



НАНОСТРУКТУРЫ

математическая физика и моделирование



Nanostructures. Mathematical physics & modelling

НАНОСТРУКТУРЫ

математическая физика и моделирование

Nanostructures.
Mathematical Physics & Modelling

2016, volume 14(1)

Наноструктуры. Математическая физика и моделирование

Редколлегия:

**И.В. Волович, В.Л. Голо, В.В. Гусаров, П.Н. Дьячков, Р.Г. Ефремов,
М.В. Карасев (зам. главного редактора), Ю.Е. Лозовик, М.А. Мазо,
В.П. Маслов (главный редактор), А.В. Махиборода (ответственный
секретарь), А.Ю. Морозов, С.А. Никитов, Р.А. Сурис, А.Н. Тихонов,
В.А. Тулин, В.Е. Фортов, А.С. Холево, А.Р. Хохлов, А.В. Чаплик,
Л.А. Чернозатонский, К.В. Шайтан**

Электронная версия журнала размещается на сайте
<http://nano-journal.ru>

Адрес редакции:

123458, Москва, ул. Таллинская, д. 34, каб. 429
+7 (495) 916-88-76
nanostructures@hse.ru

Москва

© 2016, Европейский центр по качеству

Содержание

Е.А. Лукашев, Н.Н. Яковлев, Е.В. Радкевич, О.А. Васильева О распространении теории неравновесных фазовых переходов на ламинарно-турбулентный переход	5
А.В. Махиборода, А.В. Ильичёв, А.А. Подобин Проблемы реализации массового динамического параллелизма. I	41
А.А. Морозов, А.В. Тимофеев Эффективность параллельной реализации алгоритма Radix-4 быстрого преобразования Фурье	69
Т.А. Петрова, Ф.В. Шугаев Акустический спектр цилиндрического вихря, найденный на основе уравнений Навье-Стокса	83
Информация и правила для авторов	97

Contents

Lukashev E.A., Yakovlev N.N., Radkevich E.V., O.A. Vasil'eva On the theory of nonequilibrium phase transition to the laminar-turbulent transition	5
A.V. Makhiboroda, A.V. Ilichev, A.A. Podobin Problems of implementation of massive dynamic parallelism. I	41
A.A. Morozov, A.V. Timofeev Efficiency of fast Fourier transform parallel algorithm Radix-4	69
T.A. Petrova, F.V. Shugaev Acoustic spectrum of a cylindrical vortex calculated on the basis of the Navier-Stokes equations	83
The information and rules for authors	97

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕОРИИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ НА ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕХОД

Е.А. Лукашев³, Н.Н. Яковлев³, Е.В. Радкевич¹, О.А. Васильева²

¹*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

²*Московский Государственный Строительный Университет*

³*Тураевское машиностроительное конструкторское бюро "Союз"*

evrad07@gmail.com, vasiljeva.ovas@yandex.ru
elukashov@yandex.ru, amntksoyuz@mail.ru

Поступила 08.09.2015

Приводится реконструкция начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода, механизмом которого является спинодальный распад(диффузионное расслоение)

УДК 517, 517.9, 536

1 Введение

В этой статье мы продолжим провокации[25]-[29] классических моделей, описывающих начальные стадии неравновесных процессов с избыточной энергией на примере проблемы ламинарно-турбулентного перехода. При рассмотрении устойчивости плоскопараллельных течений, течений в трубе и в пограничном слое в [5] отмечается, что именно эти течения являются наиболее важными для приложений. Однако для иллюстрации, например, метода возмущений рассматриваются течения между вращающимися цилиндрами и свободная конвекция между двумя плоскостями постоян-

ной температуры. В этих двух случаях "метод возмущений приводит к относительно простым задачам на собственные значения, позволяющим получить вполне законченные результаты. Что же касается до течений в трубах и в пограничном слое, то здесь применение метода возмущений наталкивается на очень значительные трудности, которые до сих пор никак еще нельзя считать полностью преодоленными"[5]. Эта ситуация связана с тем, что при моделировании этих двух специфических течений в рамках механики сплошной среды введение дополнительных сил (центробежной в первом случае и архимедовой во втором) легко обосновывается на уровне физической модели. В случае же трубы и пограничного слоя трудности возникают на уровне формулировки физической модели, т.е. в данном случае именно в рамках механики сплошной среды. При построении теорий турбулентности преодоление этих трудностей достигается за счет использования кинетических подходов в рамках моделей, которые условно можно отнести к моделям типа "рождения - гибели". Это диктует принятие ряда постулатов, которые на уровне физической модели требуют дополнительного обоснования.

Математические модели, представляющие эволюцию неустойчивых систем, могут быть построены в рамках механики, кинетики и термодинамики. Но при этом каждый из подходов ограничен системой исходных понятий, разработанной применительно к решению конкретных задач: механических и электромеханических, гидродинамических, кинетических и многих других. Наиболее общим среди подходов является термодинамический (энергетический), но его использование должно предполагать, что исследуемую систему можно отнести к разряду термодинамически неустойчивых систем. К таким относятся системы, в которых происходят неравновесные фазовые переходы. В связи с такой постановкой проблемы представляет интерес исследовать возможность использования теории неравновесных фазовых переходов к гидродинамическим явлениям, в частности, к описанию ламинарно-турбулентного перехода.

Следует отметить, что появление новых математических понятий и приемов исследования позволяет по новому взглянуть на известные объекты и открыть неизвестные ранее их стороны. В частности, это относится к турбулентности, для исследования и моделирования которой использовали теорию динамических систем, понятие аттрактора, в особенности, странного аттрактора [1], теории бифуркаций и катастроф, теорию фракталов (для турбулентного горения [2]). Однако, как правило, объектом математического моделирования является развитая и стационарная турбулентность, и для ее описания вводятся исходные понятия: пульсации давления, пульсации скорости и др. В тоже время с точки зрения информативности больше дают математические модели зарождения и дальнейшего формирования объекта - процесса, структуры. В отношении турбулентности это отмечалось Рабиновичем М.И. в обзоре [1].

Если в инженерных приложениях математические модели стационарного турбулентного течения дают определенный результат при проведении расчетных исследований, то в случае геофизической гидродинамики используются такие понятия как накачка, энстрофия и др. [3], позволяющие отразить нестационарный характер турбулентного течения. В связи с этим особое значение (и не только из-за прикладной значимости) приобретает моделирование ламинарно-турбулентного перехода, поскольку именно в ходе него формируются различные промежуточные структуры, только в последствии дающие развитое турбулентное течение [4]. Собственно из опытов О. Рейнольдса [5], с которого берет начало теория турбулентности, следовало,

что на характер течения - ламинарное или турбулентное - оказывают возмущения на входе: при малых числах Рейнольдса (Re) они затухают, а течение остается ламинарным, при больших значениях Re возмущения усиливаются, что переводит поток в турбулентный. Тот же характер эволюции возмущений (затухание с различными временами релаксации наблюдался в опытах Клаузера [6] в разных областях пограничного слоя. Такой характер поведения возмущений позволяет заключить, что для описания ламинарно-турбулентного перехода может быть использован математический аппарат теории неравновесных фазовых переходов, поскольку возмущения концентрации однородных смесей эволюционируют аналогично в зависимости от того, какой области фазовой диаграммы соответствует состояние этой системы: стабильной, метастабильной или лабильной.

Ламинарно-турбулентный переход, а также неравновесные фазовые переходы, характеризуются гистерезисом. На начальных стадиях неравновесного фазового перехода формируются промежуточные структуры: пузыри при кипении, капли при конденсации, дендриты при кристаллизации и т.п. Эти структуры являются аккумуляторами избыточной энергии первоначально однородной системы, которой она обладает в силу изменения внешних условий (нагревание, охлаждение). Примером таких систем является также раствор ограниченно растворимых друг в друге жидкостей, которые характеризуются фазовыми диаграммами с верхней или нижней критическими точками, расслоение в котором на две фазы происходит, соответственно, при понижении и повышении температуры; имеются также растворы с двумя критическими точками расслоения.

Структура турбулентного потока также может быть представлена в форме двухфазной системы, образованной "губчатой" структурой турбулентной и нетурбулентной жидкостей [7]. Для иллюстрации этого тезиса процитируем небольшие отрывки из [7].

1) "Согласно установившейся терминологии будем говорить, что области с малыми значениями градиентов скорости или концентрации заполнены нетурбулентной жидкостью, а области с большими значениями градиентов - турбулентной жидкостью. В литературе вместо термина "нетурбулентная" жидкость часто используется выражение "потенциальная" жидкость, т.е. предполагается, что существуют области, в которых течение потенциально."

2) "Можно предположить, что поверхность разрыва компактна (т.е. ее точки не выходят за пределы ограниченной пространственной области), а ее площадь бесконечно велика. Такая поверхность, в известной мере, напоминает губку, т.е. образование со множеством внутренних пустот, имеющих широкий спектр характерных размеров, и нечетко определенной внешней границей (существуют тонкие "каналы", соединяющие внутренность образования с внешним пространством). С этой точки зрения колебания внешней границы "губки" можно назвать внешней перемежаемостью, а колебания внутренних каналов - внутренней перемежаемостью."

3) "По-видимому, наиболее точно и вместе с тем просто отражает существо дела модель Новикова и Стюарта, в которой предполагается, что поток можно разбить на n^2 одинаковых кубов, таких, что вся диссипация энергии сосредоточена в γn^2 из них ($0 < \gamma < 1$), а в остальных равна нулю. Предполагается также, что каждый из числа кубов можно снова разбить аналогичным образом, а при $Re \rightarrow \infty$ процесс разбиения можно продолжить неограниченно. Таким образом, в любой точке потока можно найти нетурбулентную жидкость. Характерный размер областей, заполненных этой жидкостью, варьируется от нуля до интегрального масштаба турбулентности. Обла-

сти, занятые турбулентной жидкостью, тесно переплетаются с областями, в которых находится нетурбулентная жидкость. Аналогичные соображения высказаны Мандульбротом, в работах которого для описания структуры турбулентной жидкости использовалось понятие о фракталах".

4) "Экспериментальные данные и результаты их теоретического анализа указывают на то, что количественное определение характеристик перемежаемости связано с рядом принципиальных трудностей. Во-первых, неясно, как определить границы турбулентной жидкости (как уже указывалось, внутрь области, которая на первый взгляд целиком заполнена турбулентной жидкостью, могут проникать тонкие каналы, заполненные нетурбулентной жидкостью). Во-вторых, поскольку при $Re \rightarrow \infty$ вязкие эффекты существенны, по-видимому, в области с нулевым объемом, становится неясным, что такое коэффициент перемежаемости, который обычно понимается как относительная величина объема, заполненного турбулентной жидкостью. В-третьих, возникает вопрос, какая гидродинамическая характеристика наилучшим образом подходит для определения перемежаемости. В самом деле, вблизи турбулентной области всегда найдется нетурбулентная. Если размеры обеих областей одного порядка, то энергии пульсаций также одного порядка, что ясно из работ Ландау и Лифшица [10], Филлипса [1955] (пульсации давления приводят к нелокальному переносу энергии). Следовательно, по характеру пульсаций скорости обе жидкости могут оказаться трудно различимыми."

Отмеченная выше постановка вопроса требует отнесения исследуемого объекта - течения - к классу термодинамических систем: неравновесных и открытых (стационарных или нестационарных). Аналогия различных критических явлений, включая гидродинамические, с неравновесными фазовыми переходами отмечалась Хакеном Г. [8]. Эта аналогия строится с использованием понятий параметра порядка (согласно Ландау Л.Д.), потенциала и функционала Гинзбурга-Ландау. Для обобщения, по аналогии с фазовыми переходами в магнитных системах, вместо намагниченности M вводится обобщенная координата q (параметр порядка). Предполагается, что свободная энергия F равна минимальному своему значению при фиксированном значении q . Разложение в ряд по степеням дает

$$F(q, T) = F(0, T) + F'(0, T)q + \dots + \frac{1}{4!}F''''(0, T)q^4 + \dots$$

При симметрии $F' = F''' = 0$, тогда

$$F(q, T) = F(0, T) + \frac{\alpha}{2}q^2 + \frac{\beta}{4!}q^4.$$

Для движущегося потока термодинамический член, отражающий вклад течения, согласно [9], вводится в виде $w dw$ (w - скорость). Поскольку этот член должен представлять собою произведение интенсивной переменной на дифференциал экстенсивной переменной, то точнее будет записать его в виде $w d(\rho w)$ (w в расчете на единицу объема (ρ - плотность)). Здесь обобщенная координата q имеет смысл удельного расхода ρw . Тогда согласно [8] гидродинамические критические явления должны рассматриваться по аналогии с неравновесными фазовыми переходами. При зависимости q от пространственной координаты $q = q(x)$ свободная энергия такой системы представляется в форме функционала Гинзбурга-Ландау

$$F(q(x), T) = F_0(0, T) + \int d^n x \left(\frac{\alpha}{2} q(x)^2 + \frac{\beta}{4} q(x)^4 + \frac{\gamma}{2} (\nabla q(x))^2 \right).$$

Таким образом, задача распространения этой аналогии на объекты гидродинамики и газовой динамики далека от своего завершения. Для постановки и решения этой задачи следует сравнить ламинарно-турбулентный переход с неравновесными фазовыми переходами в ограниченно смешивающихся и расслаивающихся на фазы жидкостях.

2 Энергетический подход

Этот параграф посвящен феноменологии энергетического подхода в теории неравновесных фазовых переходов. Для инженерных приложений, значительный интерес представляют критические явления типа воспламенение, срыв горения, ламинарно-турбулентный переход и другие. Существуют попытки построения аналогий и обобщения этих, на первый взгляд, разнородных явлений, но, в то же время, обладающих некоторыми общими характерными чертами. Это, прежде всего, гистерезис. Эта и другие общие черты проявляются в том, что к ним применим единый математический аппарат теоретического описания. Например, И.Г. Баренблатт [23] предложил математический аппарат теории горения распространить на моделирование других физических процессов, в частности, на течение полимеров под нагрузкой.

Кроме того, существует подход к такого рода обобщениям с использованием математического аппарата теории неравновесных фазовых переходов [8]. Однако, этот подход строится, как правило, с использованием понятий и приемов статистического описания. Это, в частности, относится и к теории турбулентности - статистическая теория турбулентности (Колмогоров, 1941). Однако стремление к построению строгой и обоснованной теории приводит к тому, что рассматриваются простейшие - идеализированные модели. Но даже в этом случае приходится использовать инженерные подходы с применением приемов теории подобия и размерностей.

Статистический подход предполагает разбиение процесса на элементарные стадии и объекты, после чего из них "суммированием" строится рассматриваемый процесс. Однако часто такое построение обрастает столь большим числом деталей, что сам процесс становится практически не представимым целиком. Тогда говорят о большой сложности задачи. Эта констатация является логическим обоснованием дальнейшего углубления в детали, поскольку уже на стадии элементарных актов не все до конца прояснено. На этом направлении требования к "строгости" построений и полученных результатов выстраиваются в последовательность "степеней строгости" (что интуитивно воспринимается как "степень правдивости" или "истинности").

Физическая строгость не удовлетворяет математиков, инженерная строгость не удовлетворяет физиков. Все это приводит к отдалению от практических приложений. Малую значимость подобного рода результатов для приложений (опытной, экспериментальной части науки) отмечал Д.И. Менделеев [31]. Чрезмерное увлечение все большей и большей детализацией, когда "за деревьями перестают видеть лес", приводит, к конечному счету, к необходимости вернуться к исходным позициям.

Рассмотрение ламинарно-турбулентного перехода следует начать с анализа результатов попыток обобщенного описания критических явлений с использованием

математического аппарата теории неравновесных фазовых переходов, например, так как это представлено у Хакена [8]. В первой (фактически, вводной) главе он проводит аналогию между фазовыми переходами между различными фазовыми состояниями, которые происходят достаточно резко, и переходами в ферромагнетике при увеличении и уменьшении температуры, переходом в режим генерации лазера при увеличении мощности накачки (здесь дважды меняется режим лазерного излучения), переходами в гидродинамических системах, например, при увеличении скорости обтекания твердого тела переход через системы регулярных структур типа двух присоединенных вихрей и дорожки Кармана от ламинарного течения к турбулентному, переходами к колебательному поведению и образованию пространственных структур в системах химических реакций типа реакции Белоусова-Жаботинского, колебаниями в биологических системах, описываемых моделями типа модели "хищник - жертва" Лотки-Вольтерра, и формированием клеточных структур по типу морфогенеза.

Рассмотрение гидродинамических неустойчивостей в [8] ограничено двумя примерами: описанием термоконвекции Бенара и неустойчивости Тейлора для течения Куэтта между двумя вращающимися цилиндрами, а предложенная аналогия с фазовыми переходами использовалась косвенно для интерпретации результатов. Этот ограниченный круг примеров из гидродинамики связан с тем, что, как отмечалось во введении, в основе этих математических моделей лежат физически ясные механические модели, которые позволяют увидеть общие черты с фазовыми переходами. Другой гидродинамический пример - переход к сверхтекучему состоянию жидкого гелия рассматривался Ландау, как фазовый переход второго рода [32].

Беглое рассмотрение двух описаний: микроскопического и макроскопического, приводит Хакена к заключению, что "концепция моды имеет огромное преимущество перед микроскопическим описанием. Вместо необходимости знать все "атомные" координаты (пример - колебания струны) очень многих степеней свободы, нам требуется знать только один или несколько параметров, например, амплитуду моды ... амплитуда мод определяет тип и степень упорядоченности. Поэтому мы называем их параметрами порядка и устанавливаем связь с концепцией параметра порядка в теории фазовых переходов".

Вывод Хакена из этого сравнения достаточно категоричен: "ЭВМ выдает нам таблицы чисел, задающие положения точечных масс как функцию времени. Первый существенный момент заключается в следующем. Эти таблицы довольно бесполезны до тех пор, пока наш мозг не выберет определенные типичные свойства."

Отметим, что развиваемый в рамках теории неравновесных фазовых переходов такой подход приводит к тем же проблемам: стремление добиться большей адекватности с реальными системами заставляет углублять детализацию описания, которое по существу становится микроописанием. Это происходит из-за того, что математическую модель (теорию) стремятся построить на основе наиболее ясных и очевидных принципов, которые должны отражать существенные черты элементарного акта - события. После чего из этих элементарных актов простым суммированием (интегрированием) строят процесс (явление) целиком, и по ходу этого построения приходится явно или неявно добавлять, как правило, нелинейные свойства (взаимодействие между элементами, которые по-началу принимаются как независимые; суммирование - аддитивность не может дать нелинейных свойств, взаимодействие - это мультипликативность).

Кратко перечислим примеры, рассмотренные Хакеном, для того, чтобы провести аналогию между различными явлениями и фазовыми переходами. Для построения

этой аналогии нужно сконструировать потенциал (кривую зависимости энергии объекта от параметра состояния, который фиксируется значением экстенсивной переменной).

ПРИМЕР 1 (Накачка лазера). Для распространения теории фазовых переходов на лазеры Хакен использует феноменологический подход, исходя из известных фактов, установленных экспериментально: изменение со временем числа фотонов или скорость "рождения" (производства) фотонов, определяется уравнением "Прирост" - "Потери":

$$\dot{n} = \text{Прирост} - \text{Потери}. \quad (1)$$

Прирост вызывается стимулированным излучением (энергия извне); прирост пропорционален числу имеющихся фотонов и числу возбужденных атомов: N : Прирост = GNn , где G - коэффициент усиления (может быть получен из микроскопической теории).

Потери обусловлены уходом фотонов через торцы лазера; принимается допущение, что скорость ухода фотонов пропорциональна числу имеющихся фотонов: Потери Потери = $2\kappa n$, где $2\kappa = \frac{1}{t_0}$, t_0 - время жизни фотона в лазере. Это уравнение (уравнение для потерь) делает нелинейным следующее обстоятельство: число возбужденных атомов уменьшается за счет испускания фотонов; в отсутствие лазерной генерации число возбужденных атомов поддерживается внешней накачкой на постоянном уровне N_0 , но при лазерной генерации число возбужденных атомов будет меньше. Это уменьшение ΔN пропорционально числу имеющихся фотонов (число рождающихся фотонов равно числу погибающих возбужденных атомов), поскольку эти фотоны производятся за счет возвращения возбужденных атомов в основное состояние, поэтому число возбужденных атомов равно $N = N_0 - \Delta N$, $\Delta N = \alpha n$.

Из приведенных выше соотношений получаем упрощенную модель лазерной генерации

$$\dot{n} = -kn - k_1 n^2, \quad (2)$$

где $k = 2\kappa - GN_0$, $k_1 = \alpha$. Если N_0 - мало, то $k > 0$, а при N_0 достаточно большом $k < 0$.

Равенство $GN_0 = 2\kappa$ ($k = 0$) определяет порог лазерной генерации, т.е. $k = 0$ определяет бифуркацию.

Этот ход рассуждений при построении упрощенной модели лазера полностью соответствует формальной химической кинетике. Дополнение модели деталями приведет к ее усложнению, но характерные черты качественного поведения останутся такими же. Здесь активными частицами, накопителями энергии являются фотоны, которые, возбуждая атомы, производят другие фотоны - размножение с коэффициентом усиления G (или с коэффициентом размножения как в цепных реакциях: $K > 1$, $K = k + 1$, т.е. из условия $k > 0$ следует $K > 1$, а из условия $k < 0$ следует $K < 1$; здесь фиксируется либо преобладание производства над гибелью активных частиц, либо наоборот, преобладание гибели над производством; т.е. либо - двигатель идет в разнос, либо - двигатель глохнет [33], достичь равновесия этих процессов или стационарности можно только, если ввести прогрессивную "гибель", так, чтобы число имеющихся активных частиц сильно уменьшалось при росте числа частиц).

ПРИМЕР 2 (Автокаталитическая реакция). В химической реакции, проходящей через стадию образования промежуточных соединений: $A + B \Rightarrow 2A$, $A \Rightarrow C$; накопление частиц A приводит к ускорению реакции (A -промежуточные активные частицы). Одна частица A перед своей "гибелью" $A \rightarrow C$ производит две частицы себе подобных $A + B = 2A$.

ПРИМЕР 3 (Модель "хищник - жертва" Лотки-Вольтерра). Эта модель относится к тому же классу феноменологических кинетических моделей. К этому же классу принадлежит также модель лампового генератора Ван-дер-Поля (накопитель - индуктивность, или в RC -генераторе - конденсатор; усилитель - электронная лампа; здесь вместо фотонов лазера электроны; обеспечивается та же закономерность: больше ток, больше электронов, с последующим ограничением анодного тока лампы - тока насыщения).

Эти примеры иллюстрируют следующую ситуацию в области математического моделирования. Первична феноменологическая модель, которая может быть далее использована, первое, в уточнении постановки физической задачи - переход к большей детализации (как правило, это переход на статистический язык), или, второе, при постановке инженерной задачи - построение качественной картины, представляющей характерные черты поведения объекта моделирования (как правило, это достаточно сложная конструкция, в которой должен быть реализован моделируемый процесс).

Эти примеры приведены еще и для того, чтобы показать, что построение некоторого теоретического описания стартует с модели макросистемы, для которой уравнения (движения, потенциал) выводятся феноменологически (например, из механики). То же и для кинетической теории газов: упругое столкновение шаров (упругое - чтобы система была консервативной). Если от описания столкновения шаров удастся прийти к уравнению состояния идеального газа, то это - большой прогресс, но в нем присутствует только одно: от одной феноменологии пришли к другой. Это доказывает только единство мира, но не более того.

Кроме того, для иллюстрации этой методологии можно привести пример из теории горения. Раушенбах Б.В. [34], чтобы объяснить неустойчивость горения - переход в режим вибрационного горения, вводит обратную связь, что явным образом оговаривает. Но он отказывается дать, что также явно оговаривает, физический механизм ее определяющий. Кроме того, Раушенбах для построения модели вибрационного горения принимает модель осциллятора Гельмгольца, т.е. изначально постулируется наличие накопителя энергии, который затем получает энергию от процесса горения. Модель вибрационного горения Раушенбаха - это макроскопическая модель для процесса целиком, которая строится с помощью известных уравнений, т.е. изначально предполагается (постулируется), что объект и его эволюция этими уравнениями описываются. Правомочность принятия постулата обосновывается апостериори, т.е. если поведение объекта качественно подобно поведению модели, то постулат считается обоснованным (и здесь нет нужды прибегать к "строгим" доказательствам, например, используя приемы статистической физики; объект "сам говорит за себя").

Эта методология близка к решению практически важных задач (что отмечал Раушенбах Б.В.) - обеспечение устойчивой работы камер сгорания воздушно-реактивных и ракетных двигателей. В последующем изложении станет ясно, что при распространении аналогии неравновесных фазовых переходов на ламинарно-турбулентный переход, в целом, мы будем придерживаться такого же подхода. Однако, при этом мы не

пойдем по пути выбора подходящей физической модели из числа имеющихся, а будем строить обобщенную физическую модель, которая предполагает использование системы физических понятий, пригодных для любого физического (или другого) явления, характерными свойствами которого являются гистерезис и "срывные" (гашение пламени) или "взрывные" (воспламенение) свойства.

Первоначально обобщенную физическую модель таких явлений будем строить на примере ламинарно-турбулентного перехода. При этом попытаемся избежать того, чтобы аналогию подменить "похожестью", если даже в случае последней используются похожие уравнения (поскольку уравнения всегда есть уравнения сохранения, даже если какая-то величина и не сохраняется, но при этом сохраняется другая, как в уравнении для импульса).

Кроме уравнений, для обобщенной физической модели должны быть введены общие для всех систем понятия. Из этого ясно, что такими понятиями могут быть только энергетические (термодинамические); все другие понятия: механические в механике, химические в химии, этому условию не удовлетворяют. Кроме того, ясно, что термодинамическое описание изначально отказывается от детальности, т.е. часть специфической информации теряется, но за счет этого достигается общность. После получения решения обобщенной задачи оно - это решение - может быть "насыщено" требуемой спецификой.

Здесь, кроме того, следует кратко остановиться на приемах исследования подобных систем, нашедших описание в литературе. В окрестности точек, где нарушается линейная устойчивость, строится потенциал, который затем разлагается в ряд Тейлора с сохранением членов до четвертого порядка. Далее анализируется при каких условиях на коэффициенты членов будет реализован тот или иной сценарий поведения модели. Однако, при таком анализе формы потенциала дается только математическая трактовка получаемых результатов, но для инженерных приложений важно именно то, что физически означает, например, подчинение коэффициентов ряда тем или иным неравенствам. В этом отношении можно констатировать, что таким путем демонстрируются не результаты, а инструментарий. Исходная модель для построения инструментария - модель осциллятора, получившая название "мода". Интенсивная эксплуатация этого понятия связана с простым представлением решения для линейных систем дифференциальных уравнений в виде суперпозиции нескольких решений.

2.1 Переходы неравновесно фазовый и ламинарно-турбулентный

Продолжим наши исследования возможности распространения теории неравновесных фазовых переходов в форме теории спинодального распада Кана-Хилларда на ламинарно-турбулентный переход. Для наибольшей наглядности рассмотрим наиболее простой пример: плоскопараллельный поток [10]. Все слои плоскопараллельного потока имеют скорость либо большую (ближе к ядру потока), либо меньшую (ближе к стенке канала) средней, и только (условно) два слоя будут иметь скорость, равную средней. Такая система с термодинамической точки зрения является неоднородной, и поэтому обладает избыточной свободной энергией. Как любая термодинамическая система движущийся поток стремится к минимуму свободной энергии. В общем случае это стремление может быть реализовано либо за счет уменьшения внутренней энергии или энтальпии, либо за счет увеличения энтропии.

Поскольку ламинарно-турбулентный переход является самопроизвольным процессом, то, как любой термодинамический процесс, он переводит термодинамическую систему из одного устойчивого состояния, характеризуемого F_{max} , в другое устойчивое состояние, также характеризуемое F'_{max} . Так как при приближении к ламинарно-турбулентному переходу избыточная свободная энергия $F = \Delta F = F_{max} - F$ достаточно велика, то данный переход должен быть отнесен к разряду неравновесных переходов.

Кроме того, поскольку, как отмечалось выше, согласно [7], структуру потока после перехода, т.е. потока с развитой турбулентностью, можно представить как двухфазную систему (смесь турбулентной и нетурбулентной жидкостей с размытой границей между фазами и образующую губчатую - пористую, дисперсную структуру с размытым распределением по размерам и по энергиям), то и поэтому признаку ламинарно-турбулентный переход должен быть отнесен к классу неравновесных фазовых переходов. Это является обоснованием использования для его теоретического описания формализма (математического аппарата) теории неравновесных фазовых переходов.

Неравновесный фазовый переход может происходить либо по механизму нуклеации, либо по механизму спинодального распада, соответственно, когда исходная термодинамическая система находится в метастабильном или в лабильном состоянии. Для описания фазового перехода, реализующегося по механизму нуклеации, используется подход Дж. Гиббса, центральным понятием которого является критический зародыш (гиббсовский зародыш). Критический зародыш, как флуктуация состава (плотности), характеризуется малым размером, но большой разницей в составе с маточной фазой (амплитудой флуктуации состава или плотности). Фазовый переход из лабильного состояния не требует наличия зародышей, превышающих по размеру критический, и реализуется по механизму спинодального распада путем роста флуктуаций малых по отклонению от состава исходной однородной системы, но больших по размеру.

В гидродинамической системе затухание флуктуаций свидетельствует о нахождении потока, как термодинамической системы, либо в области стабильного состояния однородной системы, либо в области метастабильности, но при этом возмущения не превышают по интенсивности некоторый критический уровень - критический зародыш "турбулентной" жидкости. Если возмущения течения способствуют переходу потока из ламинарного состояния в турбулентное, то это говорит о том, что либо возмущения велики по интенсивности и поток находится в метастабильном состоянии, либо поток находится в лабильном состоянии. В последнем случае турбулизация потока происходит по механизму спинодального распада.

Описание турбулентного течения, как двухфазной системы, состоящей из двух взаимопроникающих жидкостей (турбулентной и нетурбулентной) [7] с диффузными границами, соответствует описанию структур, формирование которых протекает по механизму спинодального распада. В теории спинодального распада Кана-Хилларда термодинамическими переменными являются концентрация и градиент концентрации; для потока это будет соответствовать скорости и градиенту скорости.

Ламинарно-турбулентный переход наступает при увеличении скорости потока, т.е. при увеличении гидродинамической составляющей полной энтальпии. Этому соответствуют фазовые переходы в системах ограниченно растворимых жидкостей с нижней критической точкой расслоения (в таких системах расслоение наступает при повышении температуры, что аналогично повышению энтальпии).

Кратко, термодинамика процесса расслаивания в терминах фазовых диаграмм и термодинамических неравенств может быть представлена следующим образом. Однородная система - раствор из двух ограниченно смешивающихся жидкостей может самопроизвольно образовываться при реализации следующих термодинамических соотношений: (1) $\Delta H > 0$, $\Delta S > 0$ -возрастания энтальпии и энтропии по потоку; в этом случае процесс растворения эндотермический, т.е. сопровождается поглощением теплоты, и реализуется за счет увеличения энтропии, при этом в силу соотношения Гиббса-Гельмгольца для приращения свободной энергии Гиббса $\Delta G = \Delta H - TdS$ должно выполняться неравенство $TdS > \Delta H$; эти системы имеют на фазовой диаграмме верхнюю критическую точку расслоения (ВКТР); (2) $\Delta H < 0$, $\Delta S < 0$; в этом случае процесс растворения экзотермический, т.е. сопровождается выделением теплоты, и реализуется за счет снижения энтальпии системы, при этом должно выполняться неравенство $|\Delta H| > |TdS|$; эти системы имеют на фазовой диаграмме нижнюю критическую точку расслоения (НКТР).

Обратные процессы - расслоения на фазы однородной системы, если система при изменении внешних условий (понижение или повышение температуры), также будут самопроизвольными и должны подчиняться условию $\Delta G < 0$. Для систем типа(1) с ВКТР процесс расслоения на фазы с понижением температуры сопровождается выделением теплоты ($\Delta H < 0$) и уменьшением энтропии ($\Delta S < 0$), при этом должно выполняться условие $|\Delta H| > |TdS|$, т.е. самопроизвольность процесса обеспечивается ростом упорядоченности системы в целом. Для систем типа(2) с НКТР процесс расслоения на фазы с ростом температуры сопровождается поглощением теплоты ($\Delta H > 0$) и увеличением энтропии ($\Delta S > 0$), при этом должно выполняться условие $TdS > \Delta H$, т.е. самопроизвольность этого процесса обеспечивается снижением упорядоченности системы в целом.

Эти расслаивающиеся двухкомпонентные системы имеют аналоги среди однокомпонентных систем, в которых реализуются неравновесные фазовые переходы: для систем вида (1) это конденсация переохлажденного пара или кристаллизация переохлажденной жидкости ($\Delta H < 0$, $\Delta S < 0$), для систем вида (2) это вскипание перегретой жидкости ($\Delta H > 0$, $\Delta S > 0$).

Переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при росте скорости потока, т.е. при увеличении гидродинамической составляющей энтальпии и аналогичен росту температуры для расслаивающихся систем с НКТР. Эта аналогия позволяет заключить, что при переходе от ламинарного течения к турбулентному $\Delta H > 0$ и $\Delta S > 0$, т.е. происходит "поглощение" энтальпии потока (гидродинамической составляющей) и преобразование ее в форму хаотического вихревого движения: снижение энтальпии и увеличение энтропии потока. Увеличение суммарной энтропии потока происходит не только в результате увеличения молекулярной составляющей энтропии при его торможении, но и за счет увеличения вихревой составляющей энтропии - хаотической формы аккумулялирования энергии.

