведенные выше два параграфа не годятся более.

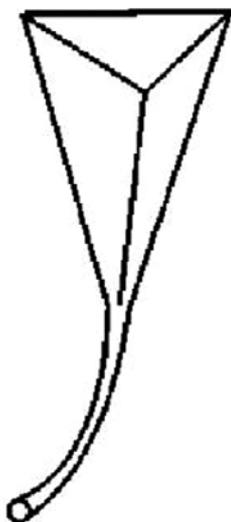


Рис. 3. Трубочка

Нам нужно теперь, следовательно, прежде всего наглядно показать, что фигуры из жидкости образуются по принципу наименьшей поверхности. В нашей проволочной пирамиде масло в смеси воды с винным спиртом прилипает к ребрам пирамиды, от которых оно отстать не может, и данное количество масла стремится принять такую форму, чтобы поверхность ее оказалась при этом возможно меньшей. Попробуем воспроизвести все эти соотношения! Мы покрываем проволочную пирамиду каучуковой пленкой и проволочную ручку заменяем трубкой, ведущей во внутрь замкнутые каучуковые пространства. Через эту трубочку мы легко можем вдуть и высасывать воздух. Данное количество воздуха представляется нам количеством масла, а натянутый каучуковый покров, обнаруживающий стремление к возможно большему сжатию и прилипающий к проволоке, представляет нам стремящуюся к уменьшению поверхность масла. И, действительно, вдывая и высасывая воздух, мы можем получить все прежние пирамиды, со стенками от самых выпуклых до самых вогнутых. Наконец, высосав весь воздух, мы получаем нашу мыльную фигуру. Каучуковые листочки совсем совпадают, становятся совершенно плоскими и четыремя острыми ребрами сходятся в центре пирамиды.

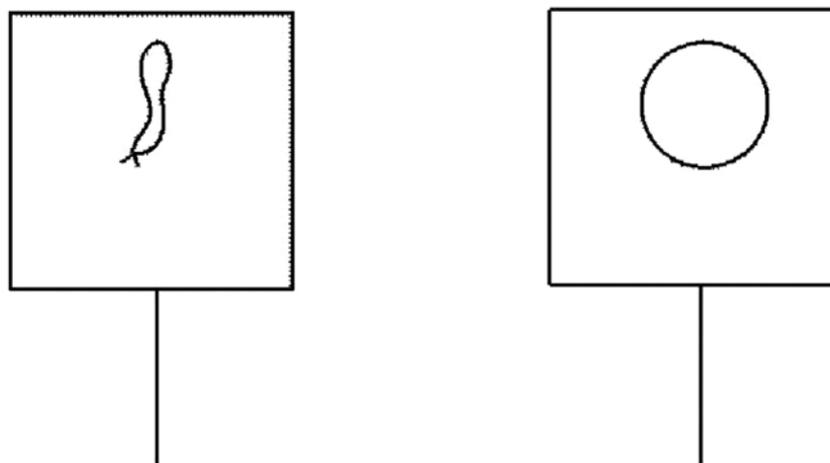


Рис. 4. Опыт с мыльной водой

На мыльных пленках это стремление к уменьшению, как показал Van der Mensbrugghe, может быть доказано непосредственно. Если в мыльный раствор погрузить проволочный квадрат с ручкой, то на нем образуется красивая плоская мыльная пленка. Положим на нее тонкую (шелковую) нитку, концы которой связаны. Если пробить жидкость, замкнутую ниткой, мы получим мыльную пленку с круглым отверстием, границы которого образуются ниткой, пленку, напоминающую плитку в кухне. Так как остаток пленки стремится к наивозможному уменьшению, то отверстие становится наибольшим, возможным при данной длине нитки, что достигается только в случае круглого отверстия.

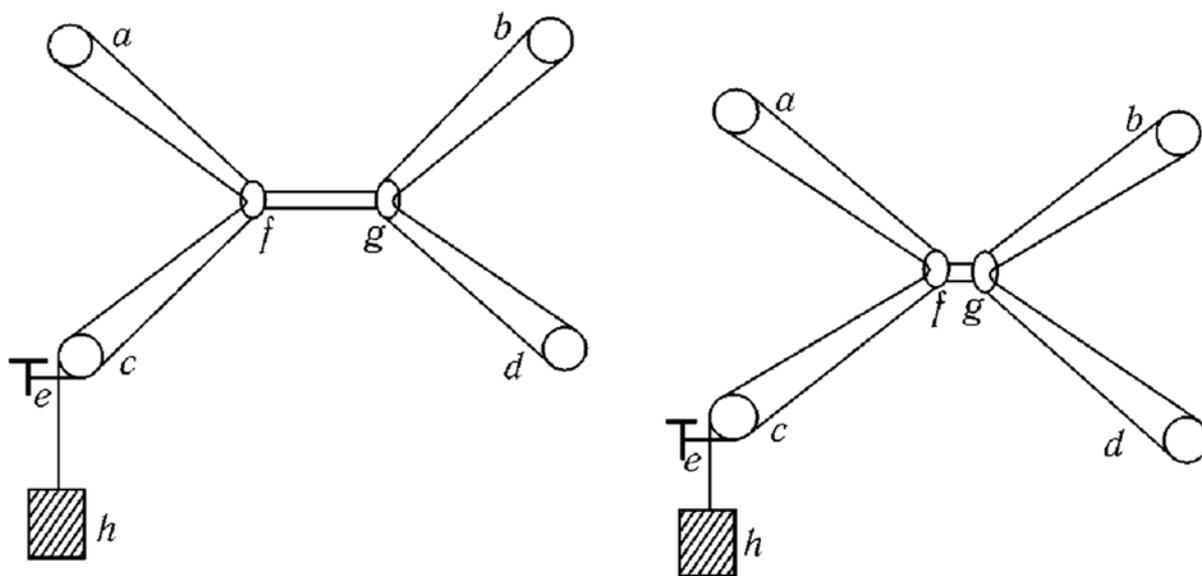


Рис. 5. Опыт с грузами

И свободная от действия тяжести масса масла тоже принимает форму шара на основании принципа наименьшей поверхности. Шар есть форма наименьшей поверхности при наибольшем объеме. Принимает же и дорожный сак тем больше форму шара, чем больше мы его наполняем.