Таким образом, в формулируемом термодинамическом подходе для характеристики движущегося потока используется не только гидродинамическая составляющая полной энтальпии, но и вводится гидродинамическая составляющая "полной"энтропии (последняя включает хаотическую форму аккумулялирования энергии в виде двух составляющих молекулярной и вихревой).

Развиваемый подход корреспондируется с концепцией термодинамики иерархических систем, общие принципы построения которой разработаны в работах Г.П. Гладышева [11]. Правомерность этой концепции обусловлена тем, что фазовые переходы

происходят не только в молекулярных системах: жидкость - пар (испарение, конденсация), жидкость - твердое тело (плавление, кристаллизация), пар - твердое тело (возгонка, конденсация), но и в системах надмолекулярного структурного уровня: критическая опалесценция, коалесценция, коагуляция и золь-гель переход в дисперсных системах [15], переход клубок-глобула в полимерных системах [16, 17], расслаивание в полимерных системах с формированием надмолекулярных структур и структур типа взаимопроникающих сеток [18–19], спиновальный распад твердых растворов [20], критическая опалесценция [22]. В рамках этого обобщения "переходные" и развитые (хаотичные) турбулентные структуры должны быть отнесены к надмолекулярным структурам мезомасштабного структурного уровня.

Для фазовых переходов, протекающих с формированием надмолекулярных структур, как хорошо известно, применимы принципы термодинамики. В связи с этим представляет интерес распространить эти принципы на ламинарно-турбулентный переход. На первом этапе необходимо изучить потенциальные возможности рассматриваемой системы, т.е. термодинамическую обусловленность процесса (в данном случае - расслоения на фазы турбулентной и нетурбулентной жидкостей первоначально однородной системы). На втором этапе следует исследовать кинетические "траектории" эволюции системы от начального к конечному состоянию.

Чтобы изначально не загромождать исследуемый объект деталями, следует выделить из него только гидродинамическую составляющую, т.е. в терминах термодинамики из полной энтальпии потока выделить гидродинамическую составляющую, оставив вне рассмотрения (на этом этапе) физическую и химическую (для горения) составляющие.

В последующем, естественно, необходимо будет ввести взаимодействие между подсистемами молекулярной и гидродинамической. Если такой иерархический подход окажется работоспособным (в рамках своих возможностей), то его можно будет распространить и на более сложные системы (сжимаемый газ, реагирующие газы). Результатом на этом этапе, как предполагается, должно стать качественно верное описание эволюции гидродинамических систем. В случае положительного результата предполагается изучить вопрос о том, как данный (термодинамический) подход корреспондируется с другими подходами, используемыми в теории турбулентности в рамках механики сплошной среды.

Таким образом, предполагается, что существует глубокая аналогия между неравновесными фазовыми переходами и ламинарно-турбулентным переходом. Это позволяет распространить термодинамический подход, в частности подход теории Кана-Хилларда, на это гидродинамическое явление. В связи с этим возникает задача построения потенциала Гинзбурга-Ландау для гидродинамической системы. Этот потенциал ниже конструируется феноменологически. В последующем, для обоснования формы такого представления могут быть использованы статистические приемы.

2.2 Гидродинамический потенциал (случай адиабатического процесса)

Под адиабатическим гидродинамическим процессом в данном случае понимается процесс, который не имеет источников и стоков теплоты, т.е. теплота не участвует в формировании хаотической вихревой структуры потока ("механизм Крокко") и вихревая структура путем диссипации не дает вклада в теплоту потока ("меха-

низм Ричардсона"). Эти механизмы в последующем должны быть отражены, но для тестирования возможностей формулируемого подхода их следует исключить.

Исходные положения энергетического подхода, проиллюстрированные выше на простейшем примере, далее использованы для построения математической модели ламинарно-турбулентного перехода.

Для неоднородного плоскопараллельного потока, имеющего скорости слоев w , можно определить усредненную макроскорость потока U , определяемую моделью сплошной среды, и относительную локальную микроскорость $u = w - U$, которую по аналогии с функцией в уравнении Шредингера, мы не можем определить детерминированно, но кинетическую энергию $\frac{1}{2}u^2 = E$, равную внутренней энергии, мы определяем как переменную сплошной среды.

Термодинамическую систему "движущийся поток" глобально следует характеризовать кинетической энергией $\frac{1}{2}U^2$ ламинарного потока. Величина $\frac{1}{2}\varrho U^2$ дает ту часть энтальпии потока, которая характеризует его как термодинамическую систему ламинарного потока. Грубо говоря, инструментом замера неоднородного потока у нас служат параметры механики сплошной среды. В этих параметрах неоднородной среде отвечает ламинарный поток с избыточной энергией ("беременный" турбулизацией).

В адиабатическом процессе работа затрачивается на увеличение внутренней энергии рабочего тела, т.е.

$$E = c_v(T - T_0)$$

другая форма уравнение адиабатического процесса:

$$\frac{P}{\varrho^\gamma} = \frac{P_0}{\varrho_0^\gamma} = \text{const}, \quad \frac{P}{P_0} = \frac{\varrho^\gamma}{\varrho_0^\gamma}, \quad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{P^{1/\gamma}}{P_0^{1/\gamma}}.$$

Здесь

$$U_0, \varrho_0, P_0, T_0, \quad (3)$$

параметры однородного потока (скорость, плотность, давление и температура).

Используем первую форму уравнения адиабатического процесса. Уравнение состояния идеального газа

$$\frac{P}{\varrho} = RT,$$

где $R = c_p - c_v$, $\frac{c_p - c_v}{c_v} = \gamma - 1$, откуда

$$\frac{c_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

Таким образом,

$$T = \frac{1}{R} \frac{P}{\varrho}, \quad E = \frac{c_v}{R} \left(\frac{P}{\varrho} - \frac{P_0}{\varrho_0} \right) = \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{P}{\varrho} - \frac{P_0}{\varrho_0} \right) = \frac{1}{(\gamma - 1)\varrho} \left(P - \frac{P_0}{\varrho_0} \varrho \right).$$

Отсюда получаем уравнением состояния адиабатического процесса

$$P = (\gamma - 1)\varrho E + \frac{P_0}{\varrho_0} \varrho, \quad (4)$$

которое мы используем ниже, где γ - показатель адиабаты.

Глобальную неоднородность системы можно характеризовать как неоднородность распределения энтальпии по потоку

$$\begin{aligned}(\gamma - 1)\varrho dE - \varrho PdV &= d((\gamma - 1)\varrho E) - (\gamma - 1)\varrho E \frac{1}{\varrho} d\varrho + \frac{1}{\varrho} Pd\varrho = \\&= d((\gamma - 1)\varrho E) + \left(P - (\gamma - 1)\varrho E\right) \frac{1}{\varrho} d\varrho,\end{aligned}$$

откуда

$$(\gamma - 1)\varrho dE - \varrho PdV = d\left((\gamma - 1)\varrho E + \frac{P_0}{\varrho_0}(\varrho - \varrho_0)\right)$$

$\varrho_0 = \text{const}$ плотность однородного потока. Нормируя, по аналогии с параметром порядка [10], [8], введем параметр турбулизации ξ и параметр β , порожденный сжимаемостью:

$$\xi^2 = \frac{\varrho E}{\frac{1}{2}\varrho U^2}, \quad \beta = \frac{2P_0}{\varrho_0} \frac{(\varrho - \varrho_0)}{\varrho U^2} = \frac{2P_0}{\varrho_0 U_0^2} \frac{(\frac{\varrho}{\varrho_0} - 1)}{\frac{\varrho}{\varrho_0} (\frac{U}{U_0})^2}.$$

Тогда

$$\frac{(\gamma - 1)\varrho E + \frac{P_0}{\varrho_0}(\varrho - \varrho_0)}{\frac{1}{2}\varrho U^2} = (\gamma - 1)\xi^2 + \beta.$$

Феноменологическое определение энтальпии и энтропии. Распределения увеличение энтропии системы при переходе от ламинарного состояния к турбулентному представим в форме энтропии смешения удельных объемов (слоев), имеющих разные значения гидродинамической составляющей энтальпии, при образовании идеальной смеси изменений (при переходе от турбулентного состояния к ламинарному), и составляющей, порожденной сжимаемостью.

$$\begin{aligned}s(\xi) &= -((\gamma - 1)\xi^2 + \beta) \ln \left((\gamma - 1)\xi^2 + \beta\right) - \\&- (1 - (\gamma - 1)\xi^2 - \beta) \ln \left(1 - (\gamma - 1)\xi^2 - \beta\right),\end{aligned}\tag{5}$$

Распределение

$$h(\xi) = (\gamma - 1)\xi^2\tag{6}$$

представляет собой избыточную энтальпию неоднородной термодинамической системы турбулентного потока по сравнению с однородным. Здесь U, ϱ - скорость и плотность ламинарного потока, h, s - удельные величины.

Удельная свободная энергия Гиббса

$$g(\xi) = h(\xi^2) - \alpha(\beta)\xi^2 s(\xi^2),\tag{7}$$

задается в форме уравнения Гиббса-Гельмгольца $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$, где роль температуры играет параметр $\alpha(\beta)\xi^2$, отражающий корреляцию между температурой и энтальпией. Условие турбулентности потока $\xi^2 < \frac{1-\beta}{(\gamma-1)}$.

Заметим, что $\beta \ll 1$, т.е. чем больше $|U|^2$, тем возможна более развитая турбулентность (в этом смысле $\frac{1}{\beta}$ - аналог числа Рейнольдса). Приведем графики удельных энтальпии, энтропии и свободной энергии Гиббса. Эти зависимости проиллюстрированы на рис. 1а-1б. Они даны в безразмерных переменных.

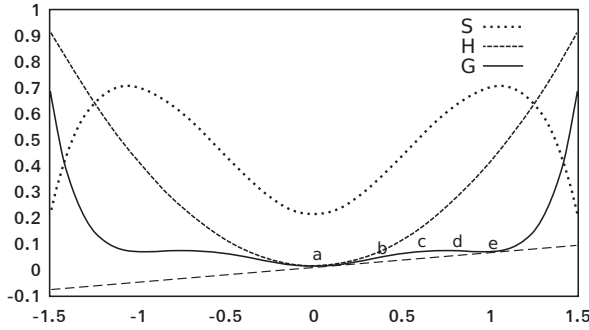


Рис.1a, beta=0.05, alpha=0.4

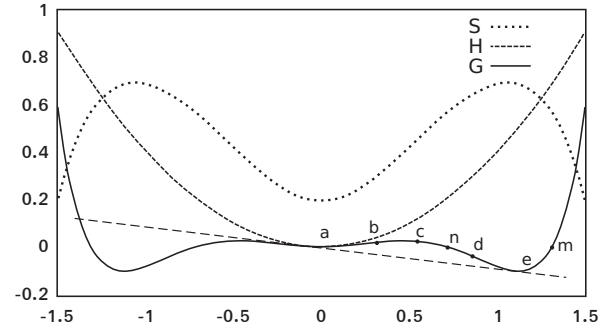


Рис.1b, beta=0.05, alpha=0.6

Какова зависимость свободной энергии Гиббса от параметра β ? Существует критическое β_{cr} , $\beta_{cr} < \frac{1}{2}$, такое, что для $\beta < \beta_{cr}$, на интервале $\xi \in (0, \sqrt{\frac{1-\beta}{\gamma-1}})$ существуют две стационарные точки: максимум и минимум графика $g(\xi)$ для значений α из интервала $(\alpha_1(\beta), \alpha_2(\beta))$. Для предельного значения $\alpha = \alpha_1(\beta)$ график $g(\xi)$ имеет вид параболы с изломом типа рис. 1b.

Внутри интервала $(\alpha_1(\beta), \alpha_2(\beta))$ график $g(\xi)$ имеет вид потенциала Ландау-Гинзбурга. При фиксированном $\beta < \beta_{cr}$ и $\alpha \rightarrow \alpha_2$ точка максимума ξ_{max} графика $g(\xi)$ стремится $\xi_{max} \rightarrow 0$ и потенциал Ландау-Гинзбурга становится потенциалом Жаботинского с точкой уплощения $(0, 0)$. Более того, интервал $(\alpha_1(\beta), \alpha_2(\beta))$ расширяется при $\beta \rightarrow 0 (\alpha_2(\beta) \rightarrow \infty)$.

Приведенное выше построение иллюстрирует тот факт, что термодинамический метод позволяет установить принципиальные возможности эволюции системы (в данном случае стремление к расслоению на турбулентную и нетурбулентную жидкости). Следует отметить, что использованный термодинамический анализ может только обозначить тенденции развития процесса (принципиальную возможность реализации) - выбор траектории эволюции системы, но не скорость этого процесса. Но, в тоже время, этот анализ позволяет заключить, что в потоке существуют области устойчивости ламинарного течения, а также метастабильные и лабильные области, где ламинарное течение неустойчиво.

Это не означает, что в области устойчивости не будут наблюдаться признаки турбулентности при ее развитом состоянии; просто, в этих областях диффузия возмущений будет их размывать, тогда как в областях неустойчивости процесс "отрицательной" (кановской) диффузии будет их концентрировать. Можно предположить, что области неустойчивости гомогенной системы являются источниками возмущений, а области устойчивости - стоками.

Все эти предположения могут быть проверены путем численного эксперимента путем расчетов с использованием математической модели, приведенной ниже, включающей, кроме уравнений гидродинамики (первоначально в самой простой форме), математическую модель неравновесного фазового перехода, сформулированную в терминах теории спинодального распада Кана-Хилларда. Эта математическая модель ламинарно-турбулентного перехода, как аналога неравновесного фазового перехода, может усложняться, начиная с исходной термодинамической модели.

Отметим на графике $g(\xi)$: $a = (\xi_a, g_a)$, $e = (\xi_e, g_e)$ - точки касания двойной касательной, $c = (\xi_c, g_c)$ - максимум, $b = (\xi_b, g_b)$, $d = (\xi_d, g_d)$ - точки перегиба, $n = (\xi_n, 0)$, $m = (\xi_m, 0)$ - точки пересечения кривой с нулевым уровнем свободной энергии Гиббса

$g(\xi)$. Интервал (ξ_a, ξ_e) будем называть областью лабильности параметра ξ турбулизации. **Итак, нам предстоит подтвердить или опровергнуть следующее:**

1) При малых скоростях потока (рис. 1а), малых значений β , кривая свободной энергии полностью лежит в области положительных значений и ламинарное течение для всех слоев жидкости является термодинамически устойчивым. Здесь опорная касательная (двойная касательная), проходящая через точки a, e , имеет положительный наклон, тогда как при больших скоростях (рис. 1б) этот наклон отрицателен.

2) Увеличение скорости потока (уменьшении значений β) наклон двойной касательной становится отрицательным, слои жидкости со значениями параметра турбулизации, лежащими между ξ_b, ξ_d становятся способными к генерации собственных возмущений. Это приводит к самовозбуждению турбулентности (диффузионному расслоению по механизму спинодального распада).

Самопроизвольно образующиеся возмущения при этих скоростях являются внешними по отношению к слоям жидкости со значениями параметра турбулизации, лежащими между ξ_d, ξ_e и ξ_a, ξ_b , в которых диффузионно проникающие из соседних слоев возмущения будут нарастать по причине метастабильного неустойчивого состояния этих слоев. Левее ξ_b и правее ξ_d эти "спинодальные" возмущения должны будут затухать, но в силу своей высокой интенсивности и "концентрации" они, по видимому, могут заполнить все слои жидкости, лежащие непосредственно у стенок канала. Этот процесс будут определяться скоростью диссипации кинетической энергии турбулентности.

Таким образом, генерация энергии турбулентности в форме завихренности происходит самопроизвольно в слоях жидкости, имеющих значения параметра турбулизации между ξ_b, ξ_d , (по механизму спинодального распада). Нарастание энергии турбулентности или завихренности (также как и при спинодальном распаде за счет энергии потока) по нуклеационному механизму (когда возмущения образоваться самопроизвольно не могут, но могут расти, если их размер или интенсивность превышают некоторый критический уровень), происходит в слоях жидкости, имеющих значения параметра турбулизации между ξ_a, ξ_b и ξ_d, ξ_e ; дисперсия - размывание возмущений (завихренности) происходит в слоях жидкости, имеющих значения параметра турбулизации между ξ_e, ξ_m и диссипация энергии турбулентности (затухание возмущений) происходит в слоях, лежащих вблизи стенки канала, а также в ядре потока.

3) Рис. 1б представляет также ситуацию, когда $\xi_b < \xi_n$. В этом случае турбулентность может возникать в слоях жидкости со скоростями, лежащими между точками n, m , но только за счет возмущений извне. В то же время, при ξ , лежащих в интервале ξ_n, ξ_e , эти внешние возмущения будут нарастать (механизм нуклеации), а при значениях ξ , лежащих между ξ_e, ξ_m , возмущения привносимые извне, нарастать не могут, но при этом они не могут и затухать, т.е. они будут диффузионно "размазываться" по этим слоям жидкости.

При диффузионном выходе этих возмущений в интервал скоростей, лежащих правее точки m , они должны будут стремиться к однородному состоянию, поэтому возмущения, диффундирующие от интервала значений ξ_e, ξ_m , должны затухать (хотя кинетика процесса этого затухания может быть сложной из-за немонотонности характера кривой свободной энергии между точками e и m).

3 Ламинарно-турбулентный переход для адиабатического процесса

Перейдем к построению модели ламинарно-турбулентного перехода для адиабатического процесса с уравнениями состояния

$$P = (\gamma - 1)\tilde{\varrho}\tilde{E} + P_0\frac{\tilde{\varrho}}{\varrho_0}, \quad \tilde{T} = \frac{P}{R\tilde{\varrho}}, \quad (8)$$

E - внутренняя энергия, γ - показатель адиабатты, ϱ_0 , U_0 , P_0 , T_0 - плотность, скорость, давление и температура однородной среды, $\tilde{T}$ - температура, R - универсальная газовая постоянная.

Построение опирается, по аналогии с [34], [35], на модель механики сплошных сред - для адиабатического процесса

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\varrho} + \tilde{\varrho}\operatorname{div}\tilde{U} &= 0, \\ \tilde{\varrho}\frac{d}{dt}\tilde{U} + \tilde{\nabla}\tilde{P} &= \tilde{\varrho}\frac{d}{dt}\tilde{U} + \tilde{\nabla}((\gamma - 1)\tilde{\varrho}\tilde{E} + \frac{P_0}{\varrho_0}\tilde{\varrho}), \\ \tilde{\varrho}\frac{d}{dt}\tilde{E} + \tilde{P}\operatorname{div}\tilde{U} &= \tilde{\varrho}\frac{d}{dt}\tilde{E} + ((\gamma - 1)\tilde{\varrho}\tilde{E} + \frac{P_0}{\varrho_0}\tilde{\varrho})\operatorname{div}\tilde{U} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\frac{d}{dt}F = \partial_t F + (U \cdot \partial_x)F$, $\tilde{E} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2\xi^2$.

Перейдем к безразмерным переменным

$$x = \frac{\tilde{x}}{L_0}, \quad t = \frac{\tilde{t}}{t_0}, \quad U = \frac{\tilde{U}}{U_0}, \quad \varrho = \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho_0}, \quad E = \frac{\tilde{E}}{U_0^2},$$

где $L_0 = U_0 t_0$. В безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varrho + \varrho\operatorname{div}U &= 0, \\ \varrho\frac{d}{dt}U + \nabla\left(\frac{P}{\varrho_0 U_0^2}\right) &= \varrho\frac{d}{dt}U + \nabla((\gamma - 1)\varrho E + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2}\varrho), \\ \varrho\frac{d}{dt}E + \frac{P}{\varrho_0 U_0^2}\operatorname{div}U &= \varrho\frac{d}{dt}E + ((\gamma - 1)\varrho E + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2}\varrho)\operatorname{div}U = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $E = \frac{1}{2}U^2\xi^2$.

Вводя вязкость ν во второе уравнение и накачку внутренней энергии в третье, в переменных (ϱ, U, ξ) получим моделирование ламинарно-турбулентного перехода

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varrho + \varrho\operatorname{div}U &= 0, \\ \frac{d}{dt}U + \frac{1}{\varrho}\nabla\left(\frac{1}{2}\varrho(\gamma - 1)\xi^2|U|^2 + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2}\varrho\right) &= \frac{\varepsilon}{\varrho}\Delta U, \\ \xi|U|^2\left\{\varrho\left[\frac{d}{dt}\xi - (\gamma - 1)\xi^2 U \cdot \nabla\xi - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\xi^3 \frac{1}{|U|^2} U \cdot \nabla(|U|^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \xi U \cdot \left(\frac{1}{2}(\gamma - 1) + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2} \frac{1}{\varrho|U|^2}\right)\nabla\varrho + \left(\frac{1}{2}(\gamma - 1)\xi + \frac{P_0}{\xi U^2 \varrho_0 U_0^2}\right)\operatorname{div}U\right]\right\} = \\ &= \xi|U|^2\operatorname{div}\left(\frac{D}{\varrho T}\nabla\mu\right) = \xi|U|^2\operatorname{div}\left(\frac{RD}{\varrho\left((\gamma - 1)E + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2}\right)}\nabla\mu\right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\varepsilon = 1/Re_0$, $Re_0 = \frac{\varrho_0 L_0 U_0}{\nu}$ - число Рейнольдса однородного потока, ν - динамическая вязкость среды, $D = \frac{D_*}{L_0 U_0}$, D_* - коэффициент подвижности (см. [24]) и температура

$$\tilde{T} = U_0^2 T, \quad T = \frac{1}{R}((\gamma - 1)E + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2}) = \frac{(\gamma - 1)}{R}E + \frac{T_0}{U_0^2}.$$

Согласно Ландау-Гинзбургу, химический потенциал

$$\mu = A \varrho^2 U^2 \partial_\xi \left(h(\xi) - \alpha(\beta) \xi^2 s(\xi) \right) - \varepsilon^2 \Delta \xi,$$

где A - подборочный параметр. Таким образом

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varrho + \varrho \operatorname{div} U &= 0, \\ \frac{d}{dt} U + \frac{1}{\varrho} \nabla \left(\frac{1}{2} \varrho (\gamma - 1) \xi^2 |U|^2 + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2} \varrho \right) &= \frac{\varepsilon}{\varrho} \Delta U, \\ \varrho \left[\partial_t \xi + (1 - (\gamma - 1) \xi^2) U \cdot \nabla \xi - \frac{1}{2} (\gamma - 1) \xi^3 \frac{1}{|U|^2} U \cdot \nabla (|U|^2) - \right. \\ &\quad \left. - \xi U \cdot \left(\frac{1}{2} (\gamma - 1) + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2} \frac{1}{\varrho |U|^2} \right) \nabla \varrho + \left(\frac{1}{2} (\gamma - 1) \xi + \frac{P_0}{\xi U^2 \varrho_0 U_0^2} \right) \operatorname{div} U \right] = \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{D}{\varrho \left(\frac{(\gamma-1)}{R} E + \frac{T_0}{U_0^2} \right)} \nabla \left(A \varrho^2 U^2 \partial_\xi \left(h(\xi) - \alpha(\beta) \xi^2 s(\xi) \right) - \varepsilon^2 \Delta \xi \right) \right), \end{aligned} \tag{12}$$

Как видим, предельная ситуация $\xi = 0$ соответствует несжимаемому $\operatorname{div} U = 0$ (однородному) потоку. В безразмерных переменных $\beta = \frac{2P_0}{\varrho_0 U_0^2} \frac{\varrho - 1}{\varrho U^2}$.

Какие можно сделать выводы: Как видно из третьего уравнения турбулизация тем больше замедляет турбулентный поток, чем больше параметр турбулизации. Это качественно подтверждается экспериментом. Хорошо известно, что ламинарно-турбулентный переход приводит к существенному увеличению сопротивления и сильному локальному нагреву теплонагруженных поверхностей летательных аппаратов [35, 36]. Ниже мы приведем численный эксперимент одномерной модели, подтверждающий термодинамический прогноз 1)-3) сформулированный выше (стр. 17-18).

Как мы отмечали выше, рассмотрение гидродинамических неустойчивостей в [8] ограничилось описанием термоконвекции Бенара и неустойчивости Тейлора для течения Куэтта между вращающимися цилиндрами, а предложенная аналогия с фазовыми переходами использовалась косвенно для интерпретации результатов. Численный эксперимент в приведенной выше модели позволяет прояснить ситуацию относительно одного гидродинамического примера у Хакена - неустойчивости Бенара. Неустойчивость возникает за счет нахождения системы в потенциальном поле тяготения, поэтому добавляется еще одна термодинамическая степень свободы - конвективное движение из-за разницы плотностей при температурном градиенте поперек слоя жидкости (стратификация). Характерным для неустойчивости Бенара является потеря регулярности и переход к нерегулярному режиму конвекции - аналогичному турбулентности.

4 Численный эксперимент

Для простоты будем считать, что

$$\frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2} = 1 \quad \implies \quad \beta = \frac{2(\varrho - 1)}{\varrho U^2}.$$

На интервале $(0, 1)$ рассмотрим начально-краевую задачу для одномерной системы (12)

$$\begin{aligned} (\partial_t + U \partial_x) \varrho + \varrho \partial_x U &= 0, \\ (\partial_t + U \partial_x) U + \frac{1}{\varrho} \partial_x (\varrho (\gamma - 1) \xi^2 U^2 + \varrho) &= \frac{\varepsilon}{\varrho} \partial_x^2 U, \\ \varrho \left[\partial_t \xi + U (1 - (\gamma - 1) \xi^2) \partial_x \xi - \xi \frac{1}{\varrho} \left(\frac{1}{2} (\gamma - 1) U + \frac{1}{U} \right) \partial_x \varrho + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{2} (\gamma - 1) \xi + \frac{1}{\xi U^2} - (\gamma - 1) U \xi^3 \right) \partial_x U \right] = \\ &= \partial_x \left(\frac{RD}{\varrho ((\gamma - 1)E + 1)} \partial_x \left(A \varrho^2 U^2 \partial_\xi \left(h(\xi) - \alpha(\beta) \xi^2 s(\xi) \right) - \varepsilon^2 \partial_x^2 \xi \right) \right), \end{aligned} \quad (13)$$

Данные Коши и граничные условия

$$\xi|_{t=0} = \xi^0(x), \quad \varrho|_{t=0} = \varrho^0(x), \quad U|_{t=0} = U^0(x), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varrho|_{x=0} &= \varrho_0^b, \quad U|_{x=0} = U_0^b, \quad \varrho|_{x=1} = \varrho_1^b, \quad U|_{x=1} = U_1^b, \\ \partial_x \xi|_{x=0} &= \partial_x \xi|_{x=1} = 0, \quad \partial_x \mu|_{x=0} = \partial_x \mu|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Требуется условия согласования $\varrho^0(0) = \varrho_0^b(0)$, $\varrho^0(1) = \varrho_1^b(0)$, $U^0(0) = U_0^b(0)$, $U^0(1) = U_1^b(0)$.

Мы решаем смешанную задачу (13), (14) численно и исследуем неустойчивые решения с хаотическим поведением. Для численного решения используется разностная схема. Условия численной устойчивости выполнены, поэтому мы изучаем неустойчивости, возникающие из-за самих физических процессов.

По аналогии с [30] доказывается, что на конечном, не зависящем от ε интервале справедлива оценка $\frac{|\operatorname{div} U|}{|\xi|} \leq \operatorname{const}$. Это утверждение позволяет перейти при численном счете к регуляризации

$$\frac{1}{\xi} = \begin{cases} \frac{1}{\xi}, & \text{при } |\xi| \geq \varepsilon^3, \\ \frac{1}{\varepsilon^3 \operatorname{sign} \xi}, & \text{при } |\xi| < \varepsilon^3. \end{cases}$$

Теперь вернемся к приведенному выше прогнозу развития турбулизации потока, полученному исследованием структуры потенциала свободной энергии Гиббса. На приводимых ниже рисунках каждые две точки соединяются отрезком прямой, начальное условие тоже самое, а последующие сглаживаются кубическим сплайном. Мы покажем, что при разных сценариях развития турбулентности (слабой или развитой турбулизации) в адиабатическом потоке результирующий процесс приводит к нагреванию ламинарного течения.

В первом численном эксперименте в качестве данных Коши $\varrho^0(x)$, $U^0(x)$, $\xi^0(x)$ рассматривается локальное возмущение однородного потока $(\xi_0^0, \varrho_0^0, U_0^0)$:

$$\begin{aligned}\varrho^0(x) &= \varrho_0^0 = \text{const}, \quad U^0(x) = U_0^0 = \text{const}, \\ \xi^0(x) &= \xi_0^0 + (\xi_1^0 - \xi_0^0)(\theta(x - x_1) - \theta(x - x_2)),\end{aligned}\tag{16}$$

где $0 < x_1 < x_2 < 1$ и $0 < \xi_0^0 < \xi_1^0 < \sqrt{\frac{1-\beta}{\gamma-1}}$. Это определяет начальное значение

$$\beta^0 = \frac{2(\varrho_0^0 - 1)}{\varrho_0^0 (U_0^0)^2}$$

и предельные значения $\xi^\pm(\beta^0)$, $|\xi^\pm(\beta^0)| \leq \sqrt{\frac{1-\beta}{\gamma-1}}$, определяемые опорной касательной (см. Рис. 1а).

Для симметричного потенциала (см. Рис. 1b) опорная касательная горизонтальна и $\xi^\pm$ определяются отрицательными точками минимума $(\xi^-, g(\xi^-))$, $(\xi^+, g(\xi^+))$.

Выше мы уже приводили аналогию с уравнением Шредингера. Физический смысл имеет $|\xi| = \sqrt{2E/U^2}$. Условие согласования

$$\max(\xi^-, 0) < \xi_0^0 < \xi_1^0 < \xi^+.$$

В дальнейшем будем считать $\varepsilon = 0, 1$. Представленная на Рис. 1а ($U_0^0 = 1, 4$, $\xi_0^0 = 0, 5$, $\xi_1^0 = 0, 6$, $\varrho_0^0 = 2$) ситуация скоростей потока, когда кривая свободной энергии $g(\xi)$ полностью лежит в области положительных значений и ламинарное течение для всех слоев жидкости является термодинамически устойчивым.

Здесь двойная касательная (опорная касательная), проходящая через точки a, e , имеет положительный наклон и для определяемых ею предельных значений $\xi^\pm$ для ξ в модели Кана-Хилларда имеем $\xi^- > 0$. В этом первом численном эксперименте для задачи (13)-(15) мы задаем начальным условием (16) затравку параметра турбулизации ξ (затравку турбулентности), т.е. рассматриваем возмущение однородного состояния

$$\varrho_0^b = \varrho_1^b = 2, \quad U_0^b = U_1^b = U_0^0 = 1, 4, \quad \xi_0^0 = 0, 5.\tag{17}$$

На Рис. 1b видно, что в рассматриваемом нами случае $g(\xi) > 0$ для всех $|\xi| < \sqrt{\frac{1-\beta}{\gamma-1}}$. В этом случае значения ξ_0^0, ξ_1^0 параметра турбулизации лежат между ξ_a и ξ_e , в зоне лобильности, потенциал в случае когда двойная касательная имеет положительный наклон. В этом случае есть возмущение внутренней энергии за счет возмущения извне, которое переходит в возмущение ламинарного потока. Как мы покажем ниже в этом случае достаточно быстро слабо $\xi(x, t) \rightarrow 0$ стремиться к нулю, таким образом, возмущение однородного потока диффундирует к его начальному состоянию. Такой набор параметров будем называть глобально устойчивым.

На Рис. 2ab четыре временных сечения ($t = 0, 00001$, $t = 0, 0001$, $t = 0, 001$, $t = 0, 01$, $t = 0, 02$) графика ξ , на Рис. 2cd те же четыре временных сечения графиков ϱ и U соответственно.

Как мы видим, возмущения, привносимые извне, нарастать не могут, они диффузионно "размазываются" по этим слоям жидкости, затухая достаточно быстро. Таким образом, мы в этом случае подтверждаем сформулированную выше гипотезу. Более того, видно (см. Рис. 2a,c,d), что фронты едут направо, тормозясь при увеличении модуля $|\xi|$ параметра турбулизации, т.е. с развитием турбулентности, что соответствует эксперименту. С возрастанием времени слабо $\xi(x, t) \rightarrow 0$, таким образом, возмущение однородного потока диффундирует к его начальному состоянию.

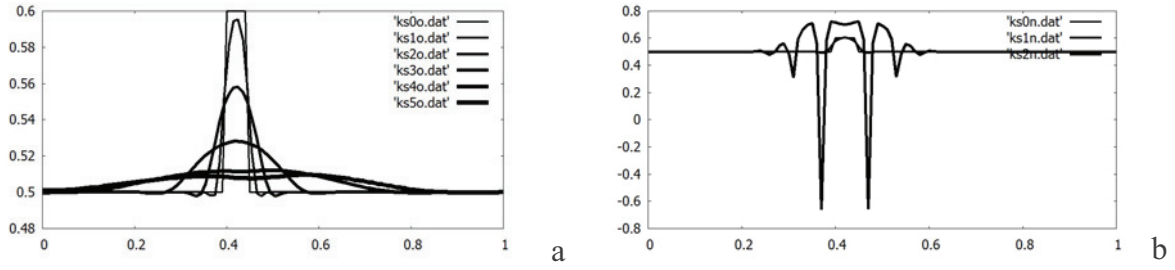
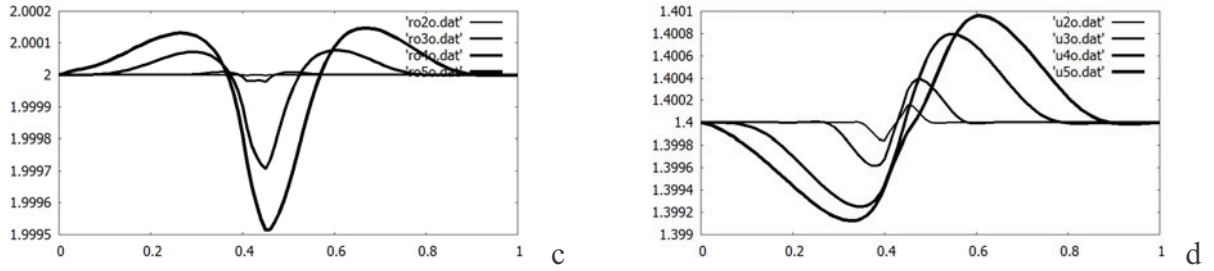


Рис. 2.

(а) Численное решение системы (ξ) для малого временного интервала с $U_0^0 = 1.4$, соответствие времен $t = 0, 00001, t = 0, 0001, t = 0, 001, t = 0, 01, t = 0, 02$. Так что, все ρ и u , фактически, - константы, (б) Численное решение системы (ξ) для малого времен с $U_0^0 = 1, 5$ (см. Рис. 2ab).



(с) Численное решение системы (ρ) для малого временного интервала с $U_0^0 = 1.4$, соответствие времен $t = 0, 00001, t = 0, 0001, t = 0, 001, t = -0, 01, t = 0, 02$, (d) Численное решение системы (U) с теми же параметрами, что и (а) (см. Рис. 2cd).

4.1 Коррекция потенциала

Теперь отметим, что на Рис. 2ab приведены четыре временных сечения ($t = 0, 00001, t = 0, 0001, t = 0, 001, t = 0, 01, t = 0, 02$) графика ξ для значений

$$\varrho_0^b = \varrho_1^b = 2, \quad U_0^b = U_1^b = U_0^0 = 1, 5, \quad \xi_0^0 = 0, 5, \quad \xi_1^0 = 0, 6., \quad (18)$$

которые отвечают численному эксперименту той же смешанной задачи (16), (15) для системы (13) в случае симметричного потенциала (см. Рис. 1b), когда опорная касательная горизонтальна и предельные значения $\xi^\pm$ определяются отрицательными точками минимума $(\xi^-, g(\xi^-)), (\xi^+, g(\xi^+))$.

Из эксперимента известна полостчатая структура турбулентного потока, в котором перемежаются зоны с большой и малой турбулизацией (см. [35], [36]). Для симметричного потенциала $g(\xi)$ накачка внутренней энергии, вводимая оператором Кана-Хилларда в правой части третьего уравнения а (13), предельные значения $\xi^- = -\xi^+$ определяются отрицательными минимумами $((\xi^\pm, g(\xi^\pm)))$ потенциала $g(\xi)$. Это определяет одинаковые, по сути, амплитуды $|\xi(x, t)|$ в соседних областях полостчатой структуры решения. Этот факт требует коррекции потенциала.

Определим коррекцию $\tilde{g}(\xi)$ потенциала $g(\xi)$, при которой возрастание скорости U (убывание параметра $\beta(|U|)$) приводит к отрицательному наклону опорной касательной (см. Рис. 1b).

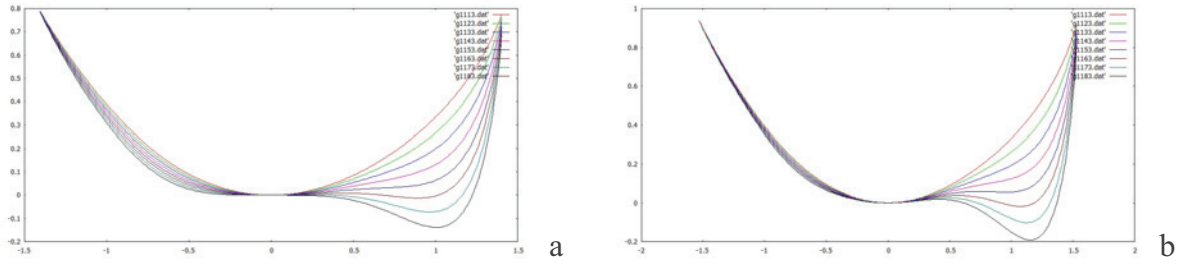


Рис. 3.

(а) Потенциал свободной энергии $\hat{g}$ для $\beta = 0, 1$, $\alpha = 0, 1, \dots, 0, 8$, (б) Потенциал свободной энергии $\hat{g}$ для $\beta = 0, 05$, $\alpha = 0, 1, \dots, 0, 8$ (см. Рис. 3аb).

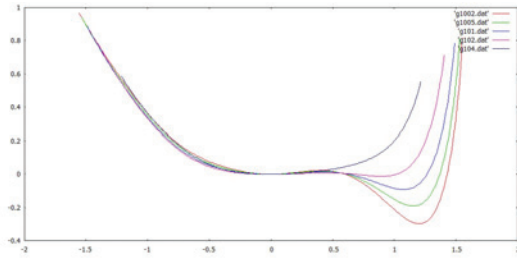


Рис. 4.

Сечения графика результирующего потенциала $\hat{g}$ для $\beta = 0, 4; 0, 2; 0, 1; 0, 05; 0, 02$.

Положим

$$\tilde{g}(\xi) = \begin{cases} g(\xi), & \xi \geq 0, \\ (\gamma - 1)\xi^2 + \alpha\xi^2(\beta \ln((\gamma - 1)\xi^2 + \beta) + \\ + \frac{(1-\beta-(\gamma-1)\xi^2)^6}{(1-\beta)^5} \ln(1 - (\gamma - 1)\xi^2 - \beta)), & \xi < 0. \end{cases} \quad (19)$$

В дальнейшем будем считать что в операторе Кана-Хилларда вместо $g(\xi)$ стоит $\tilde{g}(\xi)$.

Приведем зависимость графиков $\tilde{g}(\xi)$ при фиксированных $\beta = 0, 2$ и $\beta = 0, 005$ от $\alpha = 0, 1, \dots, 0, 8$

По пяти точкам: $(\beta = 0, 4, \alpha = 0, 4)$, $(\beta = 0, 2, \alpha = 0, 6)$, $(\beta = 0, 1, \alpha = 0, 7)$, $(\beta = 0, 05, \alpha = 0, 8)$, $(\beta = 0, 02, \alpha = 0, 9)$ строим функцию $\alpha = \alpha(\beta)$. Подставляем построенное $\alpha(\beta)$ в (19). Приведем графики результирующего потенциала $\hat{g}$:

Теперь приведем результаты численного эксперимента для задачи (13)-(15), для подборочного параметра $A = 0.1$, с начальным условием (16) затравки параметра турбулизации ξ (затравку турбулентности) с новым потенциалом $\hat{g}$ свободной энергии Гиббса, т.е. рассматриваем возмущение однородного состояния вида

$$\varrho_0^b = \varrho_1^b = 2, \quad \beta = 0.1 \Rightarrow U_0^b = U_1^b = U_0^0 = \sqrt{\frac{1}{10}}, \quad \xi_0^0 = 0, 5, \xi_1^0 = 0, 6., \quad (20)$$

когда двойная касательная имеет отрицательный наклон.

Из приведенного ниже численного эксперимента в этом случае получаем развитую турбулентность (процесс типа перекристаллизации [28]), порожденную внешним

воздействием избыточной внутренней энергии начальной затравки параметра турбулизации (затравки внутренней энергии). Затравка порождает развитую турбулентность в которой в последствии идет укрупнение мод осцилляций (как в процессе "хищник-жертва").

В слабом смысле $\xi(t, x)$ при возрастании t стремится к константе ξ_∞^+ . Таким образом, в этом случае поток разогревается и стремится к ламинарному потоку с температурой

$$T(x, t) = \frac{\gamma - 1}{R} E + \frac{T_0}{U_0^2} = \frac{\gamma - 1}{R} \frac{1}{2} U^2 \xi^2 + \frac{T_0}{U_0^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\gamma - 1}{2R} U_\infty^2 (\xi_\infty^+)^2 + \frac{T_0}{U_0^2} > \frac{\gamma - 1}{2R} (U_0^0)^2 (\xi_0^0)^2 + \frac{T_0}{U_0^2}$$

Ниже, на Рис. 5abcdeh шесть временных сечений ($t = 0$; $t = 0,0002$; $t = 0,0004$; $t = 0,001$; $t = 0,002$; $t = 0,01$) графика ξ :

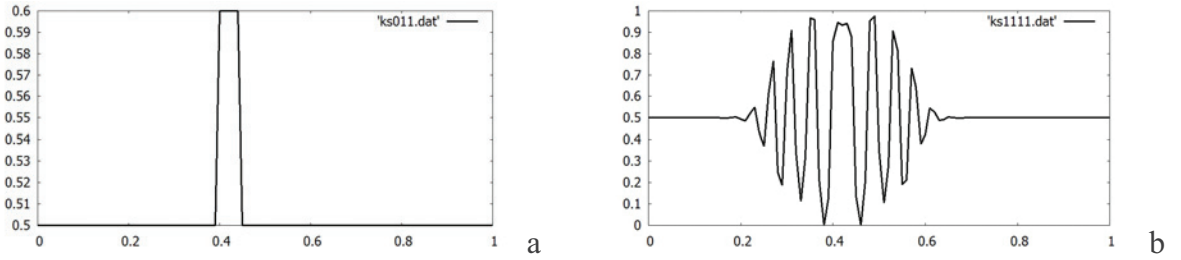
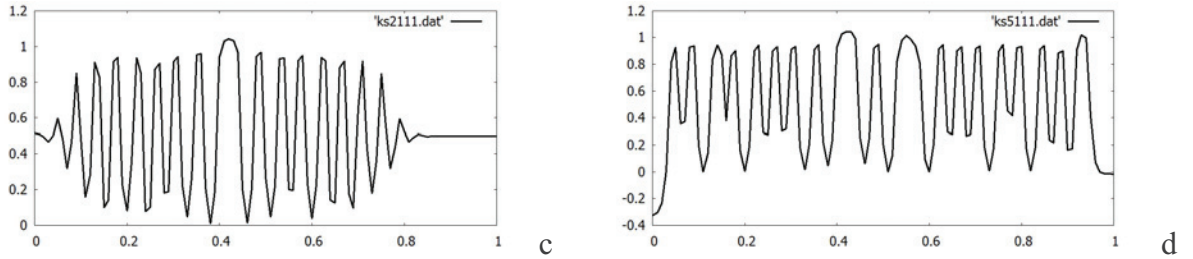
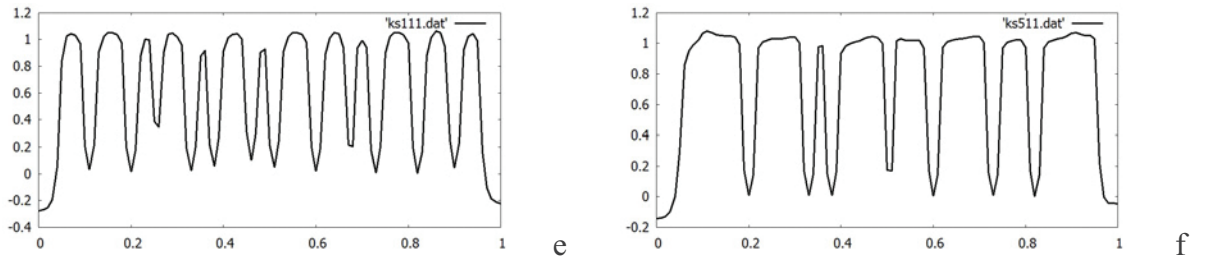


Рис. 5.

(a) Численное решение системы (ξ) для $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0$, (b) Численное решение системы (ξ) временное сечение $t = 0,0002$ (см. Рис. 5ab).



(c) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0,0004$, (d) Численное решение системы (ξ) временное сечение $t = 0,001$ (см. Рис. 5cd).



(e) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0,002$, (f) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 5ef).

На Рис. 6abcdehfg четыре временных сечения ($t = 0; 0,0004; 0,006; 0,01$) графиков ϱ и U соответственно:

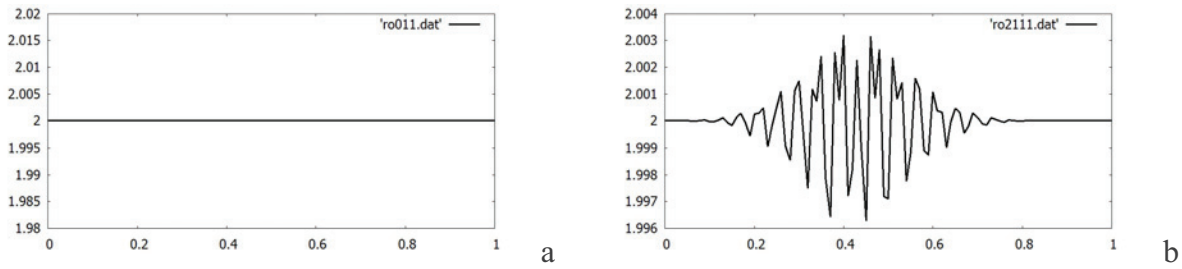
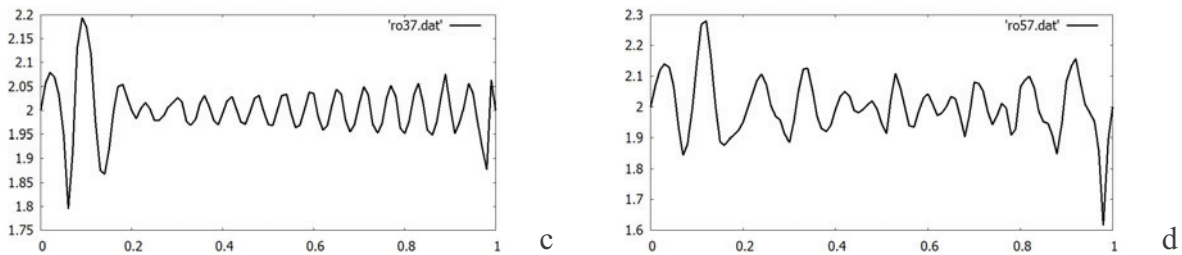
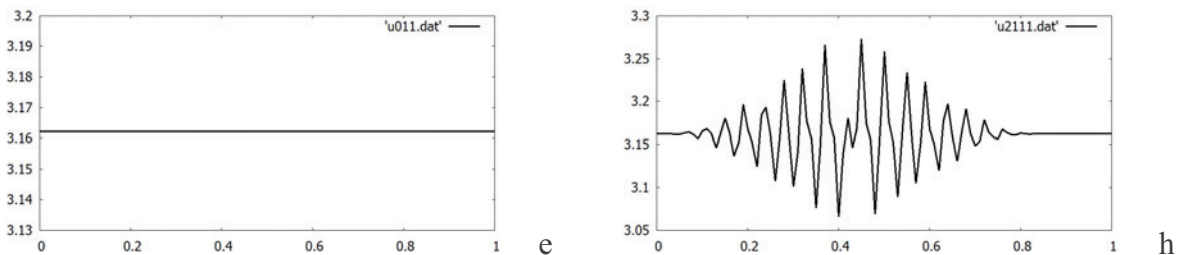


Рис. 6.

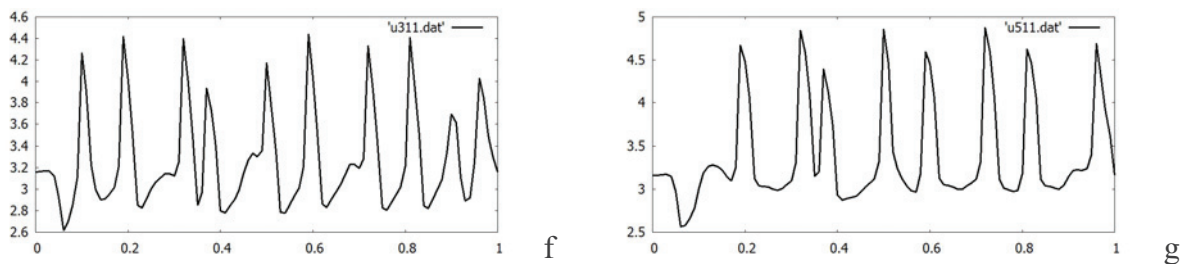
- (a) Численное решение системы (ϱ) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0,0004$,
 (b) Численное решение системы (ϱ) для временного сечения $t = 0,0006$ (см. Рис. 6ab).



- (c) Численное решение системы (ϱ) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0,0004$,
 (d) Численное решение системы (ϱ) для временного сечения $t = 0,0006$ (см. Рис. 6cd).



- (e) Численное решение системы (U) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0,0004$,
 (h) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,0006$ (см. Рис. 6eh).



- (f) Численное решение системы (U) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0,0004$,
 (g) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,0006$ (см. Рис. 6fg).

Как видим, мы получили развитую турбулентность (процесс типа перекристаллизации [28]), порожденную внешним воздействием избыточной внутренней энергии начальной затравки параметра турбулизации (затравки внутренней энергии), что соответствует приведенному выше термодинамическому прогнозу. Затравка порождает развитую турбулентность, в которой в последствии идет укрупнение мод осцилляций (как в процессе "хищник-жертва").

В слабом смысле $\xi(t, x)$ при возрастании t стремится к константе ξ_∞^+ . Таким образом, в этом случае поток разогревается и стремится к ламинарному потоку с температурой

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{\gamma - 1}{R} E + \frac{T_0}{U_0^2} = \frac{\gamma - 1}{R} \frac{1}{2} U^2 \xi^2 + \frac{T_0}{U_0^2} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\gamma - 1}{2R} U_\infty^2 (\xi_\infty^+)^2 + \frac{T_0}{U_0^2} > \frac{\gamma - 1}{2R} (U_0^0)^2 (\xi_0^0)^2 + \frac{T_0}{U_0^2} \end{aligned}$$

4.2 Управляющие параметры самовозбуждения ξ_0^0 и V

В этом параграфе рассмотрим второй случай возмущения однородного потока управлением краевым условием слева, связанный с возможным самовозбуждением турбулизации.

Приведем численный эксперимент смешанной задачи для системы (13) с граничными условиями (15) и

$$U|_{x=0} = U_0^0(1 + Vt), \quad U|_{x=1} = U_0^0, \quad \varrho|_{x=0} = \varrho|_{x=1} = 2, \quad (21)$$

при однородных начальных данных:

$$\xi|_{t=0} = \xi_0^0, \quad \varrho|_{t=0} = 2, \quad U|_{t=0} = U_0^0, \quad (22)$$

U_0^0, V - константы, т.е. возмущение однородного начального состояния управлением $U|_{x=0} = U_0^0(1 + Vt)$ скоростью на входе и начальными данными ξ_0^0 из ядра зоны лабильности и окрестности ее границы.

Увеличение скорости потока приводит к возникновению зоны отрицательных значений потенциала $\hat{g}(\xi)$ (аналог. рис.1b), так что слои жидкости со значениями параметра турбулизации, лежащими между ξ_n и ξ_e (см. рис.1b) становятся способными к генерации собственных возмущений. Это приводит к самовозбуждению турбулентности (диффузионному расслоению по механизму спинодального распада). Такой набор параметров будем называть неустойчивым. Для потока в случае неустойчивого набора параметров небольшие ошибки при моделировании системы (13), (14) по схеме конечных разностей приводит к разрушению ламинарного потока.

Самопроизвольно образующиеся возмущения при этих скоростях являются внешними по отношению к слоям жидкости со значениями параметра турбулизации, где $g(\xi) > 0$, в которых диффузионно проникающие из соседних слоев возмущения будут диффузионно "размазываться". Численный эксперимент показал, что начальные значения ξ_0^0 параметра турбулизации являются управляющими параметрами входа в лобильную зону.

(I) Для начальных значений ξ_0^0 из ядра лабильной зоны, вне ее границы (вне окрестности бинодали, $A = 0,05$, $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$) процесс сильно турбулизуется и в развитии имеет характер процессов "хищник-жертва". Поток

стабилизируется при $t \rightarrow \infty$ к течению, в котором $\xi(x, t) \rightarrow \xi_\infty(\frac{x-U_\infty t}{\varepsilon})$ стремится к бегущей волне $\xi_\infty(\frac{x-U_\infty t}{\varepsilon})$, где $\xi_\infty(x)$ - строго монотонно убывающая функция (типа кинка) с граничными значениями $\xi|_{x=0} = \xi_\infty^+ > 0$, $\xi|_{x=1} = \xi_\infty^- < 0$, (аналог КПП решения).

Для рассматриваемого численного эксперимента $U_\infty > 0$, т.е. фронт бегущей волны движется на лево и, с возрастанием t , бегущая волна слабо стремится к константе $\xi_\infty(\frac{x-U_\infty t}{\varepsilon}) \rightarrow \xi_\infty^+$. Таким образом, результирующе, поток разогревается и стремится к ламинарному потоку с температурой

$$T(x, t) = \frac{\gamma - 1}{R} E + \frac{T_0}{U_0^2} = \frac{\gamma - 1}{R} \frac{1}{2} U^2 \xi^2 + \frac{T_0}{U_0^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\gamma - 1}{2R} U_\infty^2 (\xi_\infty^+)^2 + \frac{T_0}{U_0^2} > \frac{\gamma - 1}{2R} (U_0^0)^2 (\xi_0^0)^2 + \frac{T_0}{U_0^2}.$$

Ниже, на Рис. 7abcdef приводим шесть временных сечений ($t = 0, 0,002; 0,004; 0,006; 0,008; 0,01$) графика ξ :

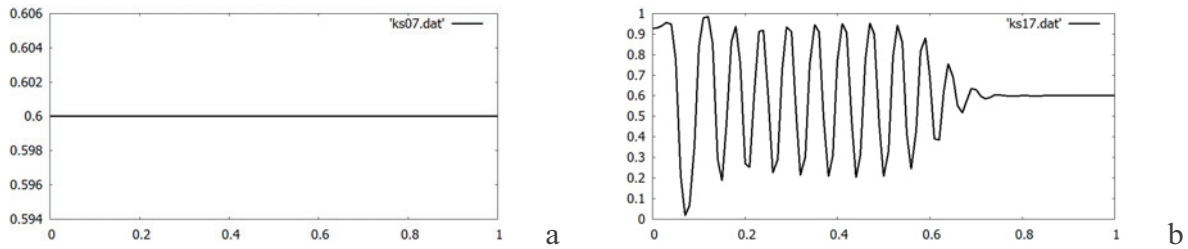
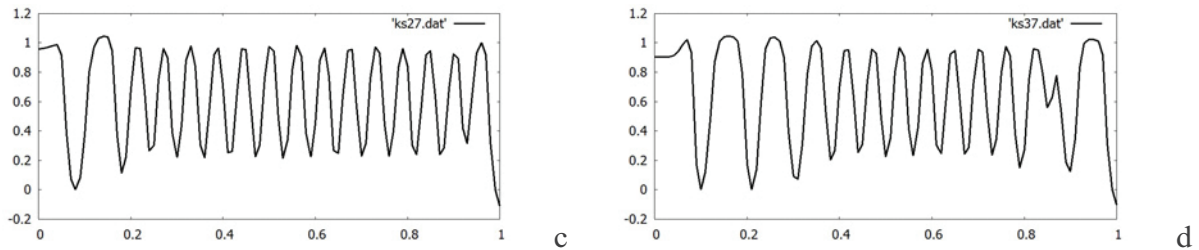
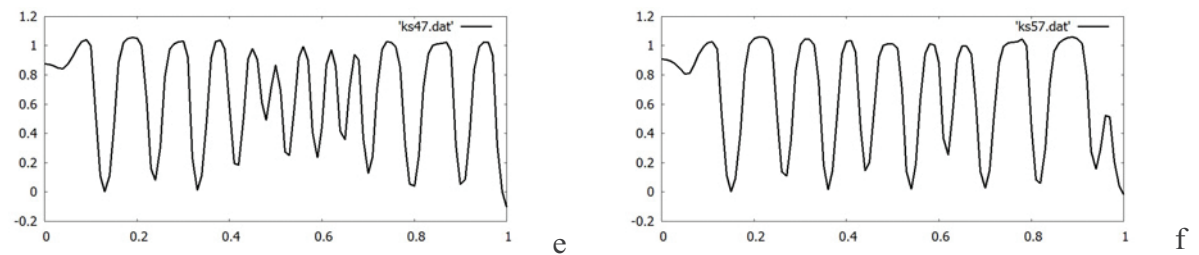


Рис. 7.

(а) Численное решение системы (ξ) для $A = 0,05$, $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$, временное сечение $t = 0$, (б) Численное решение системы (ξ) временное сечение $t = 0,002$ (см. Рис. 7ab).



(с) Численное решение системы (ξ) с $A = 0,05$, $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$, временное сечение $t = 0,004$, (д) Численное решение системы (ξ) временное сечение $t = 0,006$ (см. Рис. 7cd).



(е) Численное решение системы (ξ) с $A = 0,05$, $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$, временное сечение $t = 0,008$, (ф) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 7ef).

На Рис. 8abcdefgh четыре временных сечения ($t = 0, 0002, t = 0, 0004$) графиков ρ и U :

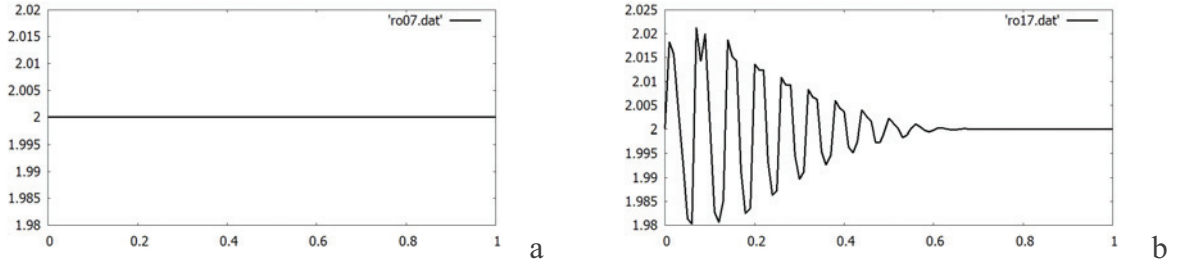
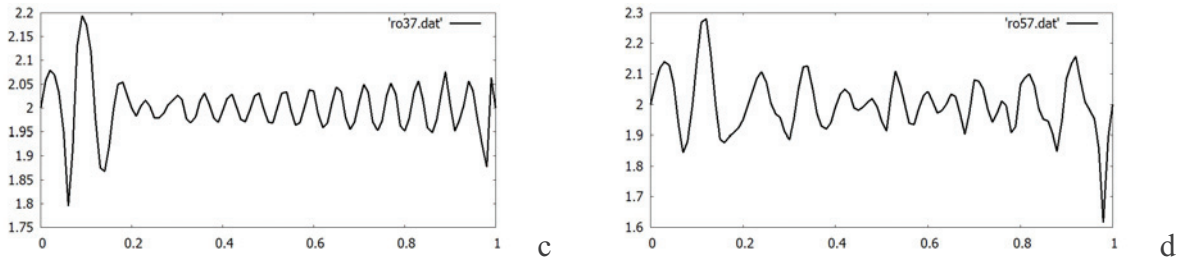
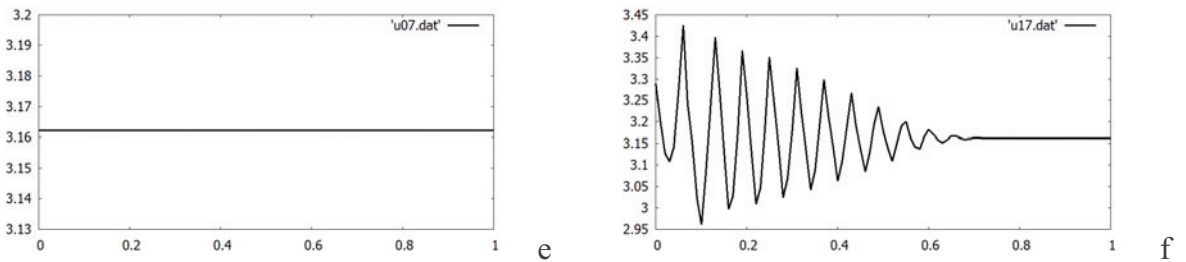


Рис. 8.

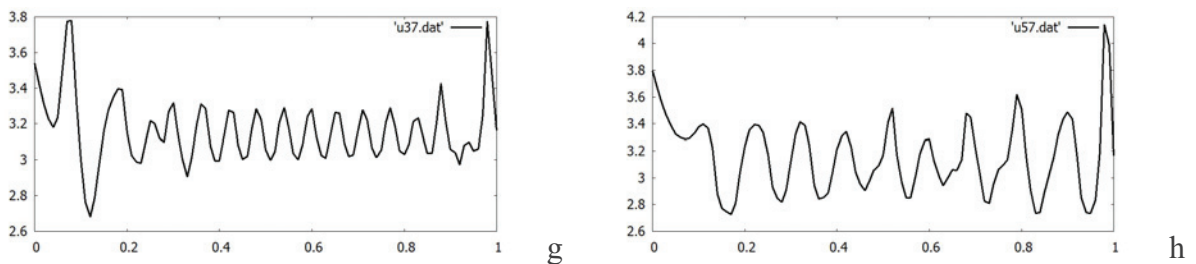
(a) Численное решение системы (ρ) с $A = 0,05$, $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$, временное сечение $t = 0$, (b) Численное решение системы (ρ) для временного сечения $t = 0,002$ (см. Рис. 8ab).



(c) Численное решение системы (ρ) с $A = 0,05$, $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$, временное сечение $t = 0,006$, (d) Численное решение системы (ρ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 8cd).



(e) Численное решение системы (U) с $A = 0,05$, $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$, временное сечение $t = 0$, (f) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,002$ (см. Рис. 8ef).



(g) Численное решение системы (U) с $A = 0,05$, $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$, временное сечение $t = 0,006$, (h) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 8gh).

Мы видим на приведенных выше рисунках самовозбуждение развитой турбулизации для начальных значений ξ_0^0 из ядра лабильной зоны, имеющее характер процесса "хищник-жертва".

II) Теперь исследуем возможность самовозбуждения в случае положительного наклона опорной касательной к графику свободной энергии Гиббса $\tilde{g}$.

Рассмотрим следующий набор параметров: $A = 1$, $V = 10$, $\beta = 0,3 \Rightarrow U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$ и $\xi = 0,5$. В этом случае самовозбуждение турбулизации развивается на порядок быстрее, чем в случае отрицательного наклона опорной касательной к графику $\tilde{g}$. Процесс стремится к однородному распределению параметра турбулизации $\xi(x, t) \rightarrow \xi_\infty$. Таким образом, процесс стремится к ламинарному ($\xi \equiv \text{const}$) потоку с избыточной внутренней энергией $\xi_\infty > \xi_0^0$.

Для температуры в этом случае имеем

$$T(x, t) = \frac{\gamma - 1}{R} E + \frac{T_0}{U_0^2} = \frac{\gamma - 1}{R} \frac{1}{2} U^2 \xi^2 + \frac{T_0}{U_0^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\gamma - 1}{2R} U_\infty^2 \xi_\infty^2 + \frac{T_0}{U_0^2} > \frac{\gamma - 1}{2R} (U_0^0)^2 (\xi_0^0)^2 + \frac{T_0}{U_0^2},$$

что соответствует разогреву потока. Ниже, на Рис. 9abcde шесть временных сечения ($t = 0$, $t = 0,002$, $t = 0,004$, $t = 0,006$, $t = 0,008$, $t = 0,01$) графика ξ

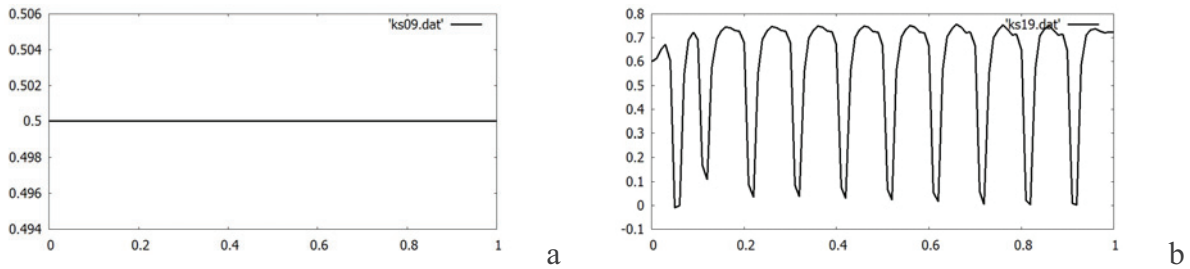
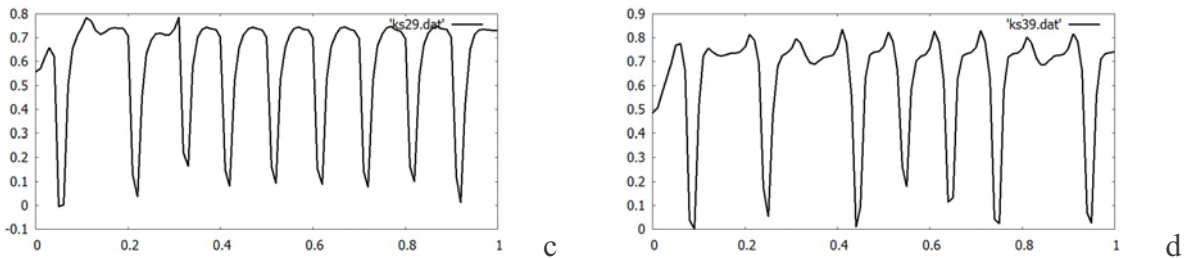
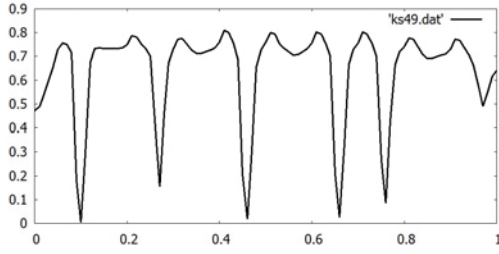


Рис. 9.