Каким образом этот принцип наименьшей поверхности может привести к двум нашим странным параграфам? Выясним это на одном более простом примере. Пусть гладкая нитка, прикрепленная к гвоздю e , охватывает четыре неподвижных блока $a b c d$ и, пройдя через два подвижных кольца $f g$, носит на втором своем конце груз h .

Этот груз имеет одно только стремление – падать вниз, следовательно, часть нитки $e h$ возможно больше удлинить и, следовательно, остальную ее часть возможно укоротить. Нить должна остаться в связи с блоками и через кольца часть ее должна остаться в связи между собой. Условия здесь, следовательно, те же, что и в фигурах из жидкости, а потому и результат здесь получается подобный же. Если сталкиваются четыре пары шнурков, как это показано на фигуре справа, то на этом дело не кончается. Вследствие стремления нитки к сокращению кольца расходятся и притом так, что теперь везде сходятся три пары шнурков и между каждой парой образуются равные углы (в 120°). И действительно, именно при таком расположении достигается наибольшее сокращение нити, что может быть доказано с помощью элементарной геометрии.

Отсюда мы можем до некоторой степени понять образование прекрасных и сложных фигур вследствие одного стремления жидкости к наименьшей поверхности. Но тут возникает новый вопрос: почему же жидкости стремятся к наименьшей поверхности?

Частицы жидкости прилипают друг к другу. Капли, приведенные в соприкосновение друг с другом, сливаются. Мы можем сказать, что частицы в жидкости притягиваются друг к другу. Затем они стремятся по возможности приблизиться друг к другу. Части, находящиеся на поверхности, будут стремиться по возможности проникнуть внутрь массы жидкости. Этот процесс может завершиться только тогда, когда поверхность ее станет настолько малой, насколько это возможно при данных условиях, когда на поверхности останется возможно меньше частичек, когда внутрь ее массы проникнет возможно больше частичек, когда силам притяжения ничего более делать не останется³.

Таким образом суть принципа наименьшей поверхности, который на первый взгляд представляется принципом довольно невинного значения, сводится к другому еще более простому принципу, который можно наглядно выразить следующим образом. Силы притяжения и отталкивания природы мы можем рассматривать как ее намерения. То внутреннее давление, которое мы чувствуем до совершения какого-нибудь действия и которое мы называем намерением, в конце концов не так уж сильно отличается по существу своему от давления камня на свою подставку или от влияния одного магнита на другой, чтобы нельзя было к тем и другим явлениям, по крайней мере в известном отношении, применить одно и то же название. Итак, природа имеет намерение приблизить железо к магниту, камень к центру земли и т. д. Когда такое намерение может быть осуществлено, оно осуществляется. Но без всяких намерений природа не делает ничего. В этом отношении она поступает вполне так, как какой-нибудь хороший делец.

Природа стремится опустить грузы возможно ниже. Мы можем поднять груз, если заставим опуститься вниз другой, больший груз, и если удовлетворим другое, более сильное намерение природы. Если же нам кажется, что мы хитро пользуемся природой, то при ближайшем рассмотрении дело оказывается совсем иначе: оказывается, всегда, что именно она воспользовалась нами, чтобы осуществить свои намерения.

Равновесие, покой существуют лишь тогда, когда природа не может достичь ни одной из своих целей, когда силы ее удовлетворены настолько, насколько это возможно при данных условиях. Так, например, тяжелые тела находятся в равновесии, когда так называемый центр тяжести их находится возможно ниже или, когда возможно ниже опускается столько груза, сколько было возможно при данных условиях.

Трудно отказаться от мысли, что этот принцип сохраняет свое значение и за пределами области так называемой неживой природы. И в государстве

³ Такие задачи на максимум или минимум играют большую роль во всех почти хорошо разработанных частях физики.

равновесие существует тогда, когда намерения партии удовлетворены настолько, насколько это возможно в данный момент, или – как это можно было бы выразиться, шутя на языке физики – когда социальная потенциальная энергия достигает минимума⁴.

Вы видите, наш принцип купца-скопидома богат последствиями. Результат самого трезвого исследования, он стал для физики столь же плодотворным, как сухие вопросы Сократа для науки вообще. Если этот принцип кажется слишком мало идеальным, то зато тем идеальнее его плоды.

И почему бы науке стыдиться такого принципа? Что она сама такое? Дело – и больше ничего!⁵ Ставит же она своей задачей – при возможно меньшей затрате труда, в возможно более короткое время, с возможно меньшим даже запасом идей достичь возможно большего в деле познания вечной, бесконечной истины.

О скорости света⁶

Когда перед судьей стоит ловкий мошенник, прекрасно умеющий изворачиваться и лгать, то главной задачей первого является вытянуть у второго сознание парой-другой ловко поставленных вопросов. Почти в подобном же положении находится как будто и естествоиспытатель перед лицом природы. Правда, он чувствует себя в данном случае не столько как судья, сколько как шпион, но цель остается одной и той же. В тайных своих мотивах и законах, по которым совершаются в ней явления, – вот в чем должна сознаться природа. Узнает ли он что-нибудь или нет, зависит от хитрости исследователя. Не без основания, поэтому, *Бекон Веруламский* назвал экспериментальный метод допросом, учиненным природе. Все искусство заключается в том, чтобы так поставить вопросы, чтобы они не могли быть оставлены без ответа, без нарушения приличий.

Посмотрите-ка еще на многочисленные инструменты и аппараты, во всеоружии которых исследователь приступает к допросу природы и которые делают будто смешными слова поэта: «Что она тебе открыть не может, то ты не выудишь у нее никакими рычагами и винтами». Рассмотрите эти аппараты, и аналогия с орудием пытки будет напрашивается сама собой.

Воззрение на природу, как на нечто намеренно от нас скрытое, разоблачение чего возможно только при помощи насильственных и недобросовестных средств, было некоторым древним мыслителям более близко, чем нам. Один греческий философ, говоря о естествознании своего времени, выска-

⁴ Сходные с этим рассуждения см. Quetelet, «du systeme sociale»

⁵ Сама наука может рассматриваться, как задача на максимум и минимум, подобно торговому делу купца. Да и вообще вовсе не так уже велика разница между духовной деятельностью научного исследователя и деятельностью повседневной жизни, как это обыкновенно себе представляют.

⁶ Лекция, прочитанная в Граце в 1866 году.