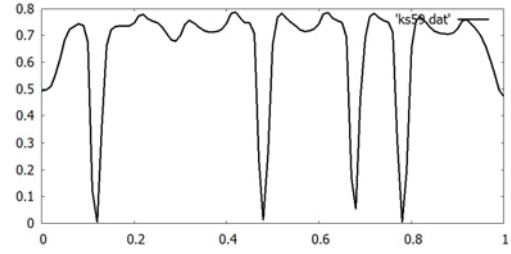
- (a) Численное решение системы (ξ) для $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0$,
 (b) Численное решение системы (ξ) временное сечение $t = 0,0004$ (см. Рис. 9ab).



- (c) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0,0006$, (d) Численное решение системы (ξ) временное сечение $t_3 = 0,0015$ (см. Рис. 9cd).



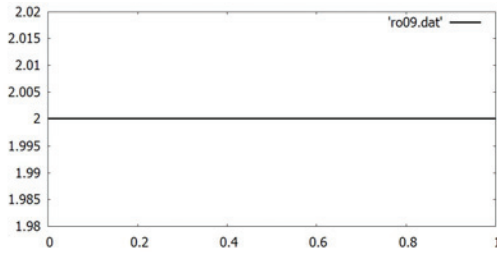
е



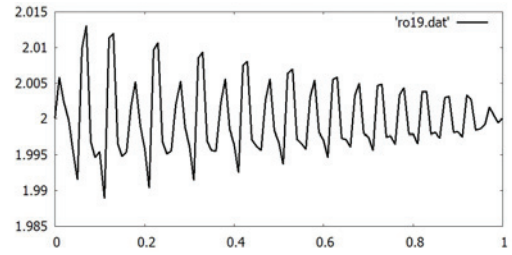
f

- (е) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, временное сечение $t = 0,004$,
 (f) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,005$ (см. Рис. 9ef).

На Рис. 10abcd и 10efgh четыре временных сечения ($t = 0; 0,002; 0,006; 0,01$) графиков ϱ и U



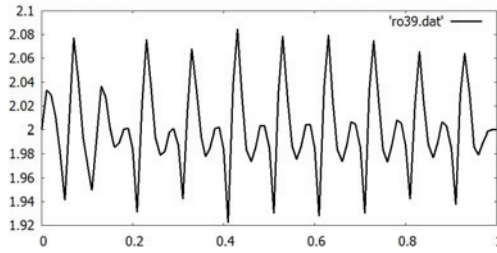
a



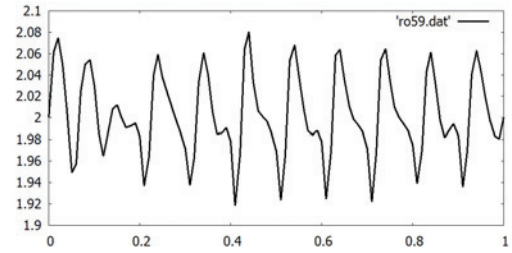
b

Рис. 10.

- (a) Численное решение системы (ϱ) с $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0$, (b) Численное решение системы (ϱ) для временного сечения $t = 0,002$ (см. Рис. 10ab).

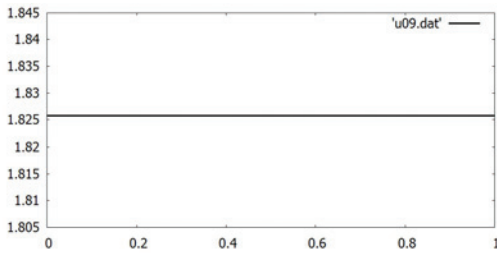


c

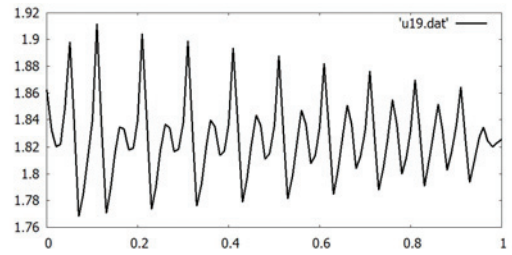


d

- (c) Численное решение системы (ϱ) с $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0,006$, (d) Численное решение системы (ϱ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 10cd).

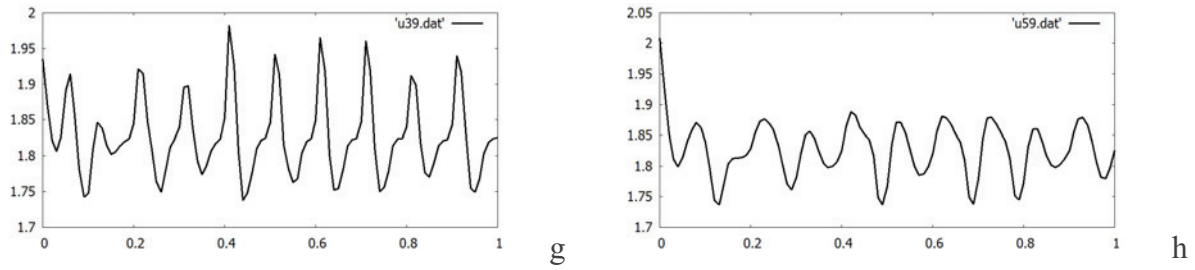


е



f

- (е) Численное решение системы (U) с $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0$, (f) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,002$ (см. Рис. 10ef).



(г) Численное решение системы (U) с $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0,006$, (h) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 10gh).

III) Теперь исследуем зависимость решения задачи о самовозбуждении от выбора скорости V в граничном условии на входе. Для этого сравним два численных эксперимента с параметрами $\xi_0^0 = 0,6$, $A = 0,05$, $V = 10$, $u_0^b(t) = \sqrt{10}(1 + 10t)$ и $\xi_0^0 = 0,6$, $A = 0,05$, $V = 20$, $u_0^b(t) = \sqrt{10}(1 + 20t)$:

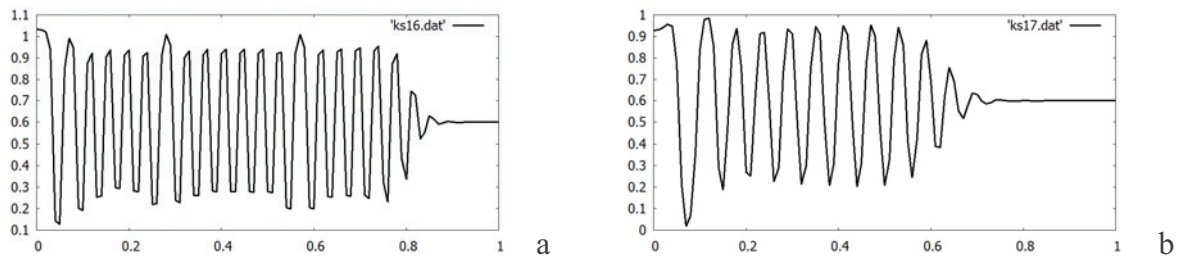
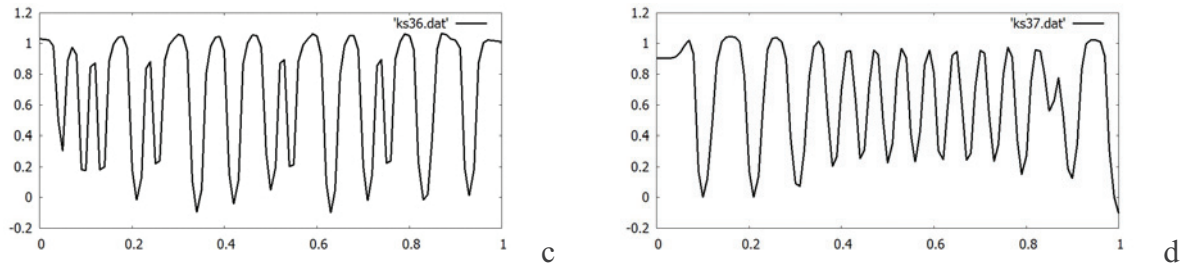


Рис. 11.

(а) Численное решение системы (ξ) с $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0,002$, (b) Численное решение системы (ξ) с $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$ для временного сечения $t = 0,002$ (см. Рис. 11ab).

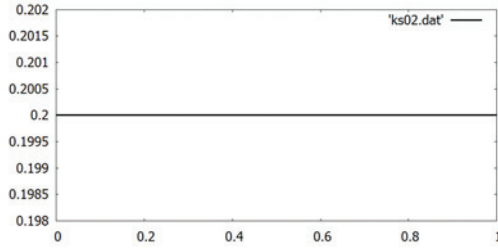


(с) Численное решение системы (ξ) с $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0,006$, (d) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$ для временного сечения $t = 0,006$ (см. Рис. 11cd).

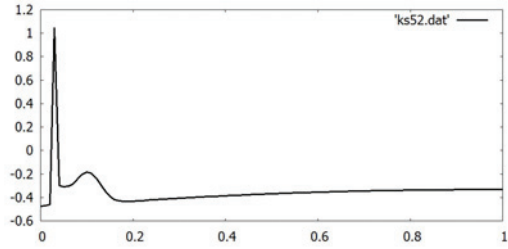
Как видим, есть разница частот, с большей скоростью V более мелкозернистая структура и быстрее переход от мелких мод к крупным, т.е. имеем разную динамику развития турбулизации.

IV) Теперь исследуем начальные значения ξ_0^0 из лабильной зоны, в окрестности ее границы (в окрестности бинодали). Численный эксперимент показывает слабое развитие турбулентности переходящее в диффузию при больших значениях начальной скорости U_0^0 .

IVa) Рассмотрим $\xi_0^0 = 0,2$ для $U_0^b = \sqrt{50}$, $\varrho^0 = 2$ с граничным условием $U_0^b(t) = \sqrt{50}(1 + 2t)$. Ниже, на Рис. 12abcd приводим четыре временные сечения ($t = 0, 0,01, 0,016, 0,02$) графика $\xi(x, t)$, на Рис. 12efgh два временных сечения ($t = 0,01, 0,02$) графиков $\varrho(x, t)$, и $U(x, t)$ соответственно:



a

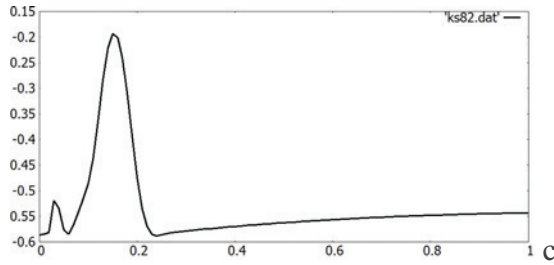


b

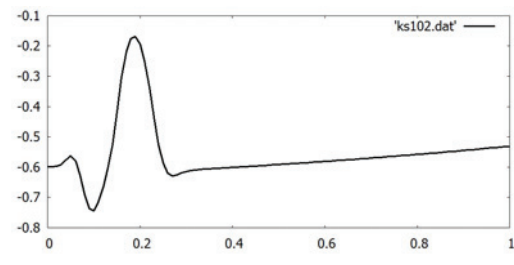
Рис. 12.

(a) Численное решение системы (ξ) с $U_0^b = \sqrt{50}(1 + 2t)$, временное сечение $t = 0$,

(b) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 12ab).



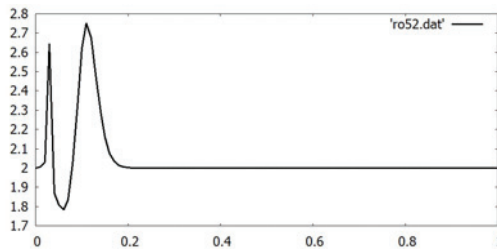
c



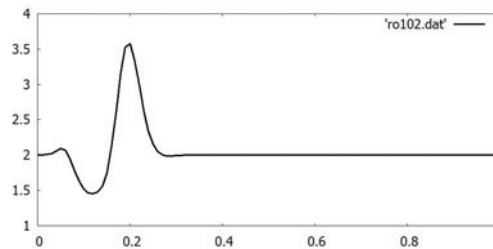
d

(c) Численное решение системы (ξ) с $U_0^b = \sqrt{50}(1 + 2t)$, временное сечение $t = 0,016$,

(d) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,02$ (см. Рис. 12cd).



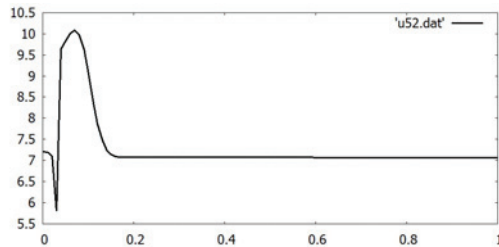
e



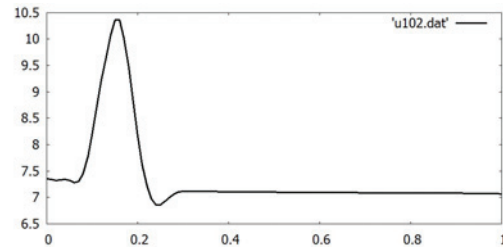
f

(e) Численное решение системы (ϱ) с $U_0^b = \sqrt{50}(1 + 2t)$ временное сечение $t = 0,01$,

(f) Численное решение системы (ϱ) для временного сечения $t = 0,02$ (см. Рис. 12ef).



g



h

(g) Численное решение системы (U) с $U_0^b = \sqrt{50}(1 + 2t)$, временное сечение $t = 0,01$, (h) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,02$ (см. Рис. 12gh).

IVb) Рассмотрим $\xi_0^0 = 1$ для тех же значений $U_0^0 = \sqrt{50}$, $\varrho^0 = 2$ и граничном условии $U_0^b(t) = \sqrt{50}(1 + 2t)$. Ниже приводим временные сечения графиков $\xi(x, t)$, $\varrho(x, t)$, и $U(x, t)$: На Рис. 13abcd приводим четыре временные сечения ($t = 0; 0,004; 0,006; 0,01$) графика $\xi(x, t)$, на Рис. 13efgh два временных сечения ($t = 0,004; t = 0,01$) графиков $\varrho(x, t)$, и $U(x, t)$ соответственно:

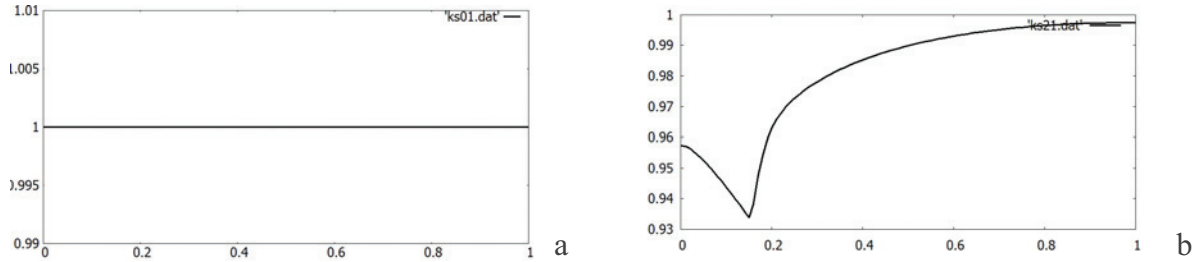
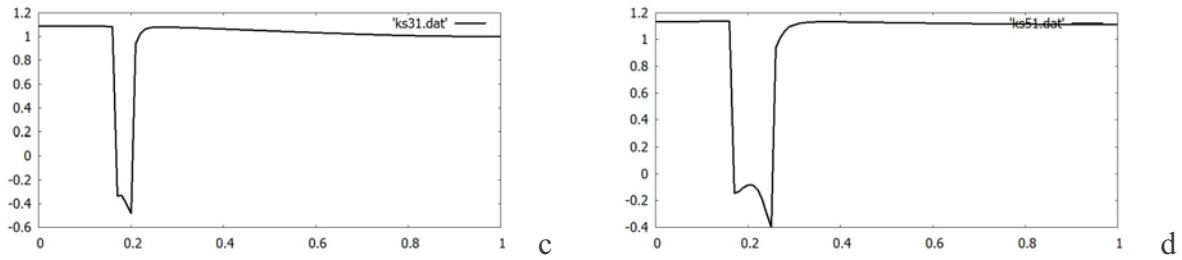
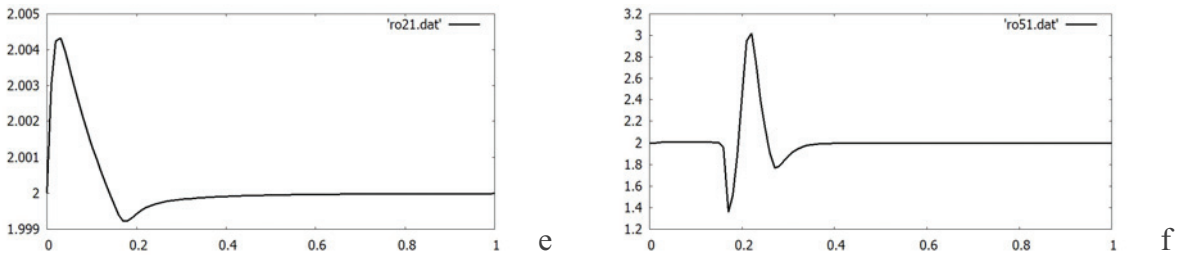


Рис. 13.

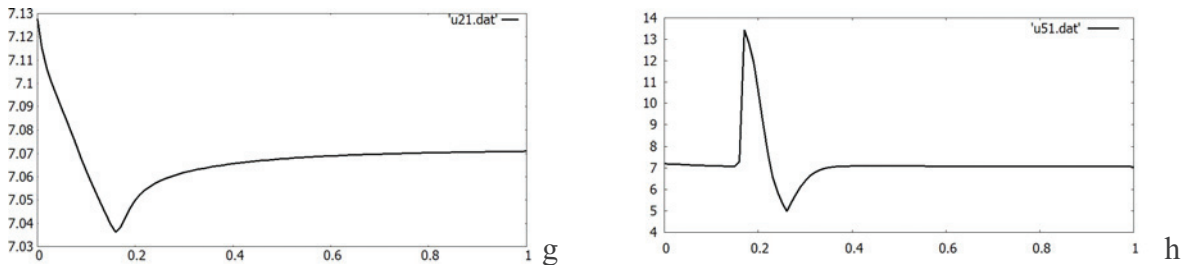
(а) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{50}$, временное сечение $t = 0$, (б) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,004$ (см. Рис. 13ab).



(с) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{50}$, временное сечение $t = 0,006$, (d) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 13cd).



(е) Численное решение системы (ϱ) с $U_0^0 = \sqrt{50}$, временное сечение $t = 0,004$, (f) Численное решение системы (ϱ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 13ef).



(g) Численное решение системы (U) с $U_0^0 = \sqrt{50}$, временное сечение $t = 0,004$, (h) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 13gh).

4.3 Комментарий

1) Мы рассмотрели первый шаг - адиабатический процесс, т.е. постоянная температура и нет источников и стоков. Следующий шаг - включение в свободную энергию Гиббса температуры и энтропии механики сплошных сред (горение). Необходимо построить потенциал свободной энергии Гиббса и энтропию для микро потока в этом случае.

2) В основе статьи лежит концепция ламинарно-турбулентного перехода как фазового перехода. Термодинамические соображения, основанные на этом предположении. Очень существенно предположение о существовании поверхности раздела: турбулентная нетурбулентная жидкость, которая представляется как губка.

3) К этому же относится теория Гинзбурга-Ландау ("губка" - аналог промежуточного состояния в сверхпроводниках). Стоит иметь в виду, что упоминание теории Г-Л означает, что утверждается наличие физической аналогии рассматриваемого явления со сверхпроводниками. Понимаем, что это очень сильное утверждение. Сразу много вопросов; например, есть ли аналог температуры, что такое его критическое значение и т.д. Эта аналогия полезна эвристически, но она не доказательна; если рассматривать физику явления серьезно, то **надо ставить эксперимент с самой "живой" системой**.

Полученные в численном эксперименте результаты действительно интересны, но поскольку они основываются только на правдоподобных соображениях и, по сути, являются формульным описанием сформулированной раньше физической картины, которая сама требует исследования, то их необходимо проверять **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО**.

4) Приведенный численный эксперимент подтвердил термодинамический прогноз причин зарождения и развития турбулентности. Численный анализ - вещь полезная, но она только подтверждает, что с формулами все в порядке и иллюстрирует последнее, облегчая анализ эксперимента. Если картина губки, аналога промежуточного состояния сверхпроводников, имеет место, то это само по себе очень важно. Но в данный момент, это, все же, - гипотеза.

5) Необходимо сравнение результатов предложенной модели с хорошо известными и распространенными реконструкциями турбулентности и, прежде всего, с рассмотренными в [8] гидродинамическими неустойчивостями: описанием термоконвекции Бенара и неустойчивости Тейлора для течения Куэтта между вращающимися цилиндрами.

6) Следующим шагом в моделировании ламинарно-турбулентного перехода является учет геометрии. Как, например, геометрия влияет на турбулизацию потока при обтекании тела? Фактом является то, что гладкую границу хорошо отражает скорость U в модели сплошной среды, поэтому свойства гладкой границы уже учитываются параметром β в свободной энергии Гиббса.

Остается проблема учета "шероховатостей" границы. Можно ли этот фактор учесть модификацией формы потенциала (7)?

Литература

- [1] Rabinovich M.I., Stochastic self-oscillations and turbulence// Advances of Physical Sciences, 1978, 125 (1), pp 123 - 168.
- [2] Sabdenov K.O., Fractal theory is a slow transition from combustion to detonation in gases// The physics of combustion and explosion, in 1995, 32 (6), pp 106 - 112.
- [3] Monin A.S., Theoretical basis of geophysical fluid dynamics// Gidrometeoizdat, M., 1988, 424 p.
- [4] Grek G.R., Kozlov V.V. Chernorai V.G., Hydrodynamic instability of the boundary layer and separated flows (current state of research)// Success Mechanics, 2006, 1, pp 52 - 89.
- [5] Monin A.S., Yaglom A.M., Statistical Fluid Mechanics. Part 1// Science, M., 1965, 640 p.
- [6] Lapin Yu. The turbulent boundary layer in supersonic gas flows// Nauka, M., 1982, 312 pp.
- [7] Kuznetsov V.R., Sabel'nikov V.A., Turbulence and Combustion// Nauka, M., 1986, 288 pp.
- [8] Haken G., Synergetics// Mir, M., 1980, 400 pp.
- [9] Smirnov B.M., Fractal tangle - a new state of matter// Advances of Physical Sciences, 1991, 161 (8), pp. 141 - 153.
- [10] Landau L.D., Lifshitz E.M., Theoretical physics. T. 6.// Hydrodynamics, Nauka, M., 1988, 736 p.
- [11] Gladyshev G.P., Thermodynamics and macrokinetics natural hierarchical processes// Nauka, M., 1988, 287 pp.
- [12] Sychev V.V., Complex thermodynamic systems// Energoatomizdat, M, 1986, 208pp.
- [13] Cahn J.W., Hilliard J.E., Free energy of a nonuniform system. III. Nucleation in a two-component incompressible fluid. // J. Chem. Physics, 1959, 31 (3), pp. 688 - 699.
- [14] Cahn J.W., Phase separation by spinodal decomposition in isotropic solids// J. Chem. Phys., 1965, 42 (1), pp. 93- 99.
- [15] Reh binder P.A., Selected works. Surface phenomena in disperse systems. Colloid chemistry// Nauka, M., 1978 368 pp.
- [16] Lifshitz I.M., Grosberg A.U., Khokhlov A.R., The bulk of cooperation in statistical physics of polymer macromolecules// Advances of Physical Sciences, 1979, 127 (3), pp 353 - 389.
- [17] Smirnov B.M., Fractal tangle - a new state of matter// Advances of Physical Sciences, 1991, 161 (8), pp. 141 - 153.
- [18] De Gennes P.G., Dynamics of fluctuation and spinodal decomposition in polymer blends. // J. of Chemical Physics, 1980, 72 (9), pp. 4756 - 4763
- [19] Manevitch L.I., Shahinian Sh., Spinodal decomposition of binary mixtures of oligomers in a chemical reaction// Nauka, M, 1994, 124 pp
- [20] Savin A.V., Manevitch L.I., Christiansen P.L., Zolotaryuk A.V., Nonlinear dynamics of zigzag molecular chains// Advances of Physical Sciences, 1999, 169 (3), pp 255 - 270.
- [21] Erukhimovich I.J., Weak super crystallization and other effects of fluctuation in rigid-chain concentrated polymer systems with complex architecture// Doctor Thesis. Sci. Sciences, Moscow, 1994.
- [22] Barenblatt G.I., Methods of the theory of combustion in the mechanics of polymers (combustion and explosion)// Nauka, M., 1972, pp 15 -. 23)

- [23] Haise. I., Fundamentals of gas dynamics// Ed. G. Emmons, Fundamentals of the theory of gasdynamic discontinuities, 1963, 170 pp
- [24] Dreyer W., Wagner B., Sharp-Interface Model for Eutectic Alloys, Part I, //Concentration Dependent Surface Tension, Preprint, 2003
- [25] Lukashov E.A., Radkevich E.V., Solidification and Structurization of Instability Zones// Applied Mathematics, 2010, 1, 159-178
- [26] Lukashev E. A., Yakovlev N. N., Radkevich E. V. and Palin V. V., On the Possibility of the Cahn-Hilliard Approach Extension to the Solution of Gas Dynamics Problems (Inner Turbulence)//40th International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE'14), AIP Conference Proceedings 1631, 197 (2014); doi: 10.1063/1.4902477, pp. 197-207
- [27] Radkevich E. V., Palin V. V., On the Riemann-Hugoniot Catastrophe// Russian Journal of Mathematical Physics, 22 (2), 2015, pp. 227-236
- [28] Yakovlev N. N., Lukashev E. A., Radkevich E. V., On the reconstruction to the initial crystallization stage of binary alloys// Nanostructures, mathematical physics and modeling, 2014, 11 (2), pp. 5-36
- [29] Lukashev E. A., Radkevich E. V., Yakovlev N. N., On the reconstruction to the initial stage of inner turbulence//Nanostructures, mathematical physics and modeling, 2014, 11 (1), pp. 73-99.
- [30] Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V., Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase field system // Eur. J. Appl. Math. 10, 1999, pp. 55-77
- [31] Менделеев Д.И., О сопротивлении жидкостей и воздухоплавании// Санкт-Петербург, 1880, 104 с.
- [32] Паташинский А.З., Покровский В.Л., Флуктуационная теория неравновесных фазовых переходов// Наука, М., 1982, 382 с.
- [33] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э., Теория колебаний// Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1959, 916 с.
- [34] Раушенбах Б.В., Вибрационное горение// Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1961, 500 с.
- [35] Бредшоу П., Введение в турбулентность и ее измерение// Мир, М., 1974, 210 с.
- [36] Лалин Ю.В., Статистическая теория турбулентности (прошлое и настоящее - краткий очерк идей)//Научно технические ведомости 2' 2004, Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры "Гидроаэродинамика")

ON THE THEORY OF NONEQUILIBRIUM PHASE TRANSITION TO THE LAMINAR-TURBULENT TRANSITION

Lukashev E.A.¹, Yakovlev N.N.¹, Radkevich E.V.², O.A. Vasil'eva³

¹*TMKB " SOYUZ ", Russia*

²*Lomonosov Moscow State University,*

³*Moscow State University of Civil Engineering*

evrad07@gmail.com, vasiljeva.ovas@yandex.ru
elukashov@yandex.ru, amntksoyuz@mail.ru

Received 08.09.2015

We present the reconstruction of the initial stage of the laminar-turbulent transition, a mechanism which is spinodal decomposition (diffusion separation).

ПРОБЛЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ МАССОВОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПАРАЛЛЕЛИЗМА. I

А.В. Махиборода, А.В. Ильичёв, А.А. Подобин

*Департамент прикладной математики МИЭМ,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*

makhiboroda@yandex.ru

Поступила 01.11.2015

Современное состояние технологии микроэлектронного производства позволяет разместить десятки тысяч процессорных элементов на одном кристалле и объявлены тенденции к устойчивому росту этого показателя на ближайшее десятилетие. При этом рост тактовой частоты остановлен и зафиксирован на оптимальном значении 2.2 ГГц. Освоение массового параллелизма становится основным инструментом обеспечения роста производительности вычислительных средств. Однако на пути реализации массового параллелизма вычислений существует целый ряд препятствий, требующих решения принципиальных проблем. В статье рассмотрен ряд примеров, иллюстрирующих эффект быстрой остановки роста производительности при наращивании значений параллелизма. Проведен анализ причин подавляющих рост производительности на начальных шагах роста параллелизма. Предлагаются меры по переносу точки насыщения роста в область более высоких значений числа процессорных элементов. Обсуждаются направления развития архитектуры и принципы организации вычислений, имеющие перспективу эффективной реализации массового динамического параллелизма.

УДК 681.3.06

Введение

Компьютерное моделирование и постановка численных экспериментов являются важнейшими инструментами исследования наноструктурных объектов в различных отраслях научного знания и в наукоёмких технологических разработках. Не пытаясь описать огромную литературу по этой тематике, мы сошлемся только на обзоры, опубликованные в журнале «Наноструктуры. Математическая физика и моделирование» по компьютерному моделированию в биологии [1], по проблемам параллельного программирования [2], по проблемам создания и функционирования баз данных [3] и другим направлениям развития и применения вычислительных средств [4, 5, 6].

В данной статье делается попытка анализа глубокого перелома в эволюции компьютерных систем, который медленно вызревал не одно десятилетие и сейчас проявился с полной определённой. Сегодня можно утверждать, что главным направлением развития вычислительных средств на ближайшую перспективу станет освоение *массового динамического параллелизма*.

Массовый параллелизм это не 5, не 10 и даже не 100 процессоров, а сотни тысяч и миллионы процессорных элементов, работающих одновременно, согласованно и взаимосвязанно. В этих условиях синхронный подход к программированию, предполагающий опережающую разметку трассы процесса по каждой ветви становится бессмысленным и неосуществимым. Массовый параллелизм может быть только динамическим, то есть возникающим оперативно шаг за шагом в ходе текущего осуществления вычислительных операций. При реализации динамического параллелизма вычислительный процесс должен сам прокладывать свой путь в аппаратной среде и быть способным эффективно заполнять высокопараллельный аппаратный ресурс.

Ситуация, открывающая принципиально новый этап развития вычислительных средств определяется текущим состоянием технологии микроэлектронного производства. Выделим три принципиальные позиции, характеризующие современное состояние технологии.

Позиция первая: рост тактовой частоты остановлен и зафиксирован на уровне 2,2 ГГц. В предыдущие годы были достигнуты значения тактовой частоты на уровне 5,5 ГГц, но при этом получен неприемлемый рост энергозатрат. Технологи приняли решение вернуться к оптимальному значению 2,2 ГГц и более тактовую частоту не наращивать. Это означало необходимость пересмотра «закона Мура», в соответствии с которым технологи обязаны обеспечивать удвоение производительности кристалла каждые 18 месяцев.

Прогнозируемый рост числа транзисторов на кристалле носит линейный характер и пока не встречает ограничений. Отсюда следует вторая принципиальная позиция: устойчивый рост числа транзисторов позволяет переформатировать «закона Мура» и декларировать удвоение числа ядер на кристалле через каждые 18 месяцев (или каждые 24 месяца). На текущий момент в производстве достигнуты значения 2688 ядер на одном кристалле, выпускаемом фирмой NVIDIA [7] и прогнозируется их дальнейший рост. Это и есть факт технологического оформления коренного перелома в развитии вычислительных средств. Освоение массового параллелизма становится основным инструментом обеспечения устойчивого роста производительности кристаллов. Отсюда неумолимо следует необходимость обновления технологии программирования. Неоднократно разными специалистами высказывалось мнение о том, что «теперь программирование придётся изобретать заново» [8]. Это очень показательное заявление, обозначающее смену вектора развития. Предшествующий этап развития вычислительных средств характеризовался ограничениями разработок в области архитектуры и организации вычислений. Проблема состояла в том, что в мире был наработан огромный задел программных продуктов, оцениваемый в сотни миллиардов долларов. Основным условием развития вычислительных средств было обеспечение преемственности и прямой переносимости программных продуктов и технологий, наработанных ранее. Теперь давление этого фактора заметно снижается, компьютерное сообщество объявляет о готовности к пересмотру и обновлению архитектурных концепций.