зал мнение, что богам может быть только неприятно, когда люди пытаются узнать то, чего они открывать им не желают⁷. Правда, с этим соглашаются далеко не все его современники. Следы этого воззрения можно найти и в современное время. В общем и целом, однако, мы в настоящее время не так уж ограничены. Мы верим уже, будто природа намеренно от нас скрывается. Из истории науки мы знаем уже, что иногда вопросы наши были бессмысленно поставлены, так что и не могло быть на них никакого ответа. Более того, мы скоро увидим, что и сам человек со всем своим мышлением, со всеми своими исследованиями есть ничто иное, как часть все той же жизни природы.

Но будете ли вы смотреть на инструменты физики, как на орудие пытки или орудие ласки, как вам больше понравится, во всяком случае вам будет же интересно познакомиться с частицей истории этих орудий, во всяком случае не будет же вам неприятно узнать, какие своеобразные затруднения привели к столь странным формам этих аппаратов.

Галилей (род. в 1564 г. в Пизе, ум. в 1642 г. в Арчетри) первый задался вопросом, как велика скорость света, т. е. в течение какого времени появившийся в каком-нибудь месте свет становится видимым на другом месте, отстоящем от первого на определенном расстоянии?⁸



Рис . 6

Метод, придуманный *Галилеем* для решения этого вопроса, был столь же прост, как и естественен. Два опытных наблюдателя, снабженных потайными фонарями, были помещены в ночное время на значительном расстоянии друг от друга, один в А, другой в В. Первый должен был в определенное время открыть свой фонарь. Второй должен был сделать то же самое, как только заметит свет первого. Ясно, что время, прошедшее от момента, в который человек в А открывает свой фонарь, до момента, в который он видит свет второго фонаря, и есть то время, которое нужно свету, чтобы пройти из А в В и обратно из В в А. Этот опыт не был осуществлен никогда, да и не мог, как это скоро понял сам *Галилеи*, увенчаться успехом.

Как мы знаем уже в настоящее время, свет распространяется слишком быстро, чтобы можно было его таким образом наблюдать. Время, прошедшее от прибытия света в В до восприятия его наблюдателем, время между решением открыть фонарь и исполнением этого решения, как мы теперь знаем, несравненно больше, чем время, нужное свету для прохождения земных расстояний. Как велика скорость света, мы убедимся из того, что молния в

⁷ Ксенофонт (Memorabil. IV. 7)

⁸ Galilei, Discorsi e dimonstrazione mathematiche. Leyden. 1638. Dialogo primo.

темную ночь освещает сразу огромную площадь, тогда как удары грома, отдающиеся эхом один за другим в различных местах, доходят до уха наблюдателя в заметные промежутки времени.

Таким образом, старания Галилея определить скорость света не привели в его время ни к чему. Тем не менее дальнейшая история измерения скорости света тесно связана с его именем, потому что он с помощью устроенного им телескопа открыл четыре спутника Юпитера, а эти последние и стали средством для того, чтобы определить искомую скорость.

Земные пространства были слишком малы для опыта *Галилея*. Определение оказалось удачным только после того, как обратились за помощью к пространствам нашей планетной системы.

Это удалось сделать *Олофу Ремеру* (род. в Аар гусе в 1644 г., ум. в Копенгагене в 1710 г.) в 1675-1676 гг. Вместе с *Кассинион* делал наблюдения в Парижской обсерватории над обращением спутников Юпитера.

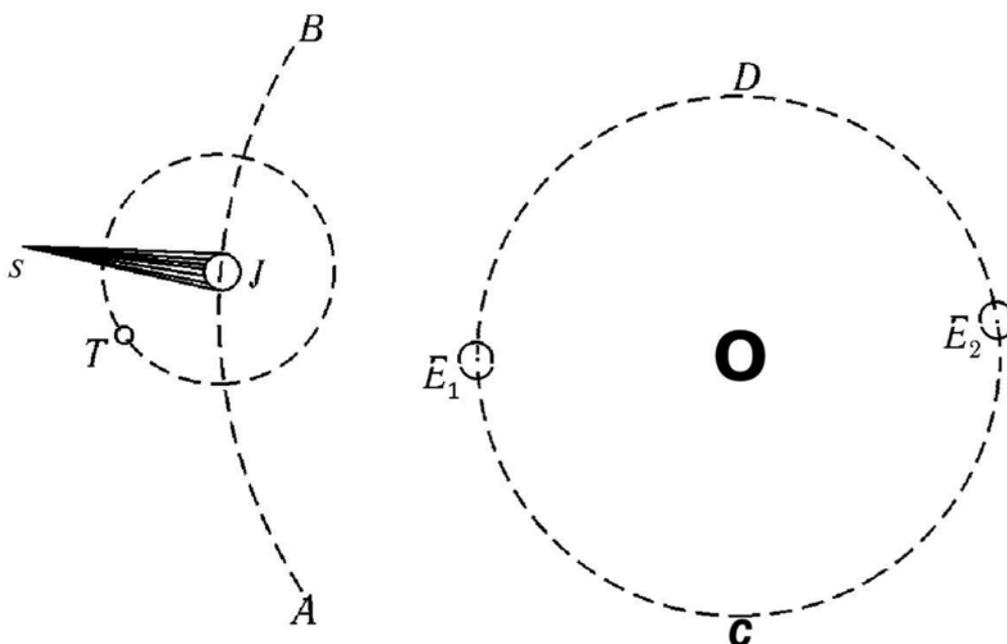


Рис. 7 Опыт Ремера

Пусть линия AB есть путь Юпитера. Пусть S есть Солнце, E – Земля, J – Юпитер и T – его первый спутник. Когда Земля находится в E_1 , мы видим, как спутник вступает в тень Юпитера, и на основании этого периодического затмения мы можем вычислить время его обращения вокруг Юпитера. *Ремер* определил его в 42 часа 27 минут и 33 секунды. Когда же Земля, двигаясь по своей орбите и пройдя точку C , приходит в E_2 , то кажется, что время обращения спутника удлиняется, затмения наступают несколько позже. Когда Земля находится в E_2 затмение опаздывает на 16 минут 26 секунд. Когда Земля проходит через D снова в E_1 , обращение спутника становится

как будто опять быстрее, и когда Земля достигает точки T_1 , то оно становится таким же, как и раньше. Нужно заметить при этом, что за то время, пока Земля сделает полный оборот вокруг Солнца, Юпитер успеет пройти очень небольшую часть своего пути. *Ремер* тотчас же догадался, что эти периодические изменения времени обращения могут быть не действительными, а только кажущимися, стоящими в связи со скоростью света.

Уясним себе это явление наглядным образом. Предположим, что правильно приходящая почта приносит нам известия о политических событиях в каком-либо городе. Как бы далеко от этого города мы не находились, мы узнаем о каждом событии, правда, позже, но *одинаково* поздно обо всех. События совершаются для нас с той же быстротой, как и в действительности. Но если мы находимся в пути и удаляемся от этого города, то всякое новое известие должно приходить к нам позже, и события кажутся нам совершающимися медленнее, чем на самом деле. Обратное произойдет, если мы будем приближаться к городу.

Пока мы остаемся в покое, мы слышим какое-нибудь музыкальное произведение в одном и том же темпе, на каком расстоянии мы бы не находились. Этот темп должен казаться нам быстрее, когда мы быстро приближаемся к тому месту, где играет оркестр; он должен замедляться, когда мы быстро удаляемся от этого места.

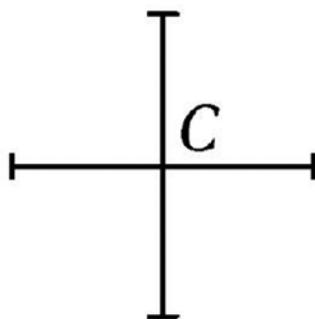


Рис. 8 Крест

Представьте себе крест (рисунок 8), равномерно вращающийся вокруг своего центра, например, крылья ветряной мельницы. Этот крест представляется вам вращающимся медленнее, когда вы очень быстро удаляетесь от него. Свет, который в данном случае играет роль почты, приносящий вам известия о положении креста, должен в каждый последующий момент проходить все большее и большее расстояние.

То же самое должно происходить и при вращении спутника Юпитера. Наибольшее запаздывание затмения в то время, как

Земля переходит из E_1 в E_2 и удаляется, следовательно, от Юпитера на расстояние своей орбиты, соответствует, очевидно, тому времени, в которое свет проходит этот диаметр. Диаметр этот известен, запаздывание тоже. От-

сюда легко вычислить скорость света, т. е. путь, проходимый светом в одну секунду. Он составляет 42 000 географических миль или 300 000 километров.

Этот метод сходен с методом *Галилея*. Средства здесь только лучше выбраны. Вместо того небольшого расстояния мы пользуемся диаметром земной орбиты (41 миллион миль); роль фонаря, который то закрывается, то открывается, играет спутник Юпитера, который то затмевается, то снова показывается. Таким образом, *Галилею* не удалось выполнить своего измерения, но фонарь, при помощи которого оно было выполнено, открыт им.

Это прекрасное открытие вскоре перестало удовлетворять физиков. Искали более удобные способы, чтобы измерить скорость света на земле. Это можно было сделать после того, как стали известны сопряженные с этим трудности. Физо (род. в 1819 г. в Париже) произвел такие измерения в 1849 г.



Рис. 9 Опыт Физо

Попробую объяснить вам сущность аппарата *Физо*. Пусть *S* обозначает диск, снабженный у краев отверстиями и вращающийся около своего центра. Пусть *L* есть источник света, посылающий свои лучи на непокрытом ничем стеклянную пластинку *A*, наклоненную к оси диска под углом в 45° . Луч света отражается в этой пластинке, проходит через одно из отверстий в диске и падает перпендикулярно на зеркало *B*, помещенное, допустим, на расстоянии одной мили от *S*. От зеркала *B* луч отражается, снова проходит через одно из отверстий диска, отражается от стеклянной пластинки и попадает в глаз наблюдателю *O*. Таким образом, глаз видит через стеклянную пластинку и отверстие в диске пламя *L*, отраженное в зеркале *B*.

Если мы будем вращать диск, то отверстия его будут постоянно сменяться промежутками между ними, и наблюдатель будет видеть отражения света в зеркале *B* с перерывами. Если быстро вращать диск, перерывы эти становятся незаметны для глаза и наблюдатель снова видит зеркало *B* равномерно освещенным.

Все это происходит только в случае не очень большой скорости враще-

ния диска, а именно, если свет, дойдя через отверстие диска до зеркала B и отразившись обратно, находит отверстие почти в том же положении и проходит сквозь него второй раз. Теперь представьте себе, что скорость эта настолько возросла, что луч, отразившись от зеркала и вернувшись к диску, находит вместо отверстия промежуток. Очевидно, что он тогда достичь глаза не может. Зеркало B видно только в том случае, когда до него доходит свет. Когда же свет от него отходит к глазу, оно оказывается закрытым. Вследствие этого зеркало всегда будет казаться темным.

Если еще более увеличить скорость вращения, то луч света, вернувшись от зеркала, мог бы попасть если не в тоже самое отверстие, то в соседние, и таким образом достичь глаза.

Следовательно, при постоянно и непрерывно увеличиваемой скорости вращения зеркало B являлось бы попеременно то светлым, то темным. Ясно, что если число отверстий в диске, число оборотов его в секунду и путь SB известны, то можно вычислить скорость света. Результат этого вычисления совпадает с тем, который был получен *Ремером*.

Дело, впрочем, обстоит не так просто, как я это изобразил. Нужно принять меры, чтобы свет проходил путь SB не рассеиваясь. Это достигается с помощью труб.

Если мы присмотримся ближе к аппарату *Физо*, то мы найдем в нем что-то знакомое: ту самую диспозицию, которая предполагалась и в опыте *Галилея* — L заменяет собой фонарь A , вращающийся диск с отверстиями регулярно закрывает и открывает его. Вместо неловкого наблюдателя B мы находим зеркало B , которое становится светящимся уж несомненно в тот самый момент, когда до него свет от S . Диск S , то пропуская, то не пропуская сквозь себя возвращающиеся лучи света, оказывает помощь наблюдателю O . Опыт *Галилея* здесь, так сказать, повторяется громадное число раз в секунду и суммарный результат его может быть действительно наблюдаем. Если бы я позволил себе применить к этой области теорию Дарвина, я сказал бы, что аппарат *Физо* ведет свое происхождение от фонаря *Галилея*.

Еще более остроумным методом для измерения скорости света воспользовался *Фуко*, но описание его здесь завело нас слишком далеко.