И, наконец, третья позиция. При повышении тактовой частоты расход энергии растёт как квадрат частоты. Передовые массивно-параллельные системы потребляют мегаватты энергии. Стоимость энергии начинает превышать стоимость оборудования. Энергопотребление ограничивает будущий рост мультипроцессорных систем. Поэтому актуально введение нового понятия вычислительной эффективности - performance/watt вместо пиковой производительности. Этим показателем активно пользуется фирма Intel

при описании своей продукции. В упрощённом виде это величина отношения числа операций на 1 ватт потребляемой энергии. Специалисты фирмы SUN предложили ввести более сложный критерий энергоэффективности SWaP (Space, Watts and Performance). Эта тема активно обсуждается, например, в [9].

Введение критерия энергоэффективности кристалла косвенно связано с числом транзисторов и означает явно сформулированное требование эффективного использования основного ресурса кристалла, который и определяется числом транзисторов. Теперь разработчики архитектуры должны ответить на вопрос – каково соотношение затрат транзисторов на обработку данных в арифметико-логическом блоке и на управление в других блоках процессора. Показатель степени интеграции в современных технологиях достиг порядка миллиарда транзисторов на кристалле и далее будет расти [10]. Однако каким бы безбрежным не казалось это море транзисторов и сколь бы ничтожна мала не оказалась их стоимость, теперь разработчики архитектуры обязаны отвечать за показатель энергоэффективности кристалла, а это требует рационально распределять транзисторный ресурс при проектировании.

Перечислим ещё раз три основополагающие позиции, фиксирующие современное состояние технологии микроэлектронного производства:

- Тактовая частота зафиксирована на уровне 2.2 ГГц и её дальнейший рост считается нецелесообразным;
- Закон Мура предписывает удвоение числа ядер на кристалле каждые 18 (или 24) месяцев;
- Вводится критерий энергоэффективности кристалла, заданный как число операций на единицу затрат энергии.

Таким образом, можно констатировать, что сложились условия, критерии и объективные оценки, стимулирующие проведение фундаментальных разработок в области архитектуры перспективных вычислительных средств, которые должны решить следующие три проблемы:

- обеспечить реализацию массового параллелизма;
- обеспечить высокую эффективность организации вычислительных процессов по критерию числа операций, приведенных к энергозатратам;
- создать предпосылки для разработки принципиально новых технологий программирования.

1. Некоторые этапы из истории освоения массового параллелизма

История освоения параллелизма полна драматических разочарований и непрогнозируемых проявлений побочных и скрытых эффектов. Первичные ожидания устойчивого монотонного роста производительности в широком диапазоне значений числа обрабатываемых элементов в общем случае не подтвердились. Определённые положительные результаты получены только в случаях узкой специализации параллельных структур на определённый вид параллелизма, на определённый класс задач или на одну конкретную задачу.

С самого начала было понятно, что возможности распараллеливания вычислений в первую очередь ограничиваются свойствами решаемой задачи. Если в задаче выделяется 10 параллельных ветвей, наращивание числа обрабатываемых процессоров свыше десяти становится бессмысленным. График роста производительности системы в ре-

жиме решения данной задачи достигнет своего максимума при 10 процессорах и далее расти не будет. Более полно факт зависимости роста производительности от свойств задачи сформулировал Амдал ещё в 1967 году [11]. В законе Амдала вводится основная характеристика параллельной системы в виде коэффициента ускорения S_p , который определяется как отношение времени выполнения задачи на одном процессоре T_1 ко времени выполнения этой задачи на параллельной системе из P процессоров T_p . Поскольку S_p величина относительная, можно считать, что T_1 в числителе равно единице. Для определения T_p временной баланс разбивается на две составляющие – последовательную, которая не поддаётся распараллеливанию и обозначается как доля от общего объёма вычислений α , и параллельную, обозначаемую как $1 - \alpha$. Доля $1 - \alpha$ поддаётся распараллеливанию и с ростом числа процессоров уменьшается, а доля α остаётся неизменной. Тогда ускорение S_p может быть записано как соотношение:

$$S_p = \frac{1}{\alpha + \frac{1 - \alpha}{p}}$$

Ниже на рис. 1 приводятся графики роста ускорения S_p для разных вариантов соотношения параллельных и последовательных долей в задаче.

Закон Амдала наглядно иллюстрирует важный факт, говорящий о том, что каждая конкретная задача имеет определённый потенциал параллелизма и при исчерпании этого потенциала значение ускорения S_p достигает своего предельного значения и далее не растёт при любом количестве процессорных элементов.

Закон Амдала даёт идеальную картину, в которой предполагается, что параллельная компонента задачи может дробиться и поглощаться параллельной структурой обработки неограниченно. В реальных условиях определение соотношения долей параллельных и последовательных компонент задачи, а также уровень дробления параллельной компоненты при распараллеливании зависят от архитектуры вычислительной среды, от методов программирования, размерности задачи и масштабов представления базовых фрагментов (так называемое мелкозернистое и крупнозернистое представление). В реальных условиях насыщение роста ускорения S_p наступает раньше и при меньших значениях.

Движение в сторону максимального использования массового параллелизма предписывает выбирать крупноразмерные задачи и стремиться к их мелкозернистому представлению. А это в свою очередь создаёт значительные проблемы в области программирования, выбора архитектуры аппаратных средств и форм организации вычислений. Первые разработки высокопараллельных структур предпринимались в рамках классической фон Неймановской архитектуры, которая изначально предназначалась для построения сугубо последовательных синхронных форм функционирования. Попытка построения параллельной структуры как совокупности многочисленных последовательных синхронных ветвей, функционирующих параллельно, представляет собой сложную задачу с многочисленными проблемами и скрытыми побочными эффектами.

Значительным достижением в области построения параллельных систем была разработка в MIT архитектуры потока данных, известной как архитектура Data Flow. Первые публикации по архитектуре Data Flow относятся к середине 70-х [12]. Формы организации вычислений в архитектуре Data Flow в корне отличаются от принятых в классической фон Неймановской машине и изначально ориентированы на параллельное функционирование. Архитектура Data Flow функционирует асинхронно и самостоятельно извлекает динамический параллелизм по текущему состоянию и готовности данных.

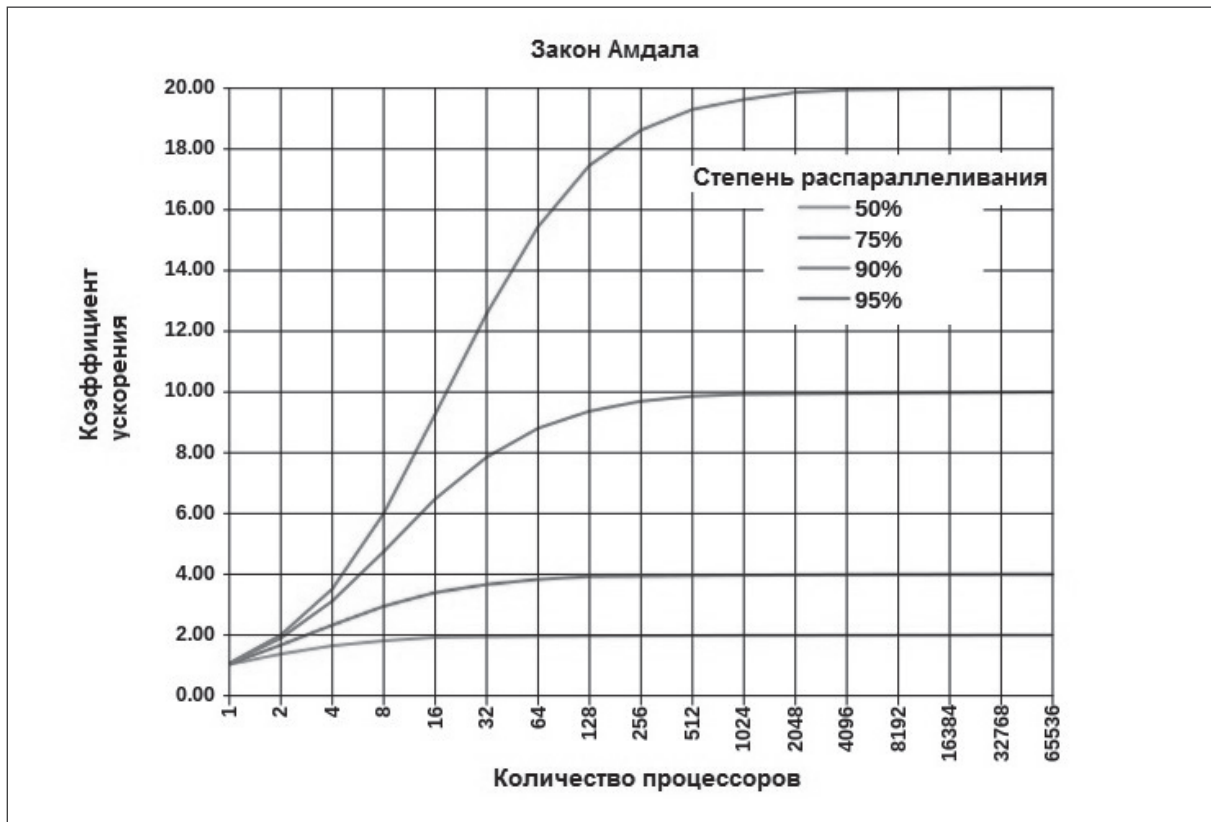


Рис. 1. Графики роста ускорения S_p для разных вариантов соотношения параллельных и последовательных долей в задаче.

Язык машины потока данных содержит базовые лексические конструкции двух типов – пакет и фишка. Пакет представляет собой составную запись определённого формата, состоящую из определённого набора именных полей, предназначенную для описания элементарной процедуры вычислительного процесса. Структура записи пакета приведена на рис. 2.

Пакет описывает элементарную процедуру преобразования двух аргументов. Именные поля пакета обозначают имена входных аргументов, имя функции и имя результата. В отличие от классической машины базовые операции и форматы данных, поименованные в полях пакета, не фиксированы конструкцией машины, а создаются при программировании конкретной задачи. Кроме именных полей в пакете есть поле спусковых флагов. Флаг – это один бит, а поле флагов – битовый вектор. Часть флагов ассоциированы с именами аргументов, поименованных в пакете. Флаги могут быть взведены либо опущены. На флагах реализуются спусковые функции, которые определяют статус пакета по заданным критериям и могут осуществлять перевод пакета из пассивного состояния ожидания в состояние готовности к исполнению. Совокупность пакетов описывает вычислительный процесс в виде графа, поскольку данные, поименованные в полях одних пакетов как результаты, поименованы в других пакетах как аргументы. С точки зрения графового представления пакет есть форма описания вершины графа. Назовём структуру, представленную совокупностью пакетов, потоковым графом. Пакеты размещаются в специальной памяти хранения программы, порядок размещения пакетов в памяти произвольный, при этом связность потокового графа поддерживается взаимосвязью имён данных в именных полях пакетов.

Данные размещаются в отдельной памяти данных. В памяти данных поддерживается доступ к данным по их именному обозначению. Кроме того память данных ведёт ка-

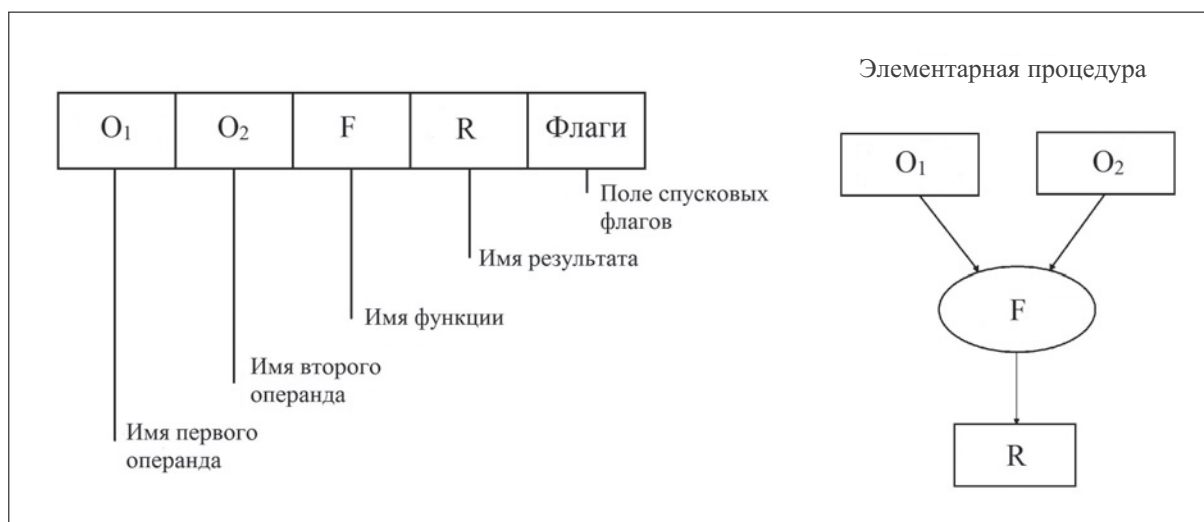


Рис. 2. Структура записи пакета

талог наличия данных и по мере их поступления или удаления вырабатывает фишки с именами соответствующих данных. Фишки направляются в память программ, где по именам, записанным в фишках, осуществляется ассоциативный опрос именных полей пакетов. Если опрос даёт положительный отклик, в поле флагов пакета происходят преобразования. Ассоциированный с данным именем флаг либо взводится в активное состояние, либо опускается. Таким образом, динамика движения данных и их текущее состояние отображаются на состояниях флагов пакетов в памяти программ. Флаги всех пакетов обрабатываются по логике спусковых функций, при этом главным условием спуска является наличие данных, поименованных в пакете в качестве аргументов. В случае готовности аргументов пакет переводится в активное состояние и выставляет маркер готовности. (Два флага, ассоциированные с двумя аргументами пакета поддерживают основной приём формирования спусковых функций по готовности данных кроме того в поле флагов могут быть и дополнительные флаги, расширяющие возможности управления активностью пакетов). Таким образом, в каждый текущий момент времени в памяти программ может возникать множество активных пакетов, которые одновременно передаются в исполнительную подсистему для реализации элементарного кванта вычислений, заданного пакетом. Из памяти программ в исполнительную подсистему транспортируется множество пакетов, которые формируют загрузку параллельной многоядерной среды исполнительной подсистемы. Система Data Flow функционирует лавинообразно – поступающий в систему поток данных отображается на состоянии спусковых флагов и инициирует спуск на обработку множества пакетов, в результате обработки пакетов образуются новые данные, которые заносятся в память данных и спускают на обработку новые порции пакетов и так далее до прекращения поступления данных в систему.

В архитектуре потока данных программируются не последовательности процедур, а взаимосвязи данных и условия спуска пакетов. Вычислительный процесс развивается асинхронно, а логика взаимодействия данных и спуска пакетов самостоятельно извлекает текущий динамический параллелизм из реального состояния данных. Такой подход к организации вычисления имеет предпочтительные перспективы в условиях массового параллелизма. Однако практическая реализация архитектуры Data Flow оказалась проблематичной и факты таковы, что с 70-х годов и до наших дней не существует ни одной промышленной версии машины потока данных. С точки зрения организации

параллельных вычислений это значительный прогресс в сравнении с последовательной синхронной динамикой функционирования классической машины. Но при этом теряется простота и ясность программирования, сводящаяся к формированию последовательных символьных строк в классической машине. В строчку можно писать сотни и тысячи операторов и затем читать их и править, а нарисовать потоковый граф из сотен и тысяч вершин и искать на нём ошибки весьма проблематично.

Параллельно и независимо от проекта Data Flow и одновременно с ним велись работы по непроцедурным стилям программирования и в частности по функциональным языкам программирования [13]. Работы по функциональным языкам привели к необходимости разработки специальных машин, поддерживающих функциональные языки. Один из проектов завершился созданием макетного образца производственной машины ELIZE [14]. Средствами функционального языка создаётся формализм, называемый производственной системой. В общем виде абстрактная производственная формальная система состоит из набора базовых символов и списка производных. Производные - это предписания по подстановкам или заменам. Если мы ставим своей целью построение некоторой порождающей производственной системы, то производные должны быть расширяющими, т.е. в левой части производной должен помещаться один исходный символ, а в правой части производной должен содержаться набор символов, заменяющих исходный. Схема производной выглядит, например, следующим образом:

$$R : S_{\text{исх}} \rightarrow A, F, K$$

Запись производной содержательно означает: производная R предписывает исходный символ $S_{\text{исх}}$, записанный в левой части производной заменить на символы A, F, K , записанные в правой части производной.

Далее начинает действовать редуцирующий процессор. На вход редуцирующего процессора подаётся исходная запись в виде некоторой цепочки начальных символов. Редуцирующий процессор читает исходные символы по одному и совершает поисковые операции в списке производных. При нахождении производной, содержащей заданный символ в левой части производной происходит чтение соответствующей правой части и замена исходного символа на символьный набор, в соответствии с предписанием производной. Запуск редуцирующего процесса приводит к пошаговому росту символьной записи. Если мы хотим, чтобы рост был сходящимся, необходимо дифференцировать набор базовых символов и разбить их на терминальные T и нетерминальные N . Набор терминальных символов T обозначает некие осмысленные базовые компоненты, из которых должны состоять символьные последовательности, являющиеся продуктами порождения данной производственной системы. Нетерминальные символы N обслуживают процесс порождения и, как правило, обозначают наборы подмножества и классы базовых компонентов T . Набор производных строится таким образом, что в левой части всех производных содержатся только нетерминальные символы N . Другими словами производные к терминальным символам не применяются. В правой части производной могут быть любые символы из T или N . Производный процесс прекращается, когда все символы порождаемой записи состоят только из терминальных символов.

Идея построения функциональных языков предполагает создание производственной знаковой системы, позволяющей создать исходную запись задачи как некую содержательную математическую постановку и далее запустить редуцирующий процесс, который переработает исходную содержательную запись задачи в символьную конструкцию, которая может быть интерпретирована как процедура её решения. Функциональные языки программируют целые классы задач, поскольку в рамках производственной си-

стемы имеются множества траекторий развития редукционного процесса и, следовательно, порождаются целые классы символьных конструкций. Класс задач поддерживается выбором элементарных операций, образующих функционально полный базис по данному классу. Таким образом, создаётся базовый набор программ и структур данных, обозначаемых как атомарные символы. Атомарные символы не подлежат редукции. Это и есть терминальные символы продукционной системы, они выводятся из редукционного процесса и дают начало процессу решения задачи.

Экспериментальная версия редукционной машины ELIZE представляет собой открытый набор стандартных фон Неймановских процессорных элементов с локальной памятью и объединённых общей шиной. Физическая реализация осуществлена на одноплатных транспьютерах промышленного производства. (Сведения о транспьютерах можно найти, например, в [15]. Транспьютер это всего лишь классический процессор с локальной памятью и четырьмя портами для связи со смежными процессорами. По замыслу разработчиков на транспьютерных элементах предполагалось строить масштабируемые матричные структуры). При построении макетного образца редукционной машины применялся метод эмуляции, при котором требуемый набор нестандартных функциональных элементов создаётся путём программирования стандартных классических процессоров. Набор процессорных элементов позволяет распараллелить редукционный процесс, а по мере появления нередукцируемых символов, обозначающих атомарные функции, запускается процесс их исполнения на тех же процессорах.

В функциональных языках постулируются определённые правила конструирования функциональных записей, которые обозначают функциональный оператор, аргументы и результаты. Символы в функциональной записи различаются как редукцируемые и атомарные. Атомарные символы это ссылки на базисные функции, инициирующие вычислительный процесс, а редукцируемые символы поддерживают редукционный процесс, в ходе которого исходная запись разрастается и превращается в запись процесса решения задачи средствами базисного набора. Мы намеренно обошли семантические проблемы построения исчислений, лежащих в основе функциональных языков. Для целей анализа проблем реализации массового параллелизма нам необходимы лишь общее представление о механике функционирования редукционной машины, интерпретирующей функциональные языки и не более того.

Структура функциональных записей в функциональных языках подобна структуре пакета в архитектуре Data Flow. Самое поверхностное знакомство с механикой работы машины потока данных и редукционной машины наталкивает на мысль о том, что проблема программирования архитектуры потока данных может быть решена средствами редукционной машины, интерпретирующей функциональные языки. При обеспечении совместимости правил построения функциональных записей и стандартов построения Data Flow пакетов результаты работы редукционной машины в части реализации редукционного процесса можно воспринимать как генерацию потокового графа для машины потока данных. Именно эта мысль получила серьёзное обоснование в известном докладе Бэкуса. В 1977 году был опубликован доклад Бэкуса, прочитанный им по поводу вручения премии Тьюринга [16]. Доклад называется – «Можно ли освободить программирование от стиля фон Неймана? Функциональный стиль и соответствующая алгебра программ». Доклад подводил итог под предшествующей дискуссией, заполнявшей периодику 70-х годов и известной как кризис архитектуры. Доклад содержит глубокий критический анализ фон Неймановской архитектуры и убедительно показывает исчерпание её возможностей. Во второй части доклада излагается программа развития вычислительных средств на ближайшее будущее, в основу которой положен тезис об объединении двух направлений разработок – проектов Data Flow и функциональных языков. И, наконец, третья часть доклада посвящена изложению основ функ-

ционального языка. В соответствии с программой Бэкуса работы по перспективным технологиям программирования должны быть сосредоточены вокруг разработки функциональных языков, а в части построения аппаратных средств с массовым параллелизмом необходимо принять за основу проект Data Flow.

2. Основные характеристики проекта редуционно-поточковой машины

Несмотря на популярность доклада и высокие индексы его цитирования разработчики не спешили откликнуться на призывы Бэкуса и объединить свои усилия. Традиция раздельного существования аппаратных и программных разработок оказалась сильнее здравого смысла. Мы опишем единственный известный нам проект предпринятый автором данной статьи в соответствии с программой Бэкуса в конце 80-х годов. Проект назывался редуционно-поточковая машина, основные сведения по проекту содержатся в патенте [17].

Структурная схема редуционно-поточковой машины приводится на рис. 3.

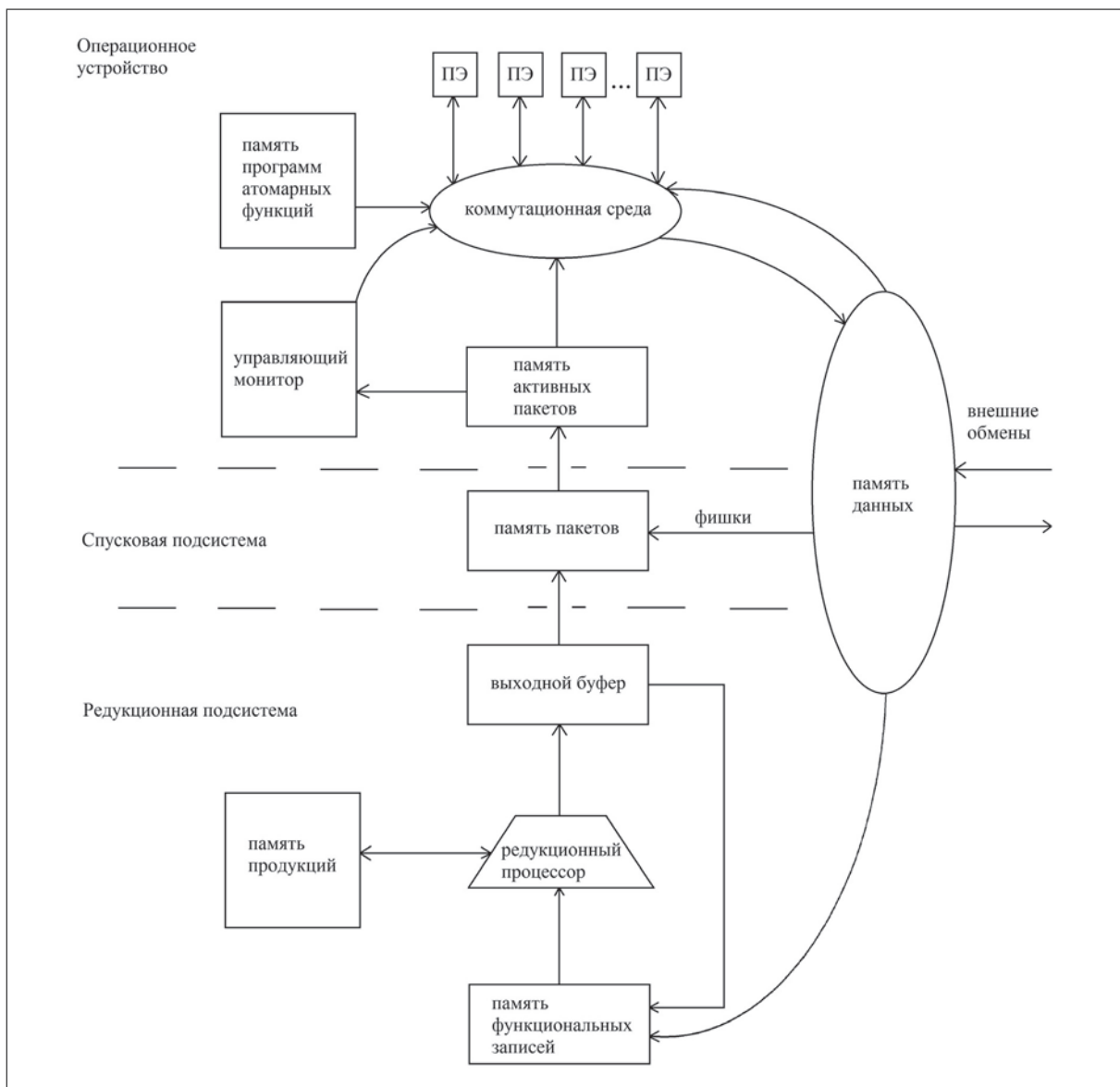


Рис. 3. Структурная схема редуционно-поточковой машины

Машина состоит из трёх подсистем, имеющих доступ к общей памяти данных. Кроме того, каждая подсистема имеет свою локальную функционально ориентированную память, поддерживающую её специфические функции.

Редукционная подсистема представляет собой определённый вариант редукционной машины, интерпретирующей функциональный язык и состоит из редукционного процессора, памяти функциональных записей и памяти продуктов. В память функциональных записей заносится исходная цепочка символов и запускается редукционный процесс. Исходной единицей функциональных записей является пакет. Структура пакета уже рассматривалась и была представлена на рис. 2.

Пакет - это битовая строка, состоящая из нескольких полей, фиксирующих символьное обозначение двух аргументов, функции и результата. Пакет представляет элементарную процедуру процесса. Символы, размещённые в полях пакета, могут быть редуцируемыми и служить агентами редукционного процесса, который осуществляет редукционный процессор. Процессор обращается в память продуктов и выбирает продукцию соответствующую редуцируемому символу и далее осуществляет замену исходного символа на символьную цепь, предписанную продукцией. В ходе развития редукционного процесса исходная запись разрастается, пополняется новыми символами до тех пор, пока не появятся нередуцируемые символы, представляющие атомарные функции, которые могут быть исполнены в данной продукционной системе. Атомарные (исполняемые) функции оформляются в записи как пакеты и выводятся из редукционной подсистемы. На выходе редукционной подсистемы. формируется поток исполняемых пакетов, который направляется на вход спусковой подсистемы.

Спусковая подсистема это специализированный сокращённый вариант машины потока данных. Основу составляет память хранения пакетов и выполнения спусковых функций. Покидающие редукционную подсистему пакеты оформляются как Data Flow пакеты и кроме полей для наименования функций, аргументов и результатов содержат поле спусковых флагов, предназначенных для выполнения спусковых функций. Множество пакетов, заполняющих спусковую подсистему, в совокупности представляет запись графа вычислительного процесса, поскольку именные поля пакетов взаимосвязаны. Результаты одних пакетов служат аргументами для других пакетов. Таким образом, потоковый граф это предварительная разметка трассы вычислительного процесса. Память данных является многофункциональной и кроме собственно хранения данных осуществляет ряд дополнительных функций, в частности ведёт каталог наличия данных и посылает в спусковую подсистему сообщения о появлении и удалении данных. Сообщения реализуются путём посылки в спусковую подсистему фишек с именами данных. Фишки взаимодействуют с именными полями пакетов по цепям ассоциативного доступа и управляют состояниями спусковых флагов. Если в памяти данных появляются данные с определённым именем, в спусковую подсистему направляется фишка с этим именем. Фишка опрашивает одновременно все именные поля пакетов и в случае совпадения имён взводит соответствующий флаг в поле спусковых флагов всех откликнувшихся пакетов. Если данные выводятся из памяти, посылка фишки должна приводить к опусканию соответствующих флагов в записях пакетов. Таким образом, состояние памяти данных отображается на состояния спусковых флагов пакетов. Далее работает логика спусковых функций по принципу готовности пакета к исполнению по критерию готовности аргументов в памяти данных. Если оба спусковых флага взведены, пакет переводится в активное состояние и выставляет маркер готовности. Память пакетов устроена таким образом, что все пакеты, помеченные маркером готовности, выталкиваются в выходные буфера и далее направляются в операционное устройство. Таким образом, система извлекает текущий параллелизм динамически по текущему состоянию данных.

В данной сокращённой версии машины потока данных принято правило, по которому пакеты, выведенные из памяти для исполнения, в памяти пакетов уничтожаются, т. е. пакеты используются однократно. Это значительно упрощает конструкцию потоковой машины и избавляет от необходимости решения проблемы многократного использования стереотипных фрагментов потокового графа. Для повторного исполнения стереотипных процедур многократно запускается процесс порождения требуемого фрагмента в редуccionной подсистеме. Кроме того, в редуccionной подсистеме решается проблема связывания повторных реализаций процедуры с другими экземплярами однотипных данных через расстановку индексных меток в полях, именуемых аргументы.

На выходах спусковой подсистемы создаётся поток исполняемых пакетов, которые ссылаются на исполняемые функции и гарантированы готовностью данных, на которые ссылаются поля, именуемые аргументы. Исполняемые пакеты перемещаются в операционное устройство. В состав операционного устройства входит набор простейших процессорных элементов с небольшой локальной памятью, коммутационная среда для эффективной загрузки и выгрузки данных, память хранения программ атомарных функций, а так же управляющий монитор с локальной памятью для приёма потока исполняемых пакетов. Операционное устройство связано с памятью данных отдельными каналами доступа по записи и чтению. Управляющий монитор принимает исполняемые пакеты и организует загрузку процессорных элементов по содержанию именных полей пакетов. В первоначальной версии проекта предполагалось иметь в составе исполнительной подсистемы 16 – 32 параллельных каналов обработки. Описанная структура рассматривалась как базовый системный кластер, составляющий основу для масштабирования и построения более крупных систем обработки данных.

3. Результаты моделирования редуccionно-потоковой системы, эффект насыщения роста производительности.

Изложенный выше эскизный проект редуccionно-потоковой машины можно воспринимать как определённый этап концептуальной проработки базовых конструкций в соответствии с программой Бэкуса. Действительно в данном проекте просматривается перспектива освоения массового параллелизма и существенного обновления технологии программирования. Естественным шагом продвижения проекта явилась разработка имитационных моделей и постановка модельных экспериментов. К этому времени проект прошёл патентную экспертизу и получил положительные решения по ряду заявок. Ни у кого не возникало сомнений, в работоспособности проекта в целом. Целью постановки модельных экспериментов было уточнение параметров обменных потоков и необходимых объёмов буферных зон на стыках подсистем. Главной проблемой было обоснование необходимых объёмов памяти хранения пакетов в спусковой подсистеме, поскольку это самый дорогостоящий элемент, содержащий обширные поля ассоциативного доступа. В тоже время память пакетов является критическим звеном системы, в котором возможна ситуация зависания процесса вследствие несогласованности темпов порождения пакетов редуccionной подсистемой и темпов спуска пакетов по готовности данных.

Программа разработки моделей и постановки модельных экспериментов была успешно выполнена. Структура моделей и основные результаты моделирования изложены в [18]. Однако кроме перечисленных целей моделирования дополнительно была проведена модельная оценка производительности системы. С этой целью были построены кривые роста коэффициента ускорения K , который представляет собой отношение времени выполнения задачи на одном процессоре к времени выполнения задачи в многопроцессорной системе. При этом временные затраты оценивались в числе квантов мо-

дельного времени. По результатам модельных экспериментов был построен график зависимости коэффициента K от числа каналов обработки в модели. Число каналов обработки равноценно числу процессорных элементов в исполнительной подсистеме. График приводится на рис.4. На графике обозначено несколько кривых для разных значений средней трудоёмкости пакетов t_n , выраженной в числе квантов модельного времени.

Модельный эксперимент позволил выявить достаточно жёсткую зависимость коэффициента ускорения K от трудоёмкости пакета. Это проявление конкретных значений соотношения временных затрат на обработку и на обменные пересылки данных и загрузку пакета. Если задача разбита на множество мелких пакетов доля затрат времени на обменные пересылки данных оказывается более высокой чем для пакетов с большой трудоёмкостью. При мелких пакетах на рис. 4 график демонстрирует нечувствительность к параллелизму. Эффект роста производительности при распараллеливании задачи начинает проявляться по мере роста трудоёмкости пакетов. Это неожиданный удар по идее мелкозернистого представления задачи с целью более эффективного использования возможностей параллелизма. Возникает ограничитель понижения масштаба мелкозернистого представления задачи.