Измерение скорости света удастся произвести и по методу *Галилея*. Здесь, следовательно, не приходилось уже ломать голову над отысканием лучшего метода. Но мысль, вызванная к жизни необходимостью, нашла себе применение и в этой области.

Кениг в Париже устроил аппарат для измерения скорости звука, напоминающий метод *Физо*. Устройство его очень несложно. Он состоит из двух электрических приборов, отбивающих вполне одновременно десятые доли секунды. Если оба прибора поставить рядом, то где бы мы не стояли, удары их будут слышны одновременно. Но если один из них мы поставим рядом

с собой, а другой отнесем на значительное расстояние, то в общем совпадение ударов уже наблюдаться не будет. Соответственные удары второго прибора будут достигать нашего уха позднее. Первый удар его будет следовать непосредственно за первым ударом прибора, около которого мы стоим и т. д. Делая расстояние между приборами еще больше, можно достичь того, что снова наступит совпадение ударов. Первый удар одного будет совпадать со вторым ударом другого, второй с третьим и т. д. Ясно, что если приборы отбивают десятые доли секунд и если мы знаем расстояние, на которое они должны быть удалены друг от друга, чтобы наступило первое совпадение ударов, мы знаем путь, который проходит звук за одну десятую долю секунды.

Перед нами здесь явление, встречающееся довольно часто. Какая-нибудь мысль с великим трудом развивается в течение столетий, но, раз развившись, она становится, так сказать, весьма плодотворной. Она проникает повсюду, не исключая и таких голов, в которых она никогда развиваться не могла бы. Она становится прямо неискоренимой.

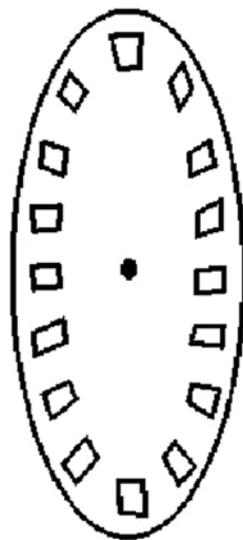


Рис. 10 Зеркало

Определение скорости света – не единственный случай, в котором непосредственное восприятие наших чувств становится слишком медлительным и неповоротливым. Самое обычное средство для изучения слишком быстрых процессов непосредственным наблюдением заключается в том, что устанавливается взаимодействие между процессами, подлежащими исследованию, и другими процессами, которые нам уже знакомы и поддаются сравнению с теми в отношении своей скорости. Результат в большинстве случаев получается весьма наглядный и дает возможность делать заключения о том, как происходят неизвестные пока процессы.

Скорость распространения электричества определить непосредствен-

ным наблюдением невозможно. Но *Уитстон* попытался определить ее, наблюдая электрическую искру в зеркале, вращающемся с огромной, но известной скоростью.

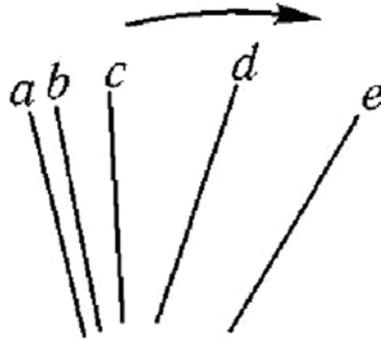


Рис. 11 Стрежни

Когда мы размахиваем взад и вперед каким-нибудь стержнем, то одного непосредственного наблюдения недостаточно, чтобы определить, какой скоростью он обладает в каждой точке своего пути. Но будем рассматривать наш стержень сквозь отверстия, расположенные по краям быстро вращающегося диска. Мы видим тогда движущийся стержень только в определенных положениях, когда отверстие проходит перед нашим глазом.

Отдельные образы стержня остаются на некоторое время в глазу. Нам кажется, что мы видим несколько стержней (см. рисунок 11). Если отверстия в диске расположены на равном расстоянии друг от друга и диск вращается равномерно, то мы ясно видим, что от *a* до *b* наш стержень движется медленно, от *b* до *c* быстрее, от *c* до *d* еще быстрее и всего быстрее от *d* до *e*.

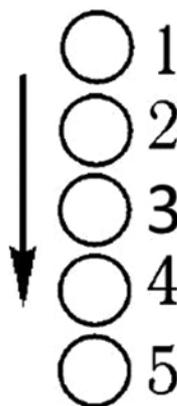


Рис. 12 Смещение отверстий

Водяная струя, вытекающая из какого-нибудь сосуда, кажется совершенно спокойной и равномерной. Если же, однако, ее мгновенно осветить в темноте электрической искрой, то мы видим, что струя состоит из отдельных капель. Так как они капают быстро, то отдельные образы их сливаются и

струя представляется непрерывной. Рассмотрим эту струю через вращающийся диск. Заставим этот диск вращаться с такой быстротой, чтобы в то время, когда второе отверстие встанет на место первого, и первая капля становилась на место второй, вторая на место третьей и т. д. Мы увидим тогда капли все на одном и том же месте. Струя будет представляться неподвижной. Если же мы станем вращать наш диск несколько медленнее, то в то время, когда второе отверстие станет на место первого, первая капля упадет несколько ниже второй, вторая несколько ниже третьей и т. д. Через каждое последующее отверстие мы будем видеть каплю несколько ниже. Будет казаться, что струя медленно течет вниз.

Но начнем вертеть диск быстрее. В этом случае, пока второе отверстие станет на место первого, первая капля еще может не дойти до второго места, и мы найдем ее несколько выше, вторую несколько выше третьей и т. д. Через каждое последующее отверстие мы увидим каплю несколько выше. Получится такой вид, будто бы струя течет вверх, будто капли поднимаются из нижнего сосуда в верхний.

Вы видите, как физика становится все более и более страшной. Скоро настанет момент, когда физика будет в состоянии играть роль рака в Моринском озере, в столь ужасных чертах описанную поэтом *Копишом* в следующем стихотворении.

Der grosse Krebs im Mohriner See

Von Kopisch

Die Stadt Mohrin hat minin' acht,
Guckt in den See bei Tag und Nacht:
Kein gutes Christenkind erlebt's,
Dass los sich reisst der grosse Krebs!
Er ist im See mit Ketten geschlossen unten an,
Weil er dem danzen Lande Verderben bringen kann!
Man sagt: er ist viel Meilen gross
Und wend't sich oft, und kommt er los,
So wahr't's nicht lang, er kommt ans Land,
Ihm leistet keiner Widerstand:
Und weil das Riickwartsgehen bei Krebsen alter Brauch,
So muss dann alles mit ihm zurucke gehen auch.
Das wird ein Riickwartsgehen sein!
Steckt einer was ins Maul hinein,
So kehrt der Bissen, vor dem Kopf,
Zuriick zum Teller und zum Topf!
Das Brot wird wieder zu Mehle, das Mehl wird wieder zu Korn –

Und alles hat beim Gehen den Riicken dann von vorn.
 Der Balken lost sich aus dem Haus
 Und rauscht als Baum zum Wald hinaus;
 Der Baum kriecht wieder in den Keim,
 Der Ziegelstein wird wieder Leim,
 Der Ochse wird zum Kalbe, das Kalb geht nach der Kuh,
 Die Kuh wird auch zum Kalbe, so geht es immer zu!
 Zur Blume kehrt zuriick das Wachs,
 Das Hemd am Leibe wird zu Flachs,
 Der Flachs wird wieder blauer Lein
 Und kriecht dann in den Acker ein.
 Man sagt beim Burgermeister zuerst die Not beginnt,
 Der wird vor alien Leuten zuerst ein Pappelkind.
 Dann muss der edle Rat daran,
 Der wohlgewitzte Schreiber dann;
 Die erbgesses'ne Burgerschaft
 Verliert gemach die Biirgerkraft.
 Der Rektor in der Schule wird wie ein Schulerlein,
 Kurz eines nach dem andern wird Kind und dumm und klein.
 Und alles kehrt ini Erdenschoss Zuriick zu Adams Erdenkloss.
 Am langsten halt, was Flugel hat;
 Doch wird zuletzt auch dieses matt:
 Die Henne wird zum Kiichlein, das Kuchlein kriecht ins Ei,
 Das schlagt der grosse Krebs dann mit seinem Schwanz entzwei!
 Zum Glicke kommt's wohl nie so weit!
 Noch bliiht die Welt in Frohlichkeit:
 Die Obrigkeit hat wacker acht,
 Dass sich der Krebs nicht locker macht;
 Auch fur dies arme Liedchen war'das ein schlechtes Gluck:
 Es lief tot Mund der Leute ins Tintenfass zuriick.

(Перевод)

Великий рак в Моринском озере **Стихотворение Копиша**

Город Морин всегда настороже, наблюдает за озером и день и ночь: не дай Бог никому дожить, чтоб вырвался великий рак! Цепями он прикован ко дну озера, потому что он грозит гибелью всей стране! Говорят: он величиной во много миль и часто поворачивается. Стоит ему оторваться, и он скоро явится на землю и тогда никто и ничто ему противостоять не сможет; а так как раки с давних пор пятятся назад – уж таков старинный их обычай! – то и все должно с ним пятиться назад. То-то будет движение вспять! Если кто

возьмет что-либо в рот, кусок повернется ото рта к тарелке, а там и в горшок! Хлеб снова превратится в муку, мука в пшеницу и все будет двигаться задом наперед. Стропила оставят свои дома и, превратившись в деревья, с шумом двинутся в лес; дерево сползет в землю, снова станет ростком, кирпич снова станет глиной, вол превратится в теленка, теленок двинется к корове, но и та станет теленком и т. д. и т. д.! Собранный воск вернется к цветку, рубаха снова станет льном, лен снова станет льняным семенем, и сползет в распаханную пашню. Говорят, беда постигнет прежде всего бургомистра: он раньше всех превратится в малого ребенка. Затем настанет очередь благородного советника, за ним очередь остроумца-писаря; мало-помалу родовое мещанство будет терять свое значение и силу. Сам директор школы станет не больше самого малого ученика. Одним словом, все один за другим станут детьми и глупыми и малыми. И все вернется к миру Адама. Дольше всех продержатся твари, имеющие крылья. В конце концов, однако, дойдет очередь и до них: курица станет цыпленком, цыпленок ползет в яйцо, которое разобьет своим хвостом великий рак. К счастью, дело никогда так далеко не заходит! Процветает еще наш мир на радость нам: начальство зорко следит за тем, чтобы рак цепей не разорвал; даже для этой песенки было бы тогда плохо дело: она с уст читателя сбежала бы в чернильницу обратно.

Разрешите мне несколько замечаний общего характера. Вы заметили уже, что целый ряд аппаратов, служащих для различных целей, часто имеют в своей основе один и тот же принцип. Нередко таким принципом является почти неуловимая, но весьма плодотворная идея, приводящая ко всякого рода усовершенствованиям в области физической техники. Здесь дело обстоит так же, как и в обыденной практической жизни.

Колесо телеги представляется нам вещью в высшей степени простой и неважной. Но изобретатель его был, наверное, гением. Быть может, простая случайность заставила обратить внимание на то, как легко передвигать тяжести, пользуясь каким-нибудь валиком, например, круглым стволом дерева. И вот сделать один шаг дальше, от простого, подкладываемого под предмет валика к валику укрепленному, к колесу, очень легко. Однако же это представляется столь легким нам, с детства знакомым с колесом. Но представим себя в положении человека, который никогда не видел колеса, который должен впервые изобрести его. Мы почувствуем тогда, каких это стоило трудов. Пожалуй, нам придется усомниться в том, действительно ли это было делом одного человека, или, быть может, нужны были столетия для того, чтобы из валика образовалось первое колесо.

Тех двигателей прогресса, которые построили первое колесо, не называет никакая история, они жили задолго до исторического времени. Никакая академия не награждала их, никакое общество не выбирало их в свои почетные

члены. Они продолжают жить лишь в великолепных результатах их благотворной деятельности. Отнимите у нас колесо, и едва ли многое сохранится от всей техники и индустрии нового времени. Исчезнет все: от самопрядки до прядильни с паровыми машинами, от токарного станка до прокатной машины, от простой тачки до поезда железной дороги – все сгниет.

Такое же значение имеет колесо и в науке. Вращательные аппараты, как простейшее средство вызвать быстрое движение без перемены места, играют роль во всех отделах физики. Вы знаете, вращающиеся зеркала *Уитстона*, зубчатое колесо *Физо*, вращающиеся, снабженные отверстиями диски *Плато* и т. д. Все эти аппараты построены в сущности по одному и тому же принципу. Они отличаются друг от друга не больше, чем по назначению своему должны отличаться один от другого карманный нож, нож анатома или виноградарский нож. Почти то же самое можно сказать и относительно винта.