Однако главное заключается в том, что реальные значения коэффициента ускорения K оказываются неприемлемо низкими, а график роста входит в насыщение при относительно малом значении параллелизма – при 6 каналах обработки. Модель была построена для 16 каналов и в этом диапазоне показателя параллелизма коэффициент ускорения K вышел на уровень 2,8 и далее не менялся. Полученные результаты моделирования означали приговор всему проекту. Поставленная цель – освоение массового динамического параллелизма средствами данного проекта не могла быть достигнута. Требовалось осмысление полученных результатов, анализ причин, определяющих эф-

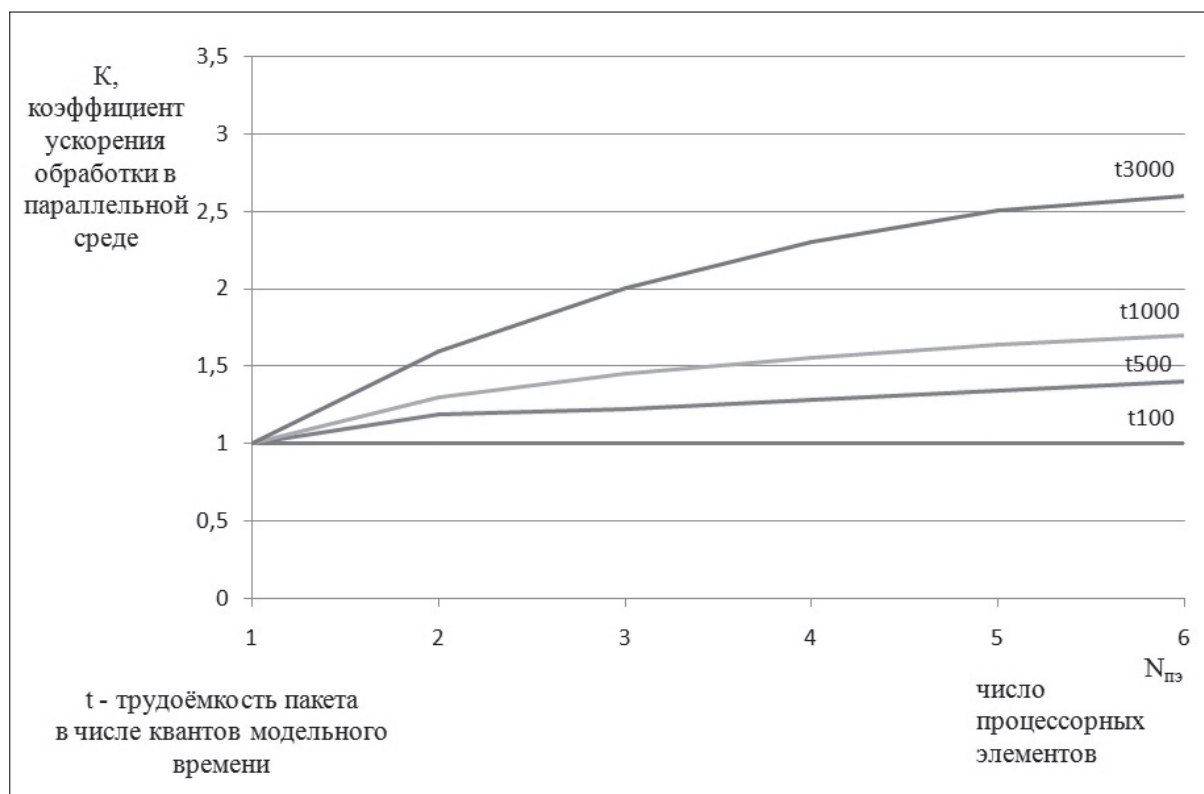


Рис. 4. Зависимость коэффициента ускорения K от числа каналов обработки N ко при разных значениях t_n средней трудоёмкости пакетов

фekt насыщения и глубокая ревизия подходов к организации вычислительных процессов. По данным личного общения авторы могут предполагать, что подобные результаты наблюдались и в других проектах с элементами Data Flow, однако широкого освещения в научной периодике эффект быстрого насыщения роста производительности в те годы не получил. Работа [18], на которую мы ссылаемся в данной статье была опубликована в виде препринта тиражом 200 экземпляров, а сам эффект насыщения в тексте завуалирован и понятен только участникам эксперимента. Мотивы такого поведения понятны и объясняются высокими рисками потерять финансирование проектов высокопараллельных систем. В тоже время конъюнктура предлагала другой путь – имелся определённый резерв роста ресурсных показателей вычислительных средств в рамках чисто технологических решений. Переход на новые значения технологических норм микроэлектронного производства обеспечивал устойчивый рост тактовой частоты, а, следовательно, и производительности вычислений.

4. Результаты замеров производительности при выполнении алгоритмов 3D БПФ

Проблема быстрой остановки роста производительности при наращивании степени параллелизма никуда не делась и со временем проявилась на макроуровне при эксплуатации кластеров и суперкомпьютеров. В этой связи целесообразно рассмотреть данные, полученные пользователями многопроцессорных систем в ходе исследования эффективности параллельного выполнения алгоритмов трёхмерного быстрого преобразования Фурье (3D БПФ), изложенные в [19]. Напомним, что существуют многочисленные версии специальных многопроцессорных систем, ориентированных на параллельное выполнение алгоритмов БПФ. Эти специализированные системы эффективно выпол-

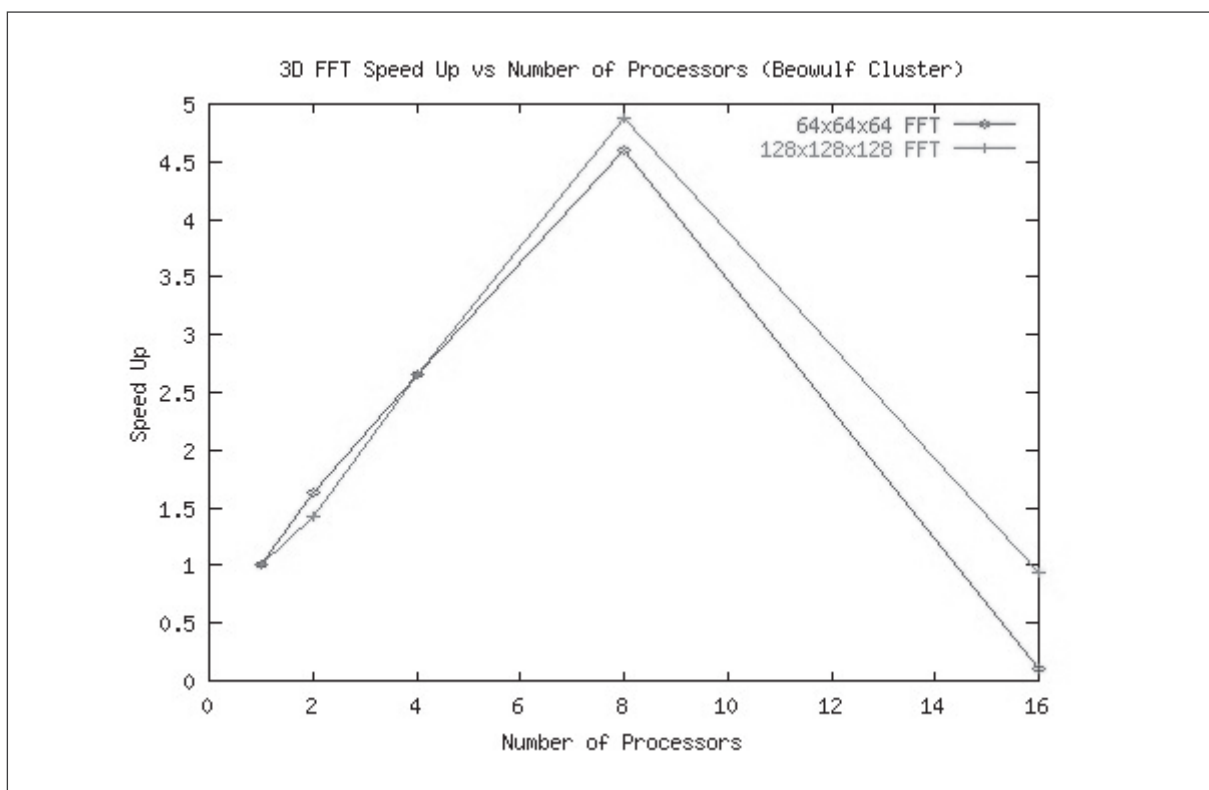


Рис. 5. Ускорения, полученные при прогоне алгоритмов 3D БПФ на установке Beowulf Cluster

няют только один алгоритм – БПФ. Другими алгоритмами их, как правило, не загружают. В тоже время алгоритмы БПФ являются наиболее проблемными при загрузке в универсальные параллельные системы. Именно алгоритмы БПФ характеризуются большими объёмами перекрёстных пересылок данных, в переходах, связывающих параллельные слои в общем графе алгоритма.

Мы приведём данные измерений временных затрат и вычисленные показатели ускорения в виде графиков из [19] и прокомментируем их.

Временные затраты получены в результате измерений, ускорения вычислены. В прогоне участвовали два варианта решения задачи - с размерностью $64 \times 64 \times 64$ и с размерностью $128 \times 128 \times 128$. Установка Beowulf Cluster это примитивный кластер, созданный на базе набора персональных компьютеров, объединённых средствами локальной офисной сети.

Вторая серия экспериментов выполнялась на установке Beowulf Cluster с более мощным коммутатором и более скоростной шиной. Результаты проведены на рис. 7 и рис. 8.

И наконец, авторы [19] получили доступ к более совершенной установке IBM SP2, построенной на базе скоростного коммутатора с развитой системой шин. Данные экспериментов приведены на рис. 9 и рис. 10.

Приведенная последовательность графиков показывает, что при прогоне алгоритмов с высоким потенциалом параллелизма коэффициенты ускорения довольно низкие и после прохождения пика резко падают. Ситуация заметно улучшается по мере улучшения обменной среды, поддерживающей межпроцессорные передачи.

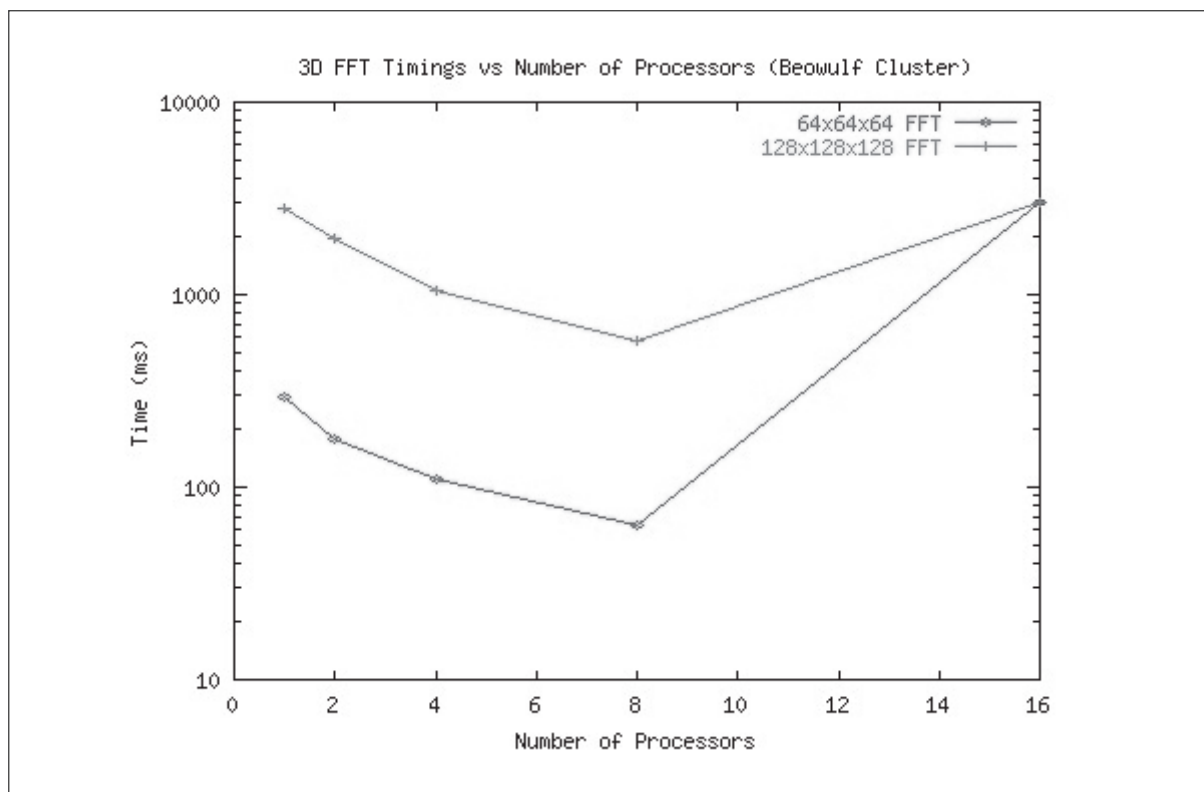


Рис. 6. Временные затраты при прогоне алгоритмов 3D БПФ на установке Beowulf Cluster

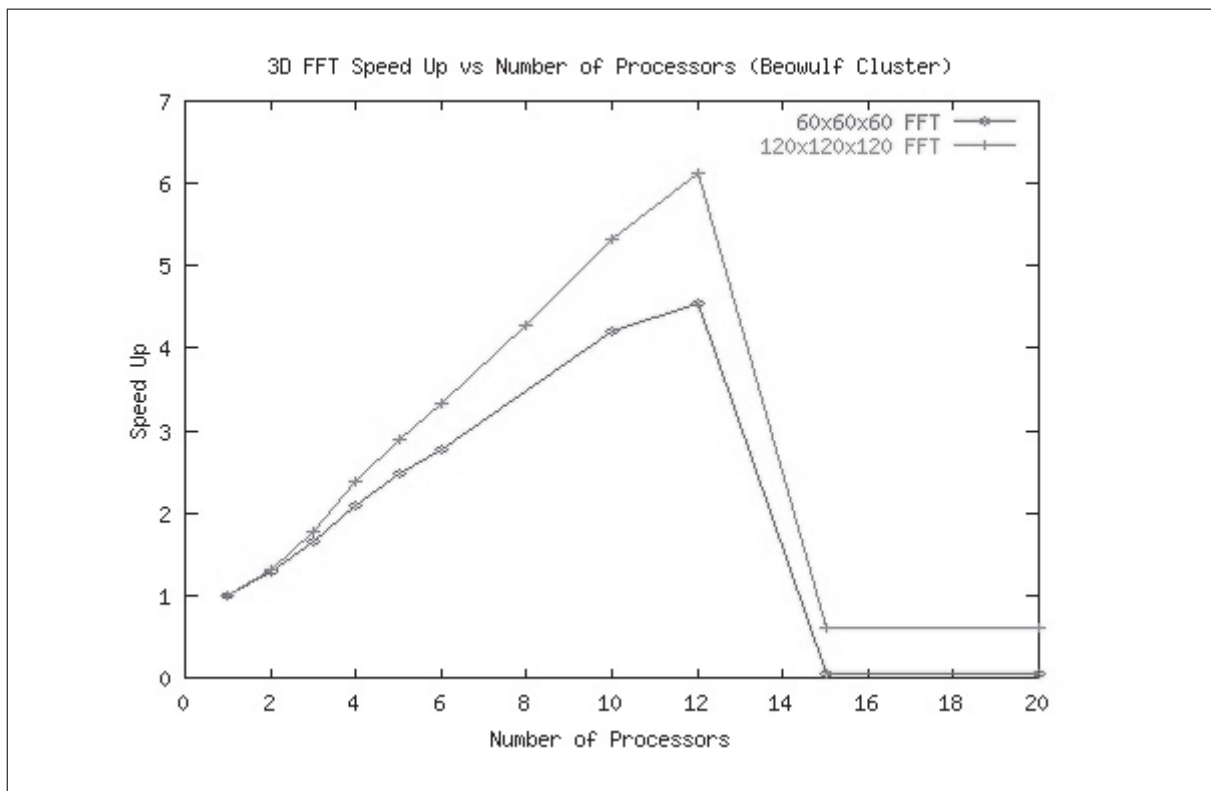


Рис. 7. Ускорения, полученные при прогоне алгоритмов 3D БПФ на улучшенной установке Beowulf Cluster

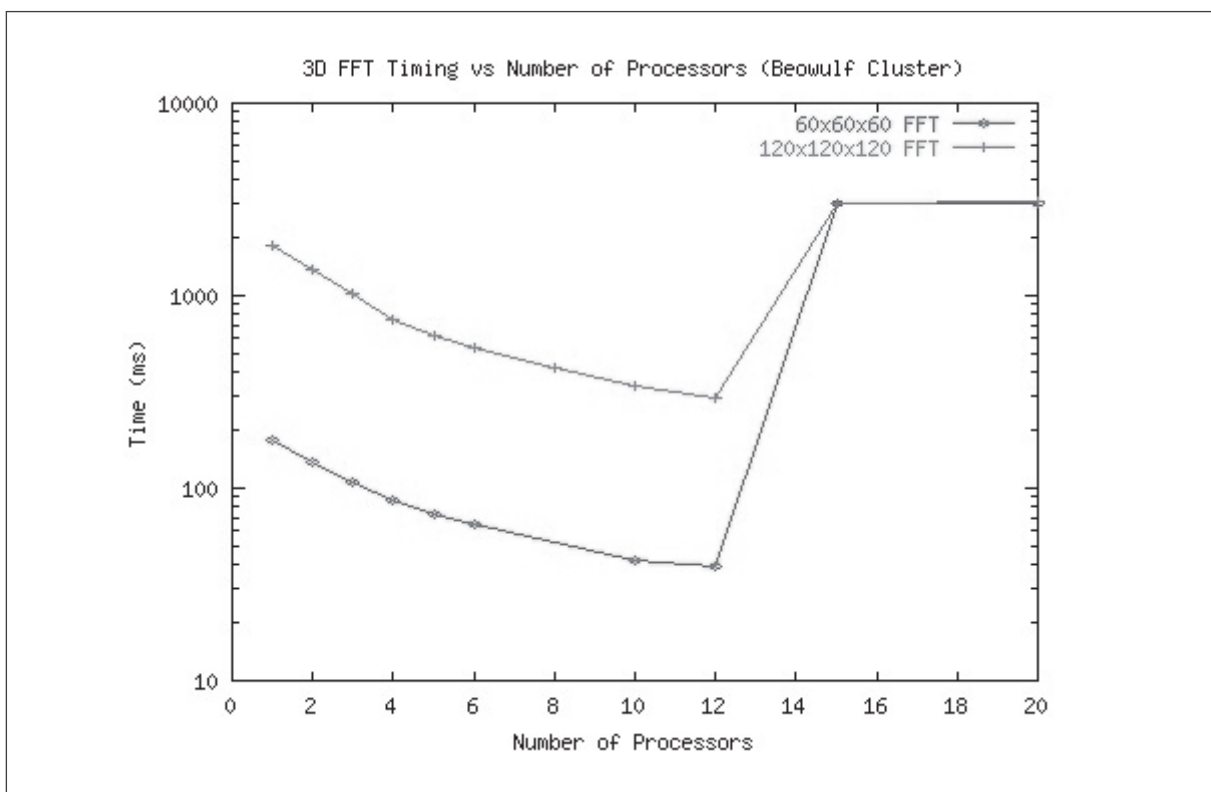


Рис. 8. Временные затраты при прогоне алгоритмов 3D БПФ на улучшенной установке Beowulf Cluster

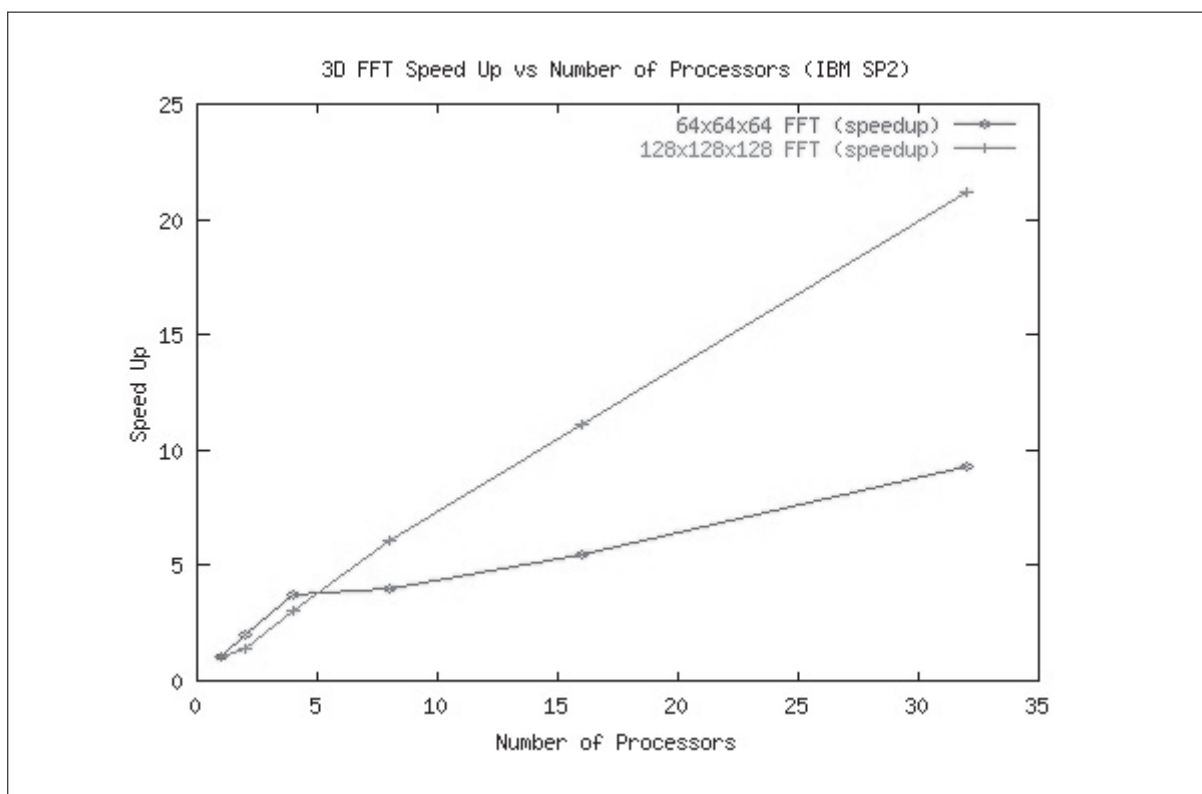


Рис. 9. Ускорения, полученные при прогоне алгоритмов 3D БПФ на установке IBM SP2

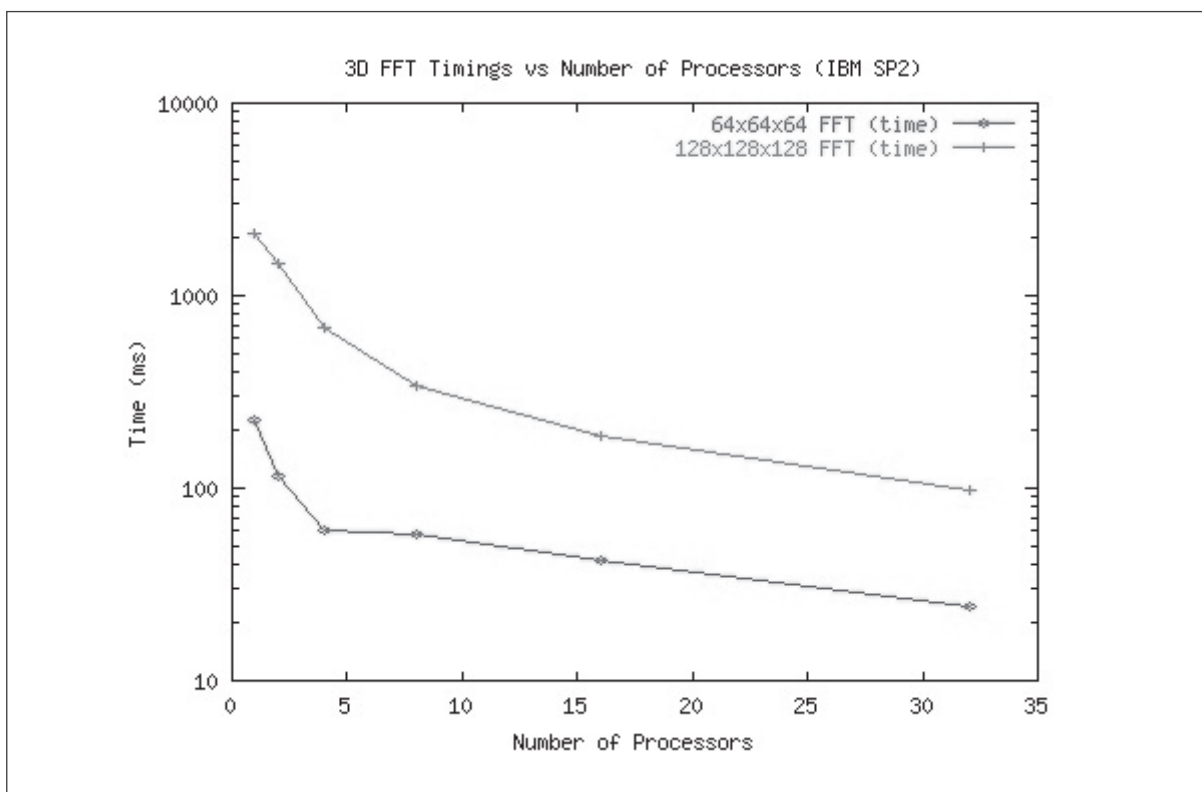


Рис. 10. Временные затраты при прогоне алгоритмов 3D БПФ на установке IBM SP2

5. Анализ факторов, ограничивающих рост производительности параллельных систем

Подведём итог. Рассмотрены ситуации роста производительности в двух достаточно разных средах – в классической многопроцессорной системе с общей шиной и в перспективном проекте неклассической архитектуры с элементами Data Flow. При этом результаты экспериментов похожие, если не сказать подобные. В случае с редуционно-потокковой машиной рассматривался результат модельного эксперимента, в случае с классической структурой получены данные измерений натурального эксперимента. В обоих случаях ход графиков роста коэффициента ускорения очень похож на графики, иллюстрирующие проявления закона Амдала. Однако надо сразу отметить, что наблюдаемый нами эффект быстрого прекращения роста производительности к закону Амдала не имеет никакого отношения, поскольку в обоих случаях насыщение наступает задолго до исчерпания потенциала параллелизма задачи. Мы имеем дело с другим явлением, природу и физический смысл которого нам предстоит выяснить.

Построим модель распределения временных затрат при параллельных вычислениях на конкретном примере реализации алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ). На рис. 11 приведен граф процесса вычисления алгоритма 16-точечного БПФ. В данном случае размерность БПФ выбрана по соображениям наглядности и удобства визуального восприятия рисунка. Нам необходимо проиллюстрировать топологическую природу графа, представляющего регулярную сетку с определённым принципом построения. Далее известно, что граф процесса вычисления алгоритма БПФ легко масштабируется на любую размерность по степеням двойки.

Сплошными кружочками на рисунке обозначены комплексные операнды, записанные в алгебраической форме, каждый из которых представляется парой действительных коэффициентов. Нумерация операндов в левой части рисунка отображает порядок следования отсчётов во входной сигнальной последовательности. На выходе происходит перестановка порядка следования отсчётов, это побочный эффект данного алгоритма. Контурные кружочки обозначают базовую процедуру с двумя входами и двумя выходами, называемую бабочкой БПФ. Базовая процедура представляет собой алгоритм решения системы четырёх алгебраических уравнений. На выходе базовой процедуры порождается пара комплексных чисел, каждое из которых представлено парой действительных коэффициентов. Мы намеренно опускаем целый ряд деталей с целью установления основных свойств графа вычисления БПФ. Для нас важно, что граф носит регулярный характер. На рис. 9 видно, что структура графа разбивается на ряд вертикальных слоёв, представленных одним числом вычислительных процедур. Вся структура графа заполнена одной базовой вычислительной процедурой, которая принимает на входе и порождает на выходе одни и те же форматы данных. Параллелизм обработки данных осуществляется в пределах слоя, слои образуют последовательность, при переходах между слоями осуществляется обмен данными. Фазы параллельной обработки и фазы обменов данными идентичны по всему графу, что позволяет корректно провести подсчёт временных затрат на осуществление вычислительных и обменных операций.

Размерность алгоритма наращивается по степеням двойки и если число входных отсчётов равно N , то число слоёв в графе равно $\log_2 N$, а число вычислительных процедур в слое равно $\frac{N}{2}$. Соответственно общее число процедур в графе равно $\frac{N}{2} \log_2 N$. Основные показатели структуры графа, необходимые для вычисления производительности параллельного представления процесса масштабируются, что позволяет нам воспользоваться наглядностью графического представления 16-точечного БПФ и далее пересчитать требуемые характеристики для любой другой размерности. Для 16-точечного БПФ имеем следующие показатели число слоёв в графе равно 4, число базовых проце-

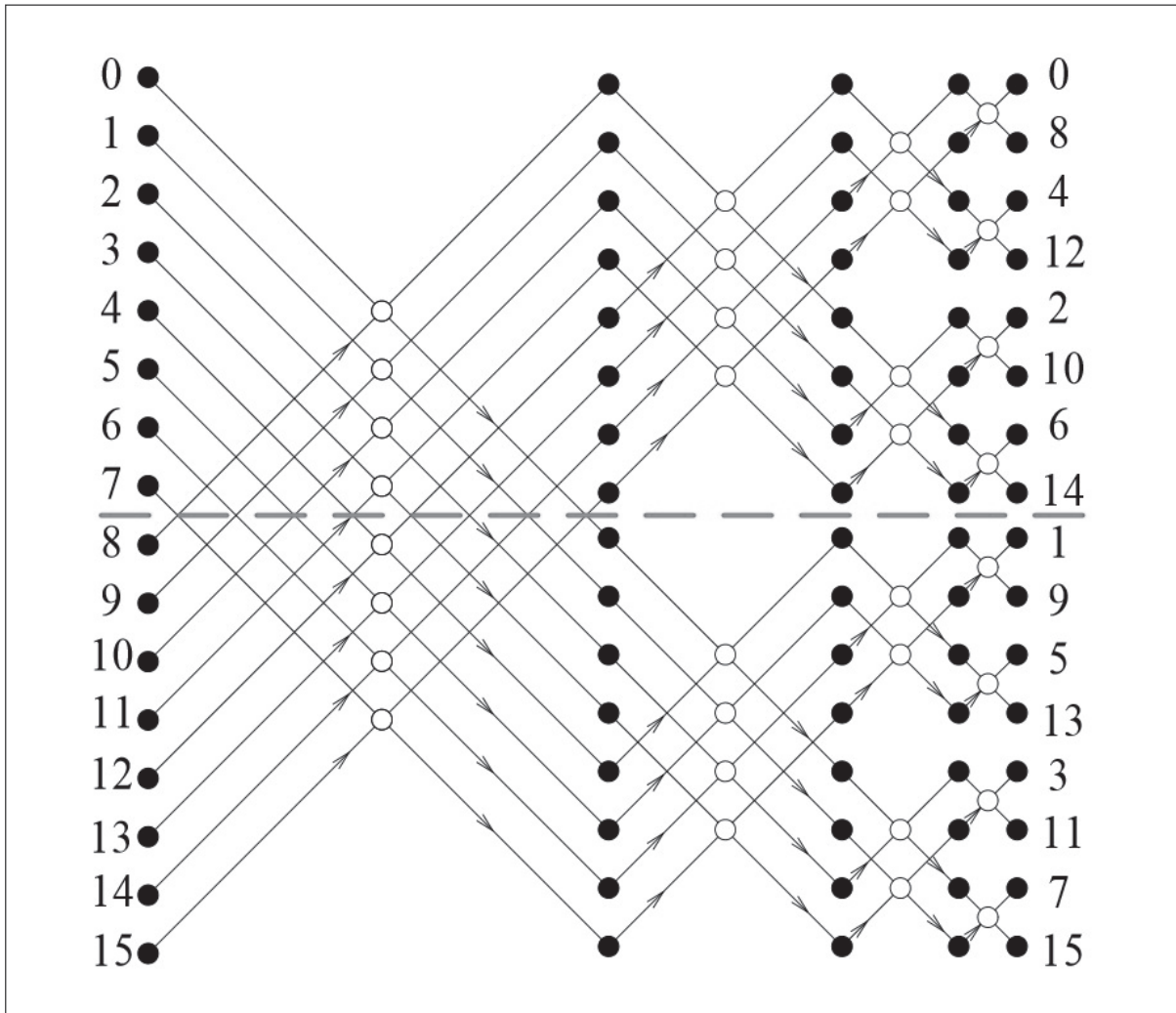


Рис. 11. Граф процесса вычисления 16-точечного БПФ.

дур в слое равно 8, всего процедур в графе 32. Наша задача состоит в том, что бы построить модель вычисления коэффициента ускорения, в которой в явном виде учитываются время вычисления базовых процедур и время передачи данных между процессорами при переходах с текущего слоя на следующий. При этом мы определяем время обмена данными как сумму времени передачи данных и времени выполнения протокольных событий, обеспечивающих доступ к обменной среде.

Определим ускорение K как отношение времени выполнения алгоритма на одном процессоре $T_1(N)$ ко времени выполнения алгоритма на n процессорах $T_n(N)$, где N размерность алгоритма, а n - число процессоров. Поскольку искомое ускорение есть величина относительная для данной модели мы будем оценивать времена выполнения определённых действий в условных микротактах работы оборудования. Примем, что время выполнения базовой операции b равно 10 микротактам. Тогда время выполнения 16-точечного БПФ на одном процессоре будет состоять только из времени выполнения базовых операций, поскольку обмен данными при этом отсутствует.

$$T_1(N) = b \cdot \frac{N}{2} \cdot \log_2 N = 10 \cdot 8 \cdot 4 = 320$$

Числитель будет состоять из трёх членов, зависящих от числа процессоров n . Время вычисления базовых процедур будет равно $\frac{320}{n}$. Или в общем виде

$$\frac{b \cdot \frac{N}{2} \cdot \log_2 N}{n}$$

Для определения времени пересылки данных необходимо рассмотреть структуру графа на рис. 9. При двух процессорах граф будет рассечен на две части по горизонтальному направлению как это отмечено пунктирной линией и две его половины будут загружены в разные процессоры. В этом случае обмен данными произойдёт только при переходе с первого на второй слой. При этом в каждом из двух процессоров будет вычисляться по 4 бабочки и каждая из них будет располагать только половиной входных данных, а вторую половину данных необходимо будет получить из другого процессора. Следовательно, обмен будет состоять из двух сеансов передач, содержащих по 4 отсчёта. Общий объём пересылаемых данных составит $\frac{N}{2}$ отсчётов.

При 4-х процессорах верхняя и нижняя половинки графа рассекаются аналогичным образом. В этом случае появляется необходимость обмена данными при переходе со второго на третий слой, объём пересылаемых данных по прежнему равен $\frac{N}{2}$ отсчётов, а суммарный объём составит $2 \cdot \frac{N}{2}$. Для 8 процессоров каждая выделенная по горизонтали часть графа вновь рассекается на две и мы получаем параллельное представление всего графа, состоящее из восьми последовательных нитей, каждая из которых содержит последовательность из трёх базовых операций. При этом появляется необходимость обменов при переходе со второго на третий слой с тем же объёмом передаваемых данных. Общий объём обменов будет равен $3 \cdot \frac{N}{2}$ отсчётов. Таким образом, в общем случае число передаваемых отсчётов будет равно $\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$.

Протокольные события в обменной среде сопровождают сеансы связи и в упрощённой ситуации их подсчёт можно осуществить как некоторое фиксированное время, выраженное в условных микротактах и привязанное к сеансу связи. По мере наращивания числа процессоров происходит увеличение числа сеансов и уменьшение объёмов данных, передаваемых в каждом сеансе. При двух процессорах происходит один обмен на переходе от первого слоя ко второму, который состоит из 2 сеансов – от первого процессора ко второму и от второго к первому. При четырёх процессорах имеет место 2 обмена, в каждом из которых осуществляется по 4 сеанса и общее число сеансов равно $4 + 4$. При восьми процессорах происходит три обмена и в каждом из них по 8 сеансов, всего $8 + 8 + 8$. Таким образом, в общем случае число сеансов может быть определено как $n \cdot \log_2 n$.

Посчитаем общие затраты времени при 2 процессорах. Время вычисления сократится вдвое и составит $\frac{320}{2} = 160$ условных микротактов.

Время передачи данных учитывается как объём передаваемых данных приведенный к пропускной способности шины. При двух процессорах осуществляется передача восьми отсчётов по два слова в каждом, что равно 16 словам. По определению мы принимаем производительность шины равную передаче 1 слова за один микротакт, следовательно, искомое время обмена данными составит 16 условных микротактов.

Временные затраты на осуществление протокольных событий вычисляется как затраты на один протокол умноженные на число сеансов. Примем по определению, что на один протокол затрачивается 5 условных микротактов. Для данного случая, осуществления одного обмена, состоящего из двух сеансов, это составит $2 \cdot 5 = 10$.

Таким образом, суммарные временные затраты на вычисление 16-точечного БПФ В нашей модели при двух процессорных элементах составляют 186 условных микротактов, а коэффициент ускорения $K = 1,72$. Аналогично проводится подсчёт для 4 и 8 процессоров. Данные сведены в Таблицу 1.

График роста коэффициента ускорения для 16-точечного БПФ представлен на рис. 12.

Приведенная модель в целом поддерживает динамику роста коэффициента ускорения, качественно совпадающую с результатами наблюдений и модельных экспериментов, описанных ранее. Модель может быть аппроксимирована на любую размерность алгоритма БПФ. Общая формула для подсчёта времени выполнения алгоритма $T_n(N)$ приводится ниже.

$$T_n(N) = \frac{b \cdot \frac{N}{2} \cdot \log_2 N}{n} + \frac{N \cdot \log_2 n}{\alpha} + \beta \cdot n \cdot \log_2 n$$

Таблица 1

Число процессоров n	1	2	4	8
Время вычисления (условные микротакты)	320	160	80	40
Время пересылки данных (условные микротакты)		16	32	48
Время выполнения протокола (условные микротакты)		10	40	120
Суммарное время (условные микротакты)	320	186	152	208
Коэффициент ускорения K	1	1,72	2,11	1,54

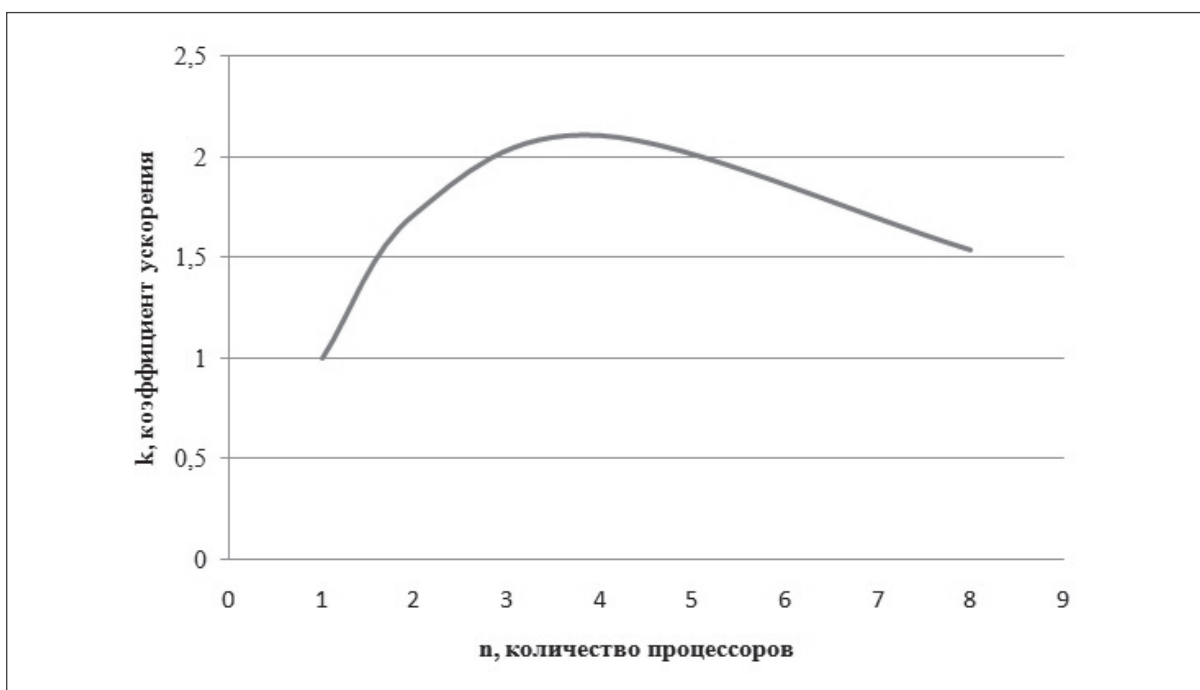


Рис. 12. График роста коэффициента ускорения для 16-точечного БПФ

Первое слагаемое – это соотношение для времени выполнения вычислений, которое учитывает время счёта базовой операции b и число базовых операций в алгоритме равное $\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$.

Второе слагаемое это время, затраченное на передачи данных между процессорами. Здесь объём передаваемых данных, выраженный в машинных словах, делится на величину α , пропускную способность шины, которая в данном случае принимается равной 1, что означает передачу одного слова за один микротакт.

Третье слагаемое это затраты на осуществление протокольных мероприятий, обеспечивающих доступ к шине для совершения сеанса передачи данных. Параметр β задаёт время выполнения протокола для одного сеанса. В данном примере мы определяем его значение равным 5 условным микротактам. Общее время затрат на протоколы вычисляется умножением β на число сеансов, равное $n \cdot \log_2 n$.

В качестве демонстрационного примера мы выбираем результаты вычислений коэффициента ускорения для алгоритма БПФ на 1024 отсчёта. Граф алгоритма при данной размерности состоит из 10 слоёв по 512 бабочек в каждом слое, всего в графе содержится 5120 базовых процедур. Максимальный потенциал распараллеливания данного алгоритма составляет 512 последовательных линий из 10 базовых процедур каждая. Результаты вычислений для $N = 1024$ при $\alpha = 1$ и $\beta = 5$ приведены в Таблице 2.

График роста коэффициента ускорения приводится на рис. 13.

Таблица 2

число процессоров n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
время выполнения (условные микротакты)	51200	26634	14888	9592	7616	7520	8864	12048	18632	32356
коэффициент ускорения K	1	1,92	3,44	5,34	6,72	6,81	5,78	4,25	2,75	1,58

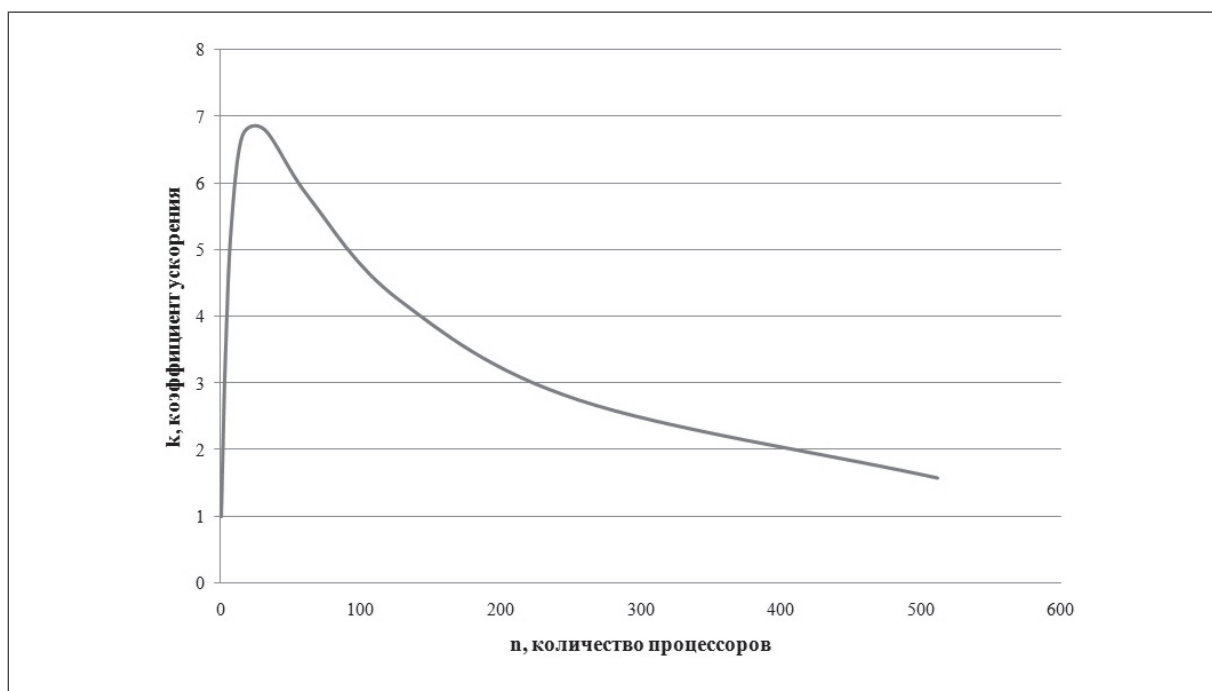


Рис. 13. График роста коэффициента ускорения для БПФ на 1024 точки

Наша модель позволяет исследовать поведение всех обозначенных компонентов, формирующих баланс временных затрат и их зависимость от числа процессоров. На рис.14 приводится динамика времени выполнения алгоритма по всем слагаемым: времени счёта, времени пересылки данных и времени протоколов доступа к обменной среде.

Приведенный график показывает полную картину во всём диапазоне значений числа процессорных элементов и временных затрат. В дополнение к общей картине на рис. 15 в увеличенном масштабе изображён начальный фрагмент динамики роста временных затрат.

Подведём итог - алгоритм имеет потенциал параллелизма, позволяющий распределить на 512 процессорах 512 последовательных линий, каждая из которых представляет собой последовательность из 10 базовых процедур. Следовательно, в идеальном случае можно получить коэффициент ускорения близкий к значению 512. Полученное на модели значение ускорения 6,81, заметно отличается от ожидаемых 512. Модель позволяет обнаружить в явном виде причины такого расхождения. Время счёта устойчиво падает с ростом числа процессоров n , но его вклад в рост ускорения подавляется двумя слагаемыми, которые растут с ростом n . Это временные затраты на обмен данными и на выполнение протокольных событий. Обе растущие компоненты порождаются работой обменной среды и событиями, обслуживающими параллелизм.

Обменная среда является самой консервативной составляющей аппаратного обеспечения. Идея общей шины значительно упрощает структуру аппаратных средств, но в целом является инерционным звеном, снижающим показатели производительности вычислительных средств. Сделанные нами вычисления показывают неприемлемость применения общей шины при построении многопроцессорных систем с массовым параллелизмом.

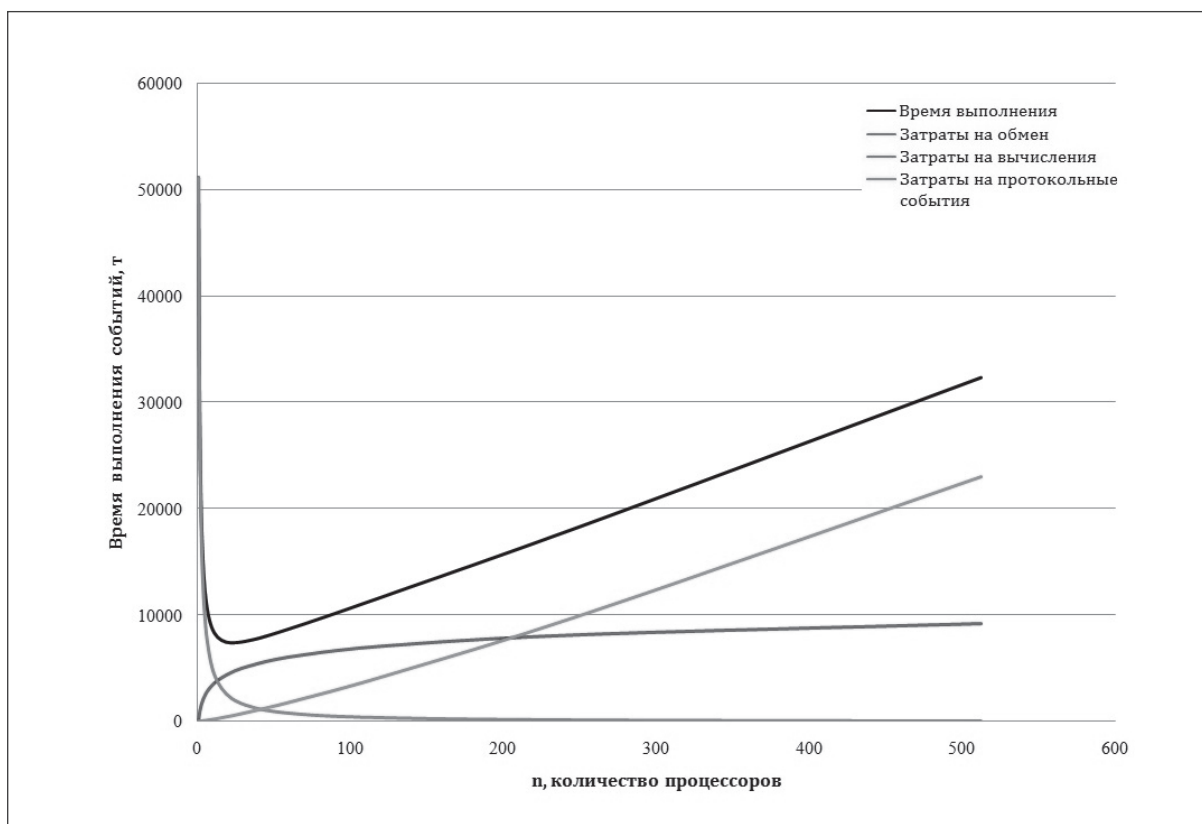


Рис. 14. Динамика времени выполнения алгоритма по основным слагаемым

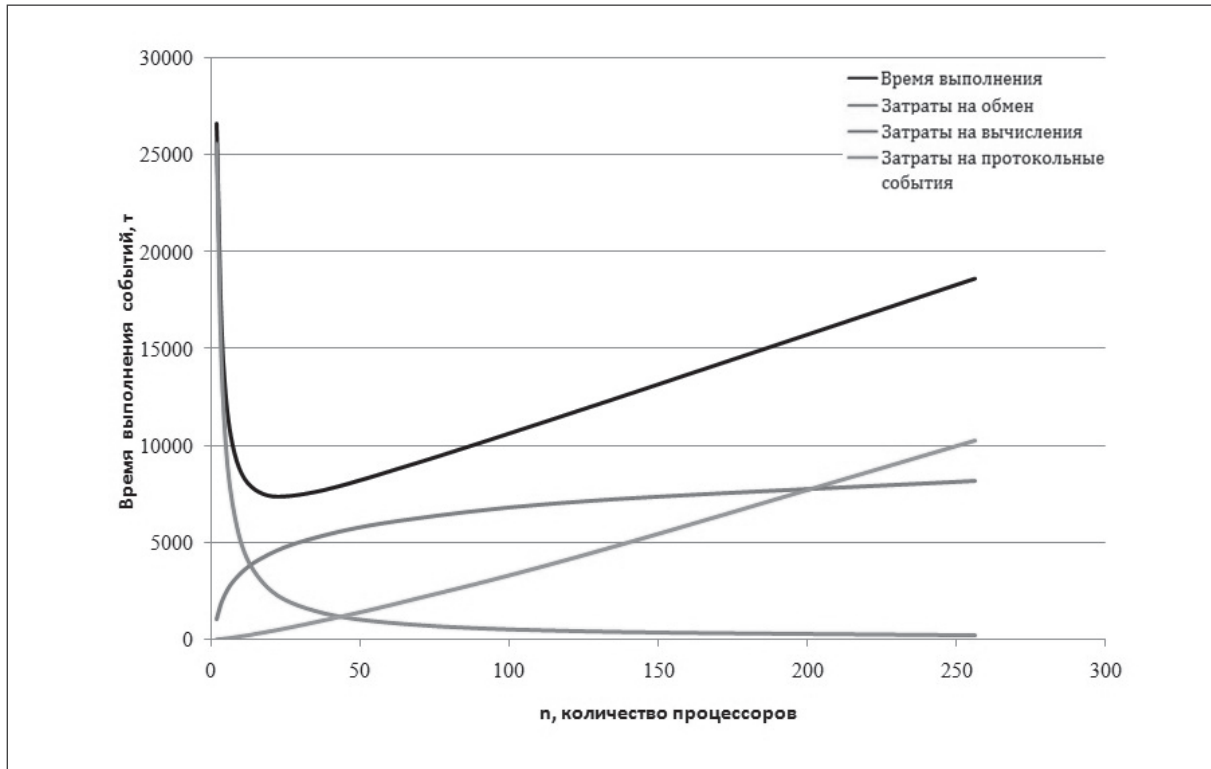


Рис. 15. Начальный фрагмент динамики времени выполнения алгоритма по основным составляющим

Далее мы рассмотрим улучшенный вариант применения общей шины. Допустим, что многоядерная структура формируется путём наращивания кластеров, состоящих из 16 процессоров, объединённых общей шиной. Это позволяет распараллелить обменные операции, локализованные в пределах кластера. При этом обмены между кластерами осуществляются по общей шине верхнего уровня, которая объединяет кластеры. Для модельных подсчётов сохраним ранее принятые параметры. Рассматривается граф алгоритма БПФ, $N = 1024$ при параметрах шины $\alpha = 1$ и $\beta = 5$, что означает передачу одного машинного слова за один такт и осуществление протокола доступа к шине за 5 тактов. Обмены между процессорами внутри кластера осуществляются одним проходом по шине кластера. Доступ процессора к обмену между кластерами требуют двух проходов по шинам. Сначала проход по кластерной шине для выхода на межкластерную шину и далее проход по этой шине в смежный кластер.

Время вычислений будет устойчиво снижаться с ростом n , а время выполнения обменов и протоколов будет рассчитываться по двум разным принципам. Общее время обменов в распараллеленной ветви будет делиться на число кластеров. В ветвях осуществления межкластерных обменов при суммировании будет учитываться факт двойного прохода по разным шинам. Результаты вычислений сведены в Таблицу 3.

На рис. 16 изображены кривые роста ускорения. Красным цветом отмечено ускорение в структуре с одной шиной, синим в системе с множеством шин.

На графике видно, что улучшение более чем скромное, переломить ситуацию быстрого насыщения роста производительности не удаётся. На рис. 17 приводится семейство кривых изображающих поведение отдельных компонентов процесса.

Красная линия, отражающая рост затрат на осуществление обменов данными в начальной фазе демонстрирует попытку сформировать тенденцию к снижению затрат, но далее растущий параллелизм подавляет эту тенденцию.

Таблица 3

процессоры	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
Вычисление	51200	25600	12800	6400	3200	1600	800	400	200	100
Передача	0	1024	2048	3072	4096	4096	5120	6656	8346	10368
Протокол	0	10	40	120	320	640	1600	4160	10560	25820
Сумма	51200	26634	14888	9592	7616	6336	7521	11216	19106	36288
Ускорение на 1 шине	1	1,92	3,44	5,34	6,72	6,81	5,78	4,25	2,75	1,58
Ускорение на многошинной структуре	1	1,92	3,44	5,34	6,72	8,08	6,8	4,56	2,68	1,4

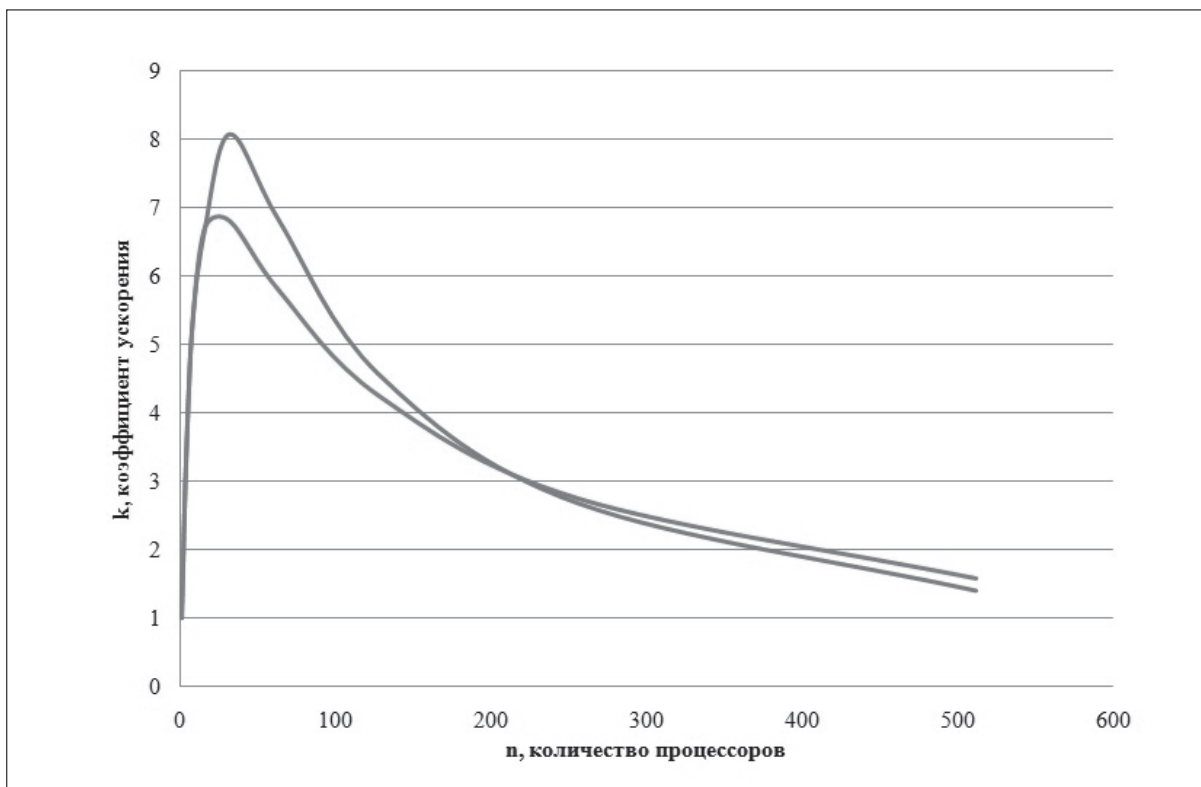


Рис. 16. Кривые роста ускорения. Красная линия для одной шины, синяя для множества шин

Данные модельного эксперимента показывают, что структура с множеством шин может дать определённое улучшение на относительно небольших значениях параллелизма, в пределах нескольких десятков. Далее по мере роста числа процессоров в область сотен экземпляров результаты многошинной структуры сравниваются с результатами одной шины. Таким образом, мы можем объяснить заметное улучшение результатов, полученных в [19]. В последнем эксперименте вычисления проводились на более совершенной установке IBM SP2 с более скоростной многошинной обменной средой.

На рис. 17 видно, что время, затраченное на пересылки данных растёт умеренно и при больших значениях параллелизма роль этой компоненты стабилизируется. Наиболее агрессивной компонентой, определяющей быстрый рост временных затрат при больших значениях параллелизма является время выполнения протокольных событий. Дело в том, что с ростом числа процессоров обмен данными дробится на множество мелких порций, каждая из которых оформляется как самостоятельный сеанс передачи, требующий доступа к шине. Таким образом число протоколов разрастается и их удельный вес в обменных операциях становится подавляющим.

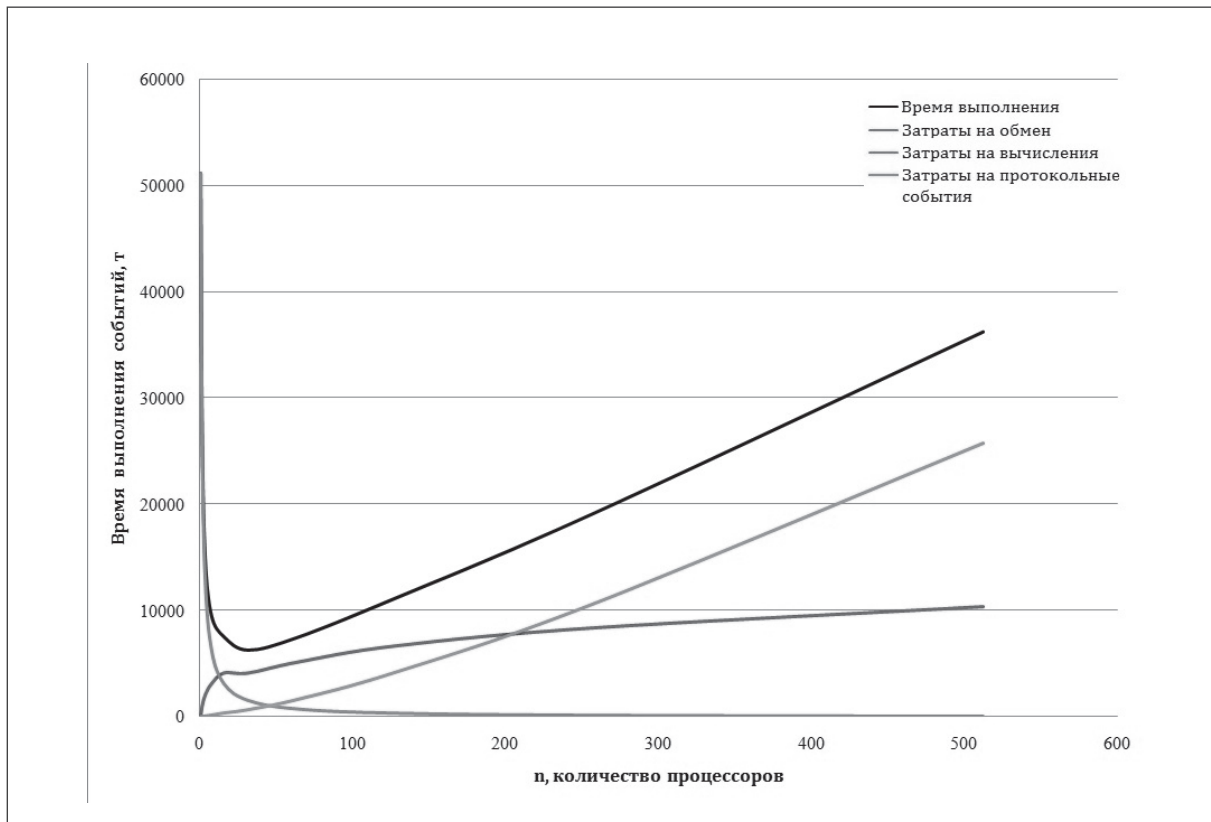


Рис. 17. Динамика роста временных затрат по основным компонентам процесса

Следует учесть, что в нашей модели приняты допущения о некоей идеальной ситуации абсолютной доступности шины. В реальности при коллективном использовании шины происходят конфликты доступа, при которых запускаются процедуры шинного арбитража и ожидания в очереди. Фактическая ситуация значительно хуже. Ценность данной модели в том, что она позволяет выявить основные причины подавления роста производительности на качественном уровне.

Заключение

Тема настоящей статьи – проблемы освоения массового динамического параллелизма вычислений и построение высокопараллельных компьютерных систем. Во введении приведены данные о современном состоянии технологии микроэлектронного производства и ближайших перспективах его развития. Основная проблема заключается в том, что современная технология позволяет строить многопроцессорные системы, в которых степень параллелизма достигает десятков тысяч параллельных каналов обработки и подтверждена тенденция к её дальнейшему росту. В то же время практика эксплуатации многопроцессорных систем при решении ряда актуальных и широко распространённых задач обнаруживает эффект быстрого насыщения и остановки роста производительности при очень малых показателях коэффициента ускорения. Задачи, имеющие потенциал параллелизма порядка сотен и тысяч независимых событий в реальности достигают ускорения не более чем в 7 – 8 раз при 10 – 15 процессорах. В наиболее удачных реализациях достигается ускорение в несколько десятков раз, что соответствует активному использованию не более чем 10% возможностей аппаратуры.

Рассмотрены результаты натурных и модельных экспериментов, которые описывают данный эффект но не позволяют достаточно полно исследовать причины его воз-

никновения. Построена модель, описывающая динамику роста временных затрат по основным компонентам процесса. Модель построена для конкретного алгоритма быстрого преобразования Фурье. Граф алгоритма носит регулярный характер и легко масштабируется по степеням двойки, что значительно облегчает счёт и вывод соотношений. Результаты расчётов по данной модели позволяют определить критические компоненты процесса, подавляющие рост производительности при росте параллелизма. Модель носит частный характер и построена для одного конкретного алгоритма, однако, выявленные на ней тенденции носят общий характер и позволяют анализировать ситуацию в целом. Проблема заключается в том, что при построении параллельных систем проявляются специфические затраты на обслуживание параллелизма, которые растут опережающим темпом и быстро подавляют ожидаемый рост производительности. В условиях, когда технология предоставляет возможности реализации массового параллелизма решение данной проблемы более чем актуально.

Детальный анализ явлений подавляющих рост производительности в параллельных системах и обсуждение путей их устранения излагаются во второй части данной статьи.

Литература

1. Шайтан К.В., Антонов М.Ю., Шайтан А.К., Новоселецкий В.Н., Боздагонян М.Е., Касимова М.А. Метод молекулярной динамики в исследованиях свойств биологических объектов // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2012, 6 (1,2), 63-79.
2. Блинов В.Н., Сovenюк А.А. Программирование задач физики конденсированного состояния с использованием MPI // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2012, 7 (1), 5-107.
3. Викул Е.А., Тужилин А.А. Геометрия аминокислот и полипептидов: случай рентгеноструктурного анализа // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2014, 11 (2), 5-29.
4. Григоренко Б.Л., Князева М.А., Исаев Д.А., Новичкова А.В., Немухин А.В. Компьютерное моделирование химических реакций в сложных биологических системах // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2014, 10 (2), 95-107.
5. Блинов В.Н. Дальнедействующие взаимодействия в компьютерном моделировании систем в конденсированном состоянии // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2014, 10 (1) 5-29.
6. Ожигов Ю.И. Представление декогерентности при компьютерном моделировании квантовых состояний наносистем // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2013 8 (1) 47-65.
7. Обзор продуктов семейства Tesla Kepler // NVIDIA.RU: NVIDIA Tesla GPU Accelerators, сайт производителя. URL: <http://www.nvidia.ru/content/tesla/pdf/NVIDIA-Tesla-Kepler->
8. Черняк Л. Многоядерные процессоры и грядущая параллельная революция. // Открытые системы 2007 4, 33-42.
9. Воеводин В.В. Математические основы параллельных вычислений // ННГУ 2009. 583 стр.
10. Sidlausakas D. Lecture on multicores // Danish National Research Foundation, Madalgo, 12.03.2013, p. 8. URL: <http://www.cs.au.dk/~gerth/ae13/slides/multicores.pdf>
11. Gene M. Amdahl. Validity of the single processor approach to achieving large scale computing capabilities // IBM Sunny vale, California. AFIPS spring joint computer conference. 1967. URL: <http://www-inst.eecs.berkeley.edu/~n252/paper/Amdahl.pdf>
12. Dennis J. B. First version of Data Flow procedure language // Lecture Notes in Computer Science 1974, 363 – 376.
13. Городня Л.Г. Основы функционального программирования // М., 2004 280 ст.
14. Амамия М., Танака Ю. Архитектура ЭВМ и искусственный интеллект // Мир, Москва, 1993 397 стр.
15. Галушкин А.И., Точенов В.А. Транспьютерные системы – начало становления в России ЭВМ с массовым параллелизмом // Нейрокомпьютер, , 2005 3, 22-38
16. Backus J. Can Programming Be Liberated from von Neumann Style? A Functional Style and Its Algebra of programs // 1977 Turing Award Lecture, P. 63-130 <http://rkka21.ru/docs/turing-award/jb1977r.pdf> <http://rkka21.ru/docs/turing-award/jb1977e.pdf>
17. Махиборода А.В. и другие, Система потоковой обработки информации с интерпретацией функциональных языков // Авторское свидетельство № 1697084 опубликовано 29. 06. 1989 г. Положительное решение 25.05 1990 г.

18. Соколовский Ю.Л. Предпроектное исследование персональной ЭВМ редуционно-потокowego типа средствами имитационного моделирования // Препринт 92-17, Институт кибернетики АН УССР, Киев 1992 30 стр.
19. Cramer C. Board J. The Development and Integration of Distributer 3D FFT for a Cluster of Workstations // «4th Annual Linux Showcase & Conference, Atlanta October 10-14 2000», Pp. 121–128 of the *Proceeding*;

PROBLEMS OF IMPLEMENTATION OF MASSIVE DYNAMIC PARALLELISM. I

A.V. Makhiboroda, A.V. Ilichev, A.A. Podobin

*Department of Applied Mathematics MIEM,
National Research University "Higher School of Economics"*

makhiboroda@yandex.ru

Received 01.11.2015

Modern state of microelectronic production technology allows to place thousands of processing elements on a single chip and the trend toward sustainable growth of this indicator over the next decade is declared. The increase in clock frequency is stopped and fixed at the optimal value of 2.2 GHz. The development of massive parallelism becomes the main instrument for ensuring the growth of computing resources. However, there are a number of fundamental issues to be resolved to the realization of massively parallel computing. The article describes a number of examples illustrating the effect of a rapid stop of performance growth while increasing values of parallelism. The reasons for suppressing the performance growth in the initial steps of parallelism growth are analyzed. Measures on the transfer of the saturation point of growth to higher values of the number of processor elements are proposed. The directions of architecture development and principles of algorithms with the prospect of effective implementation of the massive dynamic parallelism are discussed.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА RADIX-4 БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

А.А. Морозов¹, А.В. Тимофеев^{2,1}

¹*Департамент прикладной математики,
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики",*

²*ОИВТ РАН, Москва, Россия*

timofeevalvl@gmail.com

Поступила 03.08.2015

Параллельная программа для быстрого преобразования Фурье реализована на основе технологии параллельного программирования MPI (Message Passing Interface). В качестве базового метода для быстрого преобразования Фурье использован алгоритм Radix-4. Исследована зависимость ускорения параллельного расчёта от числа процессоров на примере двух вычислительных кластеров. Предложена формула, описывающая зависимость времени расчёта от числа процессоров, объёма входных данных и характеристик вычислительной системы. Сделаны оценки числа узлов, при котором достигается максимальное ускорение расчёта.

УДК 004.421.2, 004.032.24

1. Введение

Круг задач, в которых необходимо использовать преобразование Фурье, очень велик. Это, например, и цифровая обработка сигналов, и сжатие данных, и криптография. Для анализа мы выбрали дискретное преобразование Фурье (ДПФ), поскольку современная вычислительная техника является преимущественно цифровой, т.е. оперирует с дискретными величинами.

ДПФ активно используется в научных исследованиях, в частности, в квантовых расчётах и моделировании систем частиц, взаимодействующих по далекодействующим потенциалам. Одним из важных ограничений на пути моделирования больших систем является время расчёта. Необходимость уменьшения времени расчёта делает вопрос параллелизации алгоритмов вычисления ДПФ востребованными в научной среде. Проблема параллелизации состоит в том, что временные затраты на межпроцессорную коммуникацию и принципиально последовательные части алгоритмов способны нивелировать всё преимущество параллелизма [1].

В данный момент самыми популярными являются два способа решения этой проблемы. Во-первых, можно попытаться модифицировать последовательный алгоритм. Во-вторых, можно запускать параллельную программу на массивах очень большой длины. В этом случае временные затраты на пересылку сообщений между узлами будут сильно меньше, чем временные затраты на собственно “полезные” вычисления. Таким образом, даже во втором случае мы всё равно получим выигрыш, если не для всевозможных входных данных, то хотя бы для некоторых.

Далее мы рассматриваем алгоритмы БПФ и параллельную реализацию одного из алгоритмов БПФ. Изучено поведение параллельной версии алгоритма на различных кластерах, предложена формула для описания зависимости ускорения от числа процессоров для параллельной реализации алгоритма Radix-4.

2. БПФ и последовательная реализация алгоритма Radix-4

ДПФ задаётся следующей формулой $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega_N^{nk}$, где $\omega_N^{nk} = e^{\frac{2\pi i nk}{N}}$. Напомним, что преобразование Фурье сигнала, зависящего от времени, на выходе даёт массив с информацией о гармониках, формирующих данный сигнал.

Алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) способны вычислять эту сумму в среднем за $O(n \log_2 n)$.

В качестве основы для будущей параллельной версии мы выбрали алгоритм БПФ Radix-4 [2-4]. Этот алгоритм работает следующим образом: массив разбивается на четыре части, вычисляется ДПФ каждой части (существенно, что для каждой части будет использован тот же метод), а затем все части особым образом склеиваются, и мы получаем массив с результирующим ДПФ.

Из этого описания следует, что Radix-4 применим только для массивов длиной 4^n . Мы предложим здесь некоторую модификацию, которая позволит вычислять ДПФ от массивов длиной 2^{n-1} .

Рассмотрим два способа разбиения входного массива на части. Во-первых, можно просто поместить в первую часть первую четверть элементов, во вторую часть – вторую четверть и т. д. Во-вторых, можно в первую часть поместить все элементы, индексы которых кратны 4, во вторую – элементы, индексы которых дают остаток 1 при делении на 4 и т. д. (рис. 1). Первый подход называется прореживанием по частоте (англ. Decimation In Frequency, DIF), а второй – прореживанием по времени (англ. Decimation In Time, DIT). Эти способы совершенно равнозначны (за исключением особенностей реализации), и мы в данной статье будем использовать DIT.

Более конкретно алгоритм Radix-4 DIT выглядит так:

$$\begin{aligned}
 X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{4n} \omega_N^{4nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{4n+1} \omega_N^{(4n+1)k} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{4n+2} \omega_N^{(4n+2)k} \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{4n+3} \omega_N^{(4n+3)k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{4n} \omega_N^{\frac{nk}{4}} + \omega_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{4n+1} \omega_N^{\frac{nk}{4}} + \omega_N^{2k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{4n+2} \omega_N^{\frac{nk}{4}} + \omega_N^{3k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{4n+3} \omega_N^{\frac{nk}{4}} \\
 &= A_k + \omega_N^k B_k + \omega_N^{2k} C_k + \omega_N^{3k} D_k
 \end{aligned}$$

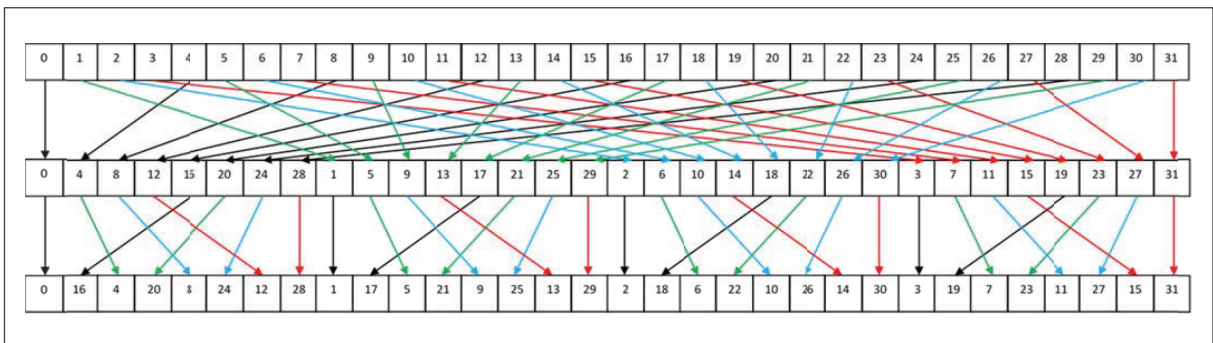


Рис. 1. Перестановка элементов входного массива в алгоритме Radix-4.

¹ Строго говоря, это будет уже алгоритм Mixed-Radix. Подробнее о нём см. в [3].

Из этого равенства находим:

$$\begin{cases} X_r = A_r + \omega_N^r B_r + \omega_N^{2r} C_r + \omega_N^{3r} D_r \\ X_{r+\frac{N}{4}} = A_r + \omega_N^{r+\frac{N}{4}} B_r + \omega_N^{2(r+\frac{N}{4})} C_r + \omega_N^{3(r+\frac{N}{4})} D_r \\ X_{r+\frac{N}{2}} = A_r + \omega_N^{r+\frac{N}{2}} B_r + \omega_N^{2(r+\frac{N}{2})} C_r + \omega_N^{3(r+\frac{N}{2})} D_r \\ X_{r+\frac{3N}{4}} = A_r + \omega_N^{r+\frac{3N}{4}} B_r + \omega_N^{2(r+\frac{3N}{4})} C_r + \omega_N^{3(r+\frac{3N}{4})} D_r \end{cases}, \quad 0 \leq r < \frac{N}{4}$$

Окончательно получаем:

$$\begin{cases} X_r = A_r + \omega_N^r B_r + \omega_N^{2r} C_r + \omega_N^{3r} D_r \\ X_{r+\frac{N}{4}} = A_r + i\omega_N^r B_r - \omega_N^{2r} C_r - i\omega_N^{3r} D_r \\ X_{r+\frac{N}{2}} = A_r - \omega_N^r B_r + \omega_N^{2r} C_r - \omega_N^{3r} D_r \\ X_{r+\frac{3N}{4}} = A_r - i\omega_N^r B_r - \omega_N^{2r} C_r + i\omega_N^{3r} D_r \end{cases}, \quad 0 \leq r < \frac{N}{4}$$

Последние соотношения называются преобразованием бабочки для алгоритма Radix-4 DIT. Именно они показывают, как следует склеивать четыре ДПФ в одно. Коэффициенты ω_N^r , ω_N^{2r} и ω_N^{3r} называются поворачивающими множителями (англ. Twiddle Factors).

Кроме того, для нашей модификации алгоритма Radix-4 (позволяющей вычислять ДПФ от массив длины 2^m) нам потребуется иногда склеивать на четыре части в одно ДПФ, а две. Пользуясь аналогичным приёмом, мы можем получить преобразование бабочки и для этого случая:

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} \omega_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} \omega_N^{(2n+1)k} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} \omega_{\frac{N}{2}}^{nk} + \omega_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} \omega_{\frac{N}{2}}^{nk} \\ &= A_k + \omega_N^k B_k \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} X_k = A_k + \omega_N^k B_k, & 0 \leq k < \frac{N}{2} \\ X_k = A_k - \omega_N^k B_k, & \frac{N}{2} \leq k < N \end{cases}$$

Здесь поворачивающими множителями будут ω_N^k .

Для анализа быстродействия работы последовательных алгоритмов проведено сравнение алгоритмов Split-Radix, Radix-4, профессионального оптимизированного программного пакета FFTW и простого ДПФ (Naive) (рис. 2).

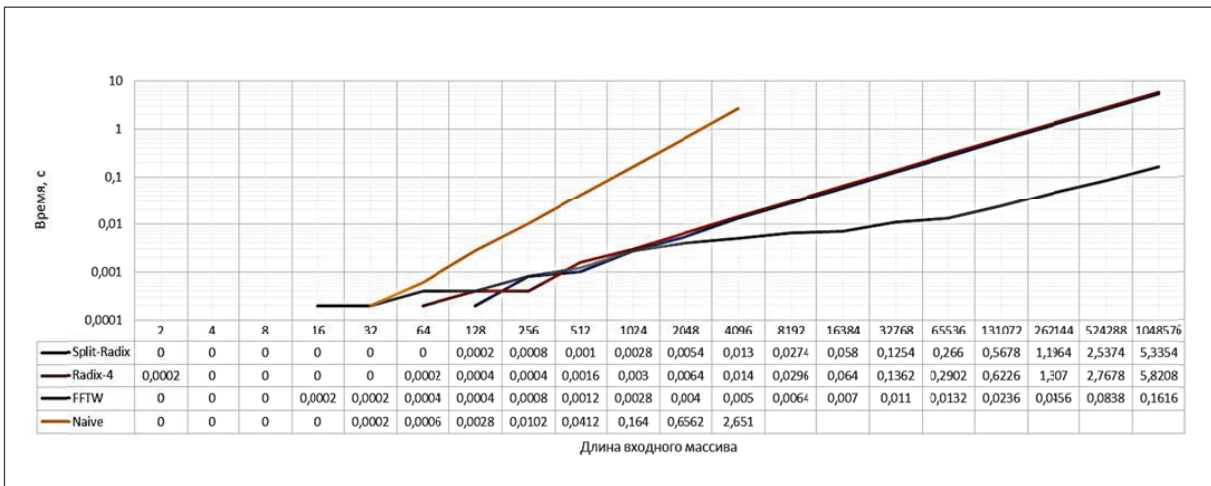


Рис. 2. Сравнение последовательных алгоритмов ДПФ для набора случайных входных данных

Видно, что графики рассмотренных нами алгоритмов в целом представляют собой прямые. Это ещё раз подтверждает (уже на практике) оценку сложности $O(n \log_2 n)$. Во-вторых, заметно, что алгоритм Split-Radix работает хоть и ненамного, но быстрее алгоритма Radix-4. Вызвано это тем, что он сам по себе производит меньше операций [3]. Надо так же отметить, что в приведённых здесь реализациях не применялись серьёзные оптимизации, которые можно обнаружить в профессиональных библиотеках БПФ. К таким оптимизациям относятся эффективная работа с памятью [4], применение схем разбиения, которые наилучшим образом подходят для данной архитектуры [4], а иногда и применение SIMD [4]. По этой причине имеется такой выигрыш во времени у библиотеки FFTW. Кроме того, наблюдается ожидаемое преимущество всех алгоритмов БПФ по сравнению с простой реализацией ДПФ.

3. Параллельная реализация алгоритма Radix-4

Программа разработана для числа узлов, равного 2^m . Такая программа позволяет достаточно точно оценить ускорения вычисления БПФ при параллелизации.

Мы будем использовать декомпозицию по данным. Работа программы схематично изображена на рисунке ниже:

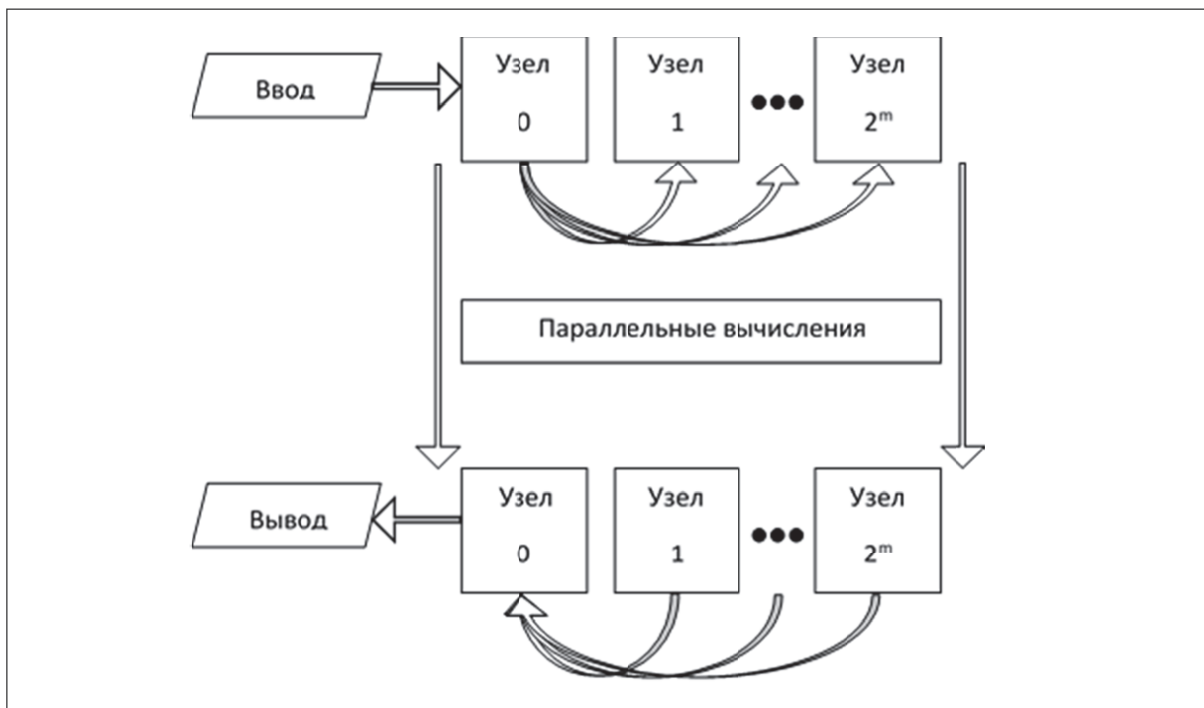


Рис. 3. Схема параллельного алгоритма БПФ

Последовательность действий, выполняемых программой (рис. 3), такова:

1. Узел 0 считывает входные данные (либо из файла, либо генерирует массив случайных величин)
2. Узел 0 осуществляет перестановку элементов входного массива
3. Подготовленный входной массив распределяется по узлам
4. Каждый узел вычисляет ДПФ своей части (эта работа выполняется параллельно)
5. Полученные ДПФ собираются на узле 0
6. Все имеющиеся на нулевом узле ДПФ склеиваются в одно
7. Узел 0 производит вывод результирующего массива

Для распределения данных по узлам и для сборки их на одном узле мы будем использовать соответствующие функции MPI: Scatter() и Gather().

Отличие описанного алгоритма от Radix-4 состоит в том, что входной массив разбивается не на четыре части, а на 2^m частей. Если m чётное, то на узле 0 произойдёт склеивание всех этих частей в точности так, как это требуется в алгоритме Radix-4. Сначала объединятся первые четыре части, затем вторые четыре и т. д.. Затем четвёрки из образовавшихся новых частей тоже будут объединяться между собой, и так будет происходить до тех пор, пока не останется одна часть, которая и будет являться ДПФ исходного массива.

Если же m нечётное, то всё будет происходить так же, как и в предыдущем случае, за исключением того, что на последнем шаге у нас будут не четыре части, а две. Их-то и надо будет объединить между собой с помощью преобразования бабочки для алгоритма Radix-2, которое мы описали выше.

Отсюда следует, что перестановка элементов входного массива (рис. 1) также будет зависеть от чётности m . Если m чётное, то она такая же, как в алгоритме Radix-4, если же m нечётное, то вначале массив следует разделить на две части – в одну попадут элементы с чётными индексами, а в другую – с нечётными. Далее в этом случае всё делается так же, как и в предыдущем.

Теперь мы можем перейти к обсуждению результатов, которые дало распараллеливание.

Главным показателем, позволяющем судить, насколько параллельная программа эффективнее последовательной, является ускорение. По определению ускорение на p процессорах задаётся формулой:

$$S_p = \frac{T_1}{T_p},$$

где T_p — время выполнения программы на p процессорах.

Мы запускали программу на двух вычислительных кластерах: NWO5 (ОИВТ РАН) (рис.4) и К-100 (ИПМ РАН) (рис.6). Первая вычислительная система уже является устаревшей, в то время как вторая активно используется в настоящее время в серьёзных расчётах. Значения ускорений на этих двух кластерах дают оценку диапазона ускорений для большинства современных вычислительных кластеров.

В качестве входных данных использовались массивы случайных комплексных чисел. Длины массивов были в пределах от 2^{20} до 2^{25} .

Для кластера NWO5 результаты показаны на графиках на рис. 4.

Как мы видим, ускорение составляет в среднем два раза на кластере nwo5. Так же видно, что некоторые массивы лучше считать на четырёх узлах, а некоторые на восьми (возможно, лучше даже на 16, но на NWO5 нет такого числа вычислительных узлов).

Единственное непонятное обстоятельство – это резкое падение ускорения на втором и последнем графиках. Чтобы объяснить это, выполним запуск нашей программы не 10 раз, а 50, а затем построим график эмпирической функции распределения, чтобы понять, вокруг какой величины “группируются” в основном времена (рис. 5).

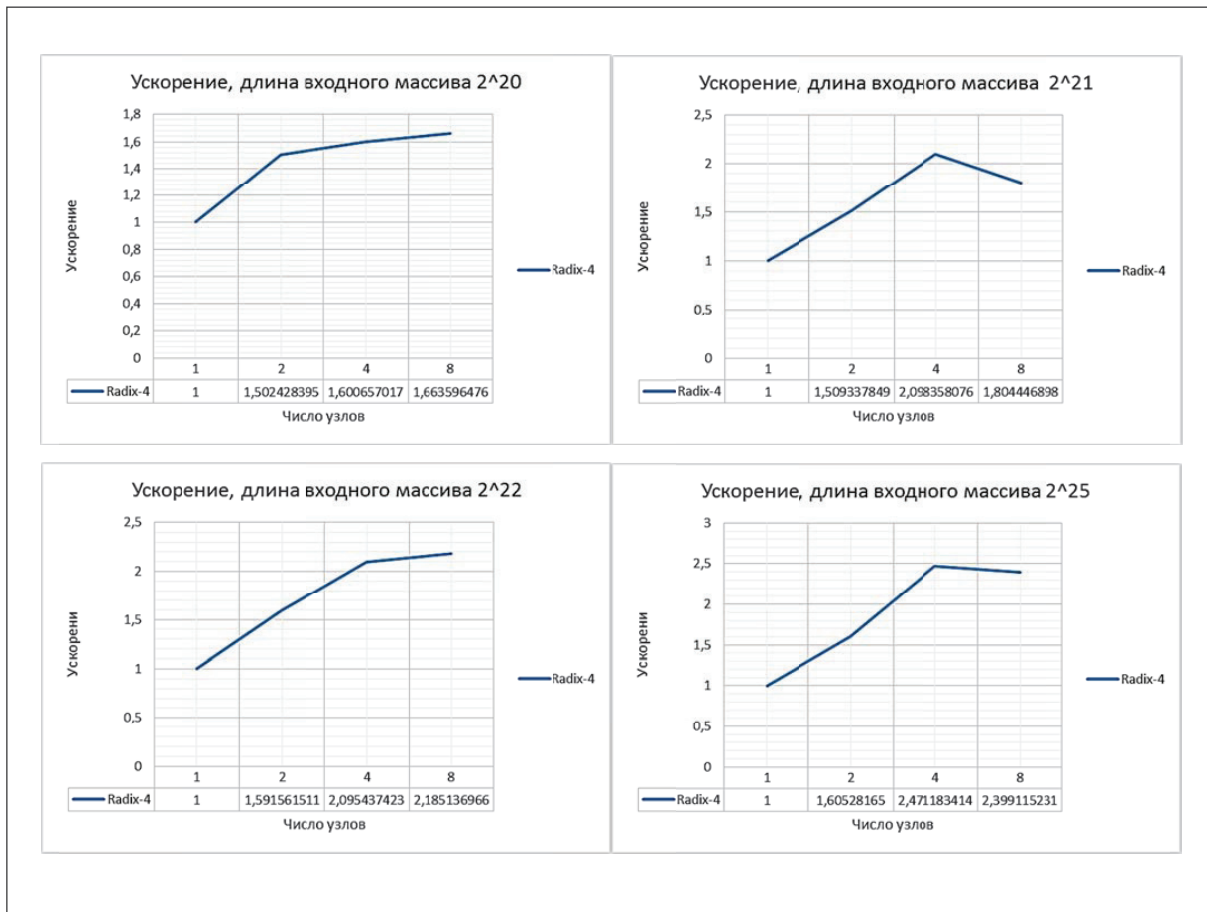


Рис. 4. Ускорение расчёта БПФ по алгоритму Radix-4 для набора случайных входных данных в зависимости от числа процессоров на кластере NWO5

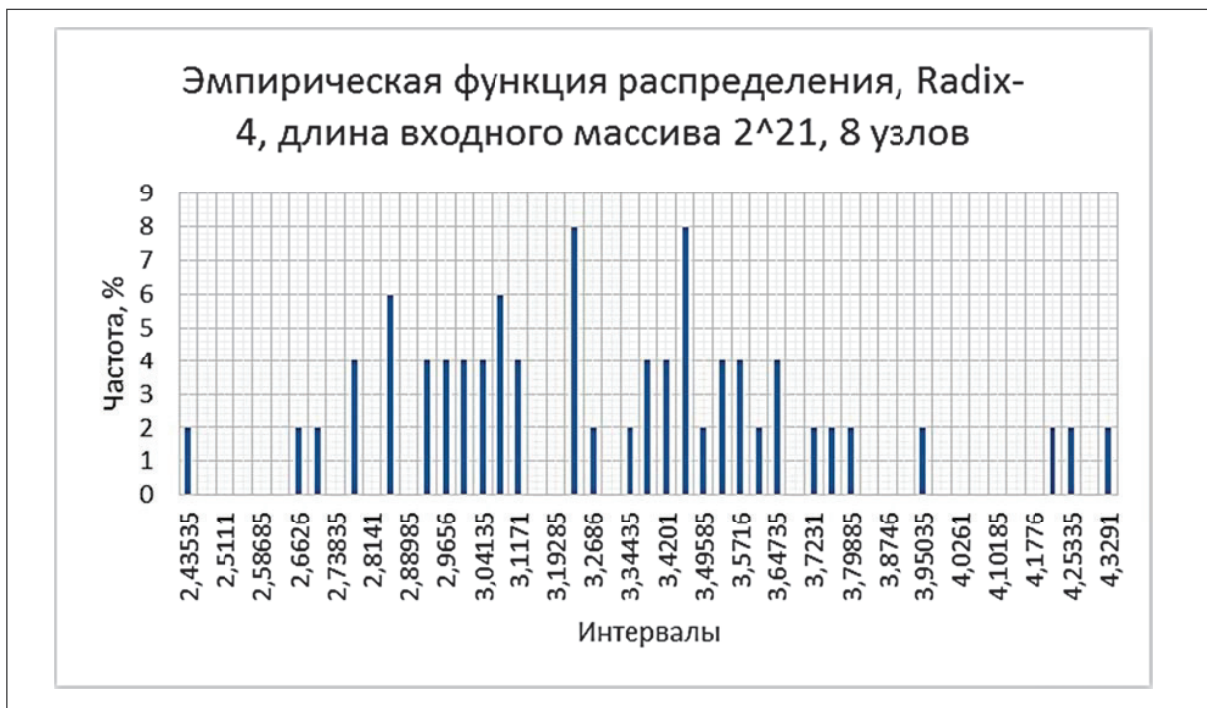


Рис. 5а. Функция распределения времени расчёта БПФ по алгоритму Radix-4 для набора случайных входных данных с длиной 2^{21} на 8 узлах кластера NWO5.



Рис. 5б. Функция распределения времени расчёта БПФ по алгоритму Radix-4 для набора случайных входных данных с длиной 2^{25} на 8 узлах кластера NWO5.

Функция распределения времени для массива 2^{25} явно показывает, что 20% всех времён попадают в отрезок [41.8; 43.9].

Про первый график столь же однозначно утверждать ничего нельзя, но на нём видно, что большая часть измерений попадает в отрезок [3.2; 3.5]. Возможно, такое заметное падение ускорения на первом графике для восьми узлов происходит из-за того, что для такого числа процессоров приходится в конце алгоритма применять ещё преобразование бабочки из Radix-2, что может быть не выгодно для такого небольшого массива (в сравнении с массивами более длинными, для которых на восьми узлах ускорение больше, чем на четырёх).

Отличающиеся результаты (рис. 6) по ускорению расчёта получаются на вычислительном кластере K-100, т.к. этот кластер более современный и его характеристики не сильно отстают от мировых лидеров.

Как видно из этих графиков (рис. 6), ускорение находится в пределах от 1.5 до 4.5. Можно предположить, что на вычислительных системах, которые используются сегодня, ускорение будет также лежать между этими значениями.

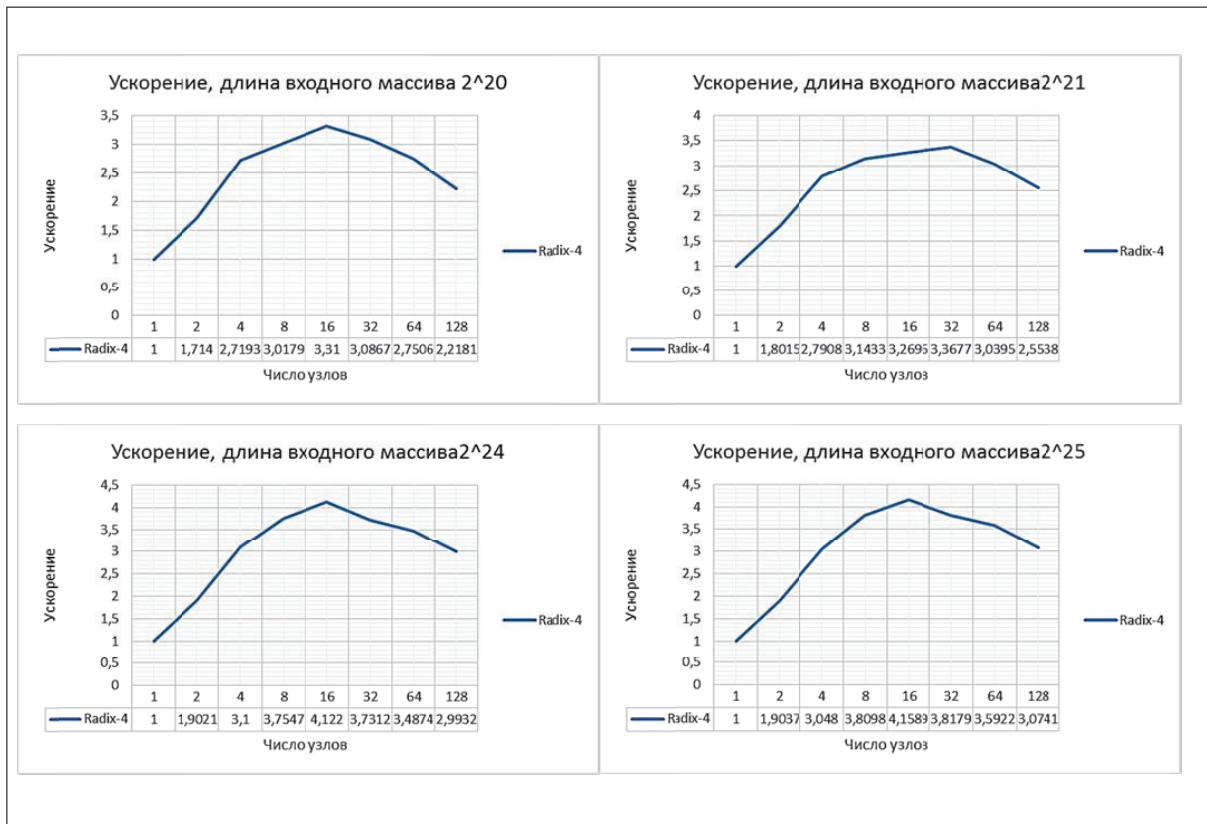


Рис. 6. Ускорение расчёта БПФ по алгоритму Radix-4 для набора случайных входных данных в зависимости от числа процессоров на кластере К-100.

4. Теоретический анализ ускорения параллельной программы

Для расчётов необходимо знать оптимальное число процессоров, при котором будет получено наибольшее ускорение. Это позволит использовать нашу параллельную программу с максимальной эффективностью.

Поскольку сложность БПФ есть $O(n \log_2 n)$, время работы программы на 1 процессоре $T_1 = Cn \log_2 n$, где C – некоторая константа, вычисляемая опытным путём.

Время вычисления на p процессорах T_p складывается из трёх слагаемых: времени, которое затрачивается на межпроцессорную коммуникацию, времени непосредственно параллельных вычислений и, наконец, времени объединения полученных ДПФ на нулевом узле. Время межпроцессорной коммуникации мы будем вычислять по формуле $t = a + \frac{m}{b}$, где a – латентность, b – пропускная способность, а m – величина передаваемого сообщения [5,1].

Для p узлов получаем

$$T_p = 2(p-1)(a + \frac{16n}{pb})k + C \frac{n}{p} \log_2 \frac{n}{p} + Cn(\log_2 n - \log_2 \frac{n}{p}).$$

Окончательная формула, таким образом, принимает следующий вид:

$$S_p = \frac{Cn \log_2 n}{2(p-1)(a + \frac{16n}{pb})k + C \frac{n}{p} \log_2 \frac{n}{p} + Cn(\log_2 n - \log_2 \frac{n}{p})} \quad (1)$$

Время межпроцессорной коммуникации в этой формуле мы умножаем на т. н. “поправочный” коэффициент k порядка единицы. Он необходим, поскольку мы используем слишком грубую оценку для времени коммуникации. Его мы найдём с помощью метода наименьших