Вам уже ясно, я надеюсь, что новые идеи возникают не вдруг. И идеям нужно время, чтобы произрастать и расцвести, чтобы развиваться, подобно каждому существу природы: ведь человек со всем своим мышлением тоже является частью природы.

Медленно, постепенно, с трудом преобразовывается одна мысль в другую, как, по всей вероятности, совершается постепенный переход одного животного вида в другой. Много идей появляется одновременно. Они ведут свою борьбу за существование не иначе, чем ихтиозавр или лошадь.

Немногие выживают, чтобы затем быстро распространиться по всем областям знаний, снова развиваться, делиться и снова начать борьбу за свое существование. Подобно тому, как давно выродившийся животный вид, представитель какой-нибудь прошлой эпохи сохраняется в некоторых глухих местностях, где он защищен от нападения врагов, так мы находим давно изжитые, преодоленные идеи, которые продолжают жить еще в головах некоторых людей. Кто внимательно наблюдает себя, тот должен признать, что идеи столь же упорно борются за свое существование, как и животные. Кто станет отрицать, что кое-какие преодоленные уже воззрения долго продолжают еще гнездиться в глухих уголках мозга, не решаясь выступить вперед в стройный ряд ясных идей? Какой исследователь не знает, что в процессе развития его идей ему приходится вести жесточайшую борьбу с самим собой?

С подобными же явлениями естествоиспытатель сталкивается повсюду, в вещах самых незначительных. Истый естествоиспытатель занимается наблюдением природы повсюду, даже на прогулке, даже на одной из оживленнейших улиц города. Если он не слишком ученый, он замечает, что некоторые вещи, например, дамские шляпы, подвержены изменениям. Специально я этим предметом не занимался, но одно я помню: что одна форма постепенно

переходит в другую. Когда-то носили шляпы с широкими полями. И глубоко под ним скрыто было лицо красавицы, едва видимое в телескоп. Но поля становились все короче, и шляпа все суживалась, превращаясь в иронию над шляпой. Зато над ней стала вырастать огромная крыша, и один Господь только ведает, до каких размеров это дойдет. Дамские шляпы, что бабочки, разнообразие форм которых часто бывает основано только на том, что какой-нибудь небольшой нарост на крыльях у одного из родственных видов развивается в большую отдельную долю крыла. И природа имеет свои моды, но они существуют столетия. Я мог бы привести в доказательство этой мысли еще кое-какой пример, например, рассказать о происхождении фрака, если бы я не боялся, что моя болтовня слишком уж наскучит.

Итак, мы познакомились с одним отрывком из истории науки. Чему же он научил нас? Такая маленькая, ничтожная, можно сказать, задача, как измерение скорости света, а над решением ее пришлось работать несколько столетий! Три самых выдающихся естествоиспытателя, итальянец *Галилей*, датчанин *Ремер* и француз *Физо* честно разделили между собой этот труд. И то же самое происходит при решении бесчисленного множества других вопросов. Много цветков мысли должны увянуть, не расцветая, прежде чем расцветет один. Вдумаемся в это, и мы только тогда поймем вполне правдивые, но мало утешительные слова: «много званых, но мало избранных».

И об этом свидетельствует каждая страница истории! Но справедлива ли история? Действительно ли только те являются избранными, кого она называет? Действительно ли напрасно жили и боролись те, которые не удостоились награды.

Я готов усомниться в этом. И в этом усомнится всякий, кому знакомы мучительные мысли бессонных ночей, которые, часто оставаясь долго бесплодными, в конце концов ведут все же к цели. Ни одна мысль не была здесь напрасной, а каждая, даже самая ничтожная, даже ложная, даже самая неплодотворная, как будто расчищала путь следующей, плодотворной. Как в мышлении отдельного человека нет ничего, что было бы напрасно, так нет этого и в мышлении человечества!

Галилей хотел измерить скорость света. Ему пришлось сойти в могилу, не выполнив этого, но он, по крайней мере, нашел фонарь, с помощью которого это удалось сделать его преемнику. И я имею, поэтому, право утверждать, что все мы, если только этого хотим, работаем над делом культуры будущего. Будем, поэтому, все работать как следует, и мы все будем званые, все избранные.

ACTUAL MATTER PUBLISHED IN THE LAST YEARS

In this issue, the Editorial Board of «Nanostructures. Mathematical Physics and Modeling» opens the new column «Actual matter published in the last years». This column will present some selected materials from various publications in the past years. In this issue, we call the reader's attention to several parts of the book by Ernst Mach «Popular Scientific Lectures» published in 1895. The book translated by G.A. Kotlyar was first published in Russia under the title «Popular Lectures on Physics» in 1909. Nowadays, the book was published by NITs «Regular and Chaotic Dynamics» in 2001. (Mach E. Popular Lectures on Physics// NITs Regular and Chaotic Dynamics, Izhevsk, 2001, 128 pages.). The Publishing house kindly allowed us to reprint several parts of the book which is deeply appreciated by the NMPHM Editorial board.

E. Mach
Popular Lectures on Physics

**Shape of liquid.
About the speed of light.**

Информация и правила для авторов

Общие положения

Журнал «Наноструктуры. Математическая физика и моделирование» (сокращенно: НМФМ) публикуется с 2009 года и является периодическим научным изданием. Электронная версия журнала размещается на сайте <http://www.nano-journal.ru>. Основная цель издания: представление новых теоретических и вычислительных методов моделирования наноструктур и мягкой материи, общих подходов в исследовании мезосистем, а также ключевых экспериментальных результатов в данной области и связанных с этим проблем математической физики.

Журнал НМФМ имеет междисциплинарный характер и в силу этого несет определенную образовательную направленность, а не только узко научную. Работы, представляемые в журнал, должны содержать вводные сведения, которые обеспечат понимание постановок задач и восприятие результатов не только прямыми специалистами. Определения понятий, объяснение обозначений и терминов, оценки характерных параметров, теоретические предпосылки и идеи, используемые методы, и т.п., должны быть кратко объяснены в тексте статьи, имея в виду читателей, специализирующихся в иных направлениях. Должны быть описаны базовые математические модели и уравнения. Во Введении и в последующих разделах очерчивается стратегия и основные трудности, это увязывается с используемыми моделями. Структура статьи ориентируется на прояснение общей логики и методики исследования, содержит резюмирующие выводы. В тексте должны быть рассмотрены характерные примеры (хотя бы, методические), ясно иллюстрирующие предлагаемые алгоритмы.

Журнал публикует научные обзоры, исследовательские статьи и краткие научные сообщения, а также избранные аналитические и информационно-образовательные материалы, тексты докладов и циклов лекций, прочитанных в университетах, научных центрах, на школах-семинарах, конференциях, нигде ранее не публиковавшиеся и не принятые к публикации в других изданиях. Язык публикации в журнале НМФМ, как правило, русский. Работы, представляемые в журнал, не могут иметь научно-популярный или компилятивный характер. Все статьи рецензируются и могут быть отклонены редколлегией журнала. В случае принятия работы к печати ее авторы передают издателью журнала НМФМ право на разовую безвозмездную публикацию текста и его размещение в электронной версии на сайте журнала. Перевод опубликованных в журнале статей на другие языки может осуществляться только с разрешения и при участии авторов.

Порядок представления статей

- В редакцию изначально представляются:
 - файл статьи, файлы с иллюстрациями;
 - сопроводительное письмо, можно в электронной форме, содержащее сведения об объеме статьи и обо всех авторах (фамилии, имена, отчества, полные названия мест работы, почтовый адрес с индексом, номер контактного телефона с кодом города, электронный адрес автора, ответственного за переписку с редакцией); предпочтительно, чтобы это письмо было выполнено на бланке учреждения, в котором работает кто-то из авторов, было заверено печатью и содержало утверждение о возможности открытого опубликования статьи;
 - файл с переводом на английский язык названия статьи, фамилий и инициалов авторов, аннотации, ключевых слов.
- Авторские файлы могут быть присланы на электронный адрес: papers@nano-journal.ru; (резервный адрес в случаях затруднений с пересылкой: nano@miem.edu.ru) или переданы в редакцию на любом электронном носителе. Авторы получают из редакции подтверждение о получении их материалов.
- Телефон (факс) редакции: +7 (495) 916-8876. Адрес редакции: Москва 109028, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, Московский институт электроники и математики (МИЭМ), комн. 449.

Общие требования к представляемым файлам

- Допускается использование текстовых редакторов WORD и LATEX. К рабочим файлам должна быть приложена их pdf-копия. В названии файлов используется латинский алфавит, пробелы заменяются знаком `_`. Шапка статьи содержит название, инициалы и фамилии авторов, место работы, электронный адрес, краткую аннотацию, ключевые слова. В аннотации не следует использовать формулы и ссылки на текст работы или список литературы; в конце она должна содержать индекс УДК (к английской версии аннотации можно добавить индексы зарубежных рубрикаторов).
- Объем кратких сообщений 4-8 страниц, исследовательских статей, как правило, до 20 страниц, а обзоров – более 20 страниц. Верхняя граница согласуется с редколлегией. При подсчете объема нужно ориентироваться на страницы формата А4, шрифт 12, знаков в строке 80, интервалов между строками 1.
- Авторы не должны злоупотреблять сокращениями, составленными из заглавных начальных букв терминов. Предпочтительней каждый раз использовать полное наименование объекта. Возможно использование только устоявшихся аббревиатур.

Требования к файлам Word

- Рекомендуемый шрифт – Times New Roman.
- Строки в пределах абзаца не должны разделяться символом возврата каретки (Enter).
- Нельзя использовать автоматическое создание сносок, автоматический перенос или автоматический запрет переносов, создание списков, автоматический отступ и т.п.
- Ссылки на список литературы даются цифрами в квадратных скобках: [1], [5,6,7], [1-9].
- Все без исключения формулы и обозначения размерности, даже состоящие из одной латинской буквы, и в тексте и вынесенные в отдельную строку, всегда набираются в формульном редакторе и никогда – в обычном текстовом редакторе.

- При создании таблицы рекомендуется использовать возможности Word или MS Excel. Таблицы, набранные вручную (с помощью большого числа пробелов), не принимаются.

Требования к иллюстрациям

- Иллюстрации представляются в отдельных файлах, черно-белыми. Они должны иметь разрешение не менее 600 dpi.
- Форматы файлов – TIFF, EPS, PSD, JPEG.

Требования к списку литературы

- Ф.И.О. авторов или редакторов выделяются курсивом.
- Для статей приводится название. Названия отделяются от выходных данных знаком //. Расположение выходных данных указано на образце ниже. Номер тома выделяется жирным шрифтом, номер выпуска дается в скобках. Указываются номера первой и последней страниц статьи, либо уникальный номер статьи и ее объем. Для книг желательно указывать их объем. Если известна ссылка на электронный архив или сайт, то ее желательно указать.

Фамилия И.О. Название статьи // Назв. журн., 2000, **1** (1), 1-6.

Family F.M. and Family F. Title of the paper // Name of the Journal, 2006, **73**, 165313, 9 pp.

Фамилия И.О., Фамилия И.О. Название книги // Наука, С.-П., 1999, 176 стр.

Family F.M. Title of the paper // In book: Family F.M. (et al. eds), Title of the collection, Publisher, Boston, 2005, 9-24.

Family F.M. (ed.), Title of the collection // Publisher, N.Y., 2005, 324 pp.

Фамилия И.О. Название доклада // Доклад на конференции «Название конференции (место и дата проведения)»; ссылка на электронный ресурс.

Наноструктуры. Математическая физика и моделирование

Журнал зарегистрирован

в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС77-34934 от 29 декабря 2008 г.

Учредители

Московский институт электроники и математики (МИЭМ),

Европейский центр по качеству

Издатель

Европейский центр по качеству

ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛ НМФМ

На следующее полугодие подписаться на журнал можно в любом отделении связи по каталогу
Агентства Роспечать «Журналы России»,

рубрика «Физико-математические науки», подписной индекс 70017.

Редакция предлагает подписчикам возможность безвозмездно получить подборку прошлых
выпусков журнала. Пришлите на электронный адрес nanostructures@hse.ru (или на почтовый адрес:
123458, Москва, ул. Таллинская, д. 34, каб. 429, редакция журнала НМФМ)
копию подписной квитанции, а также адрес для отсылки выпусков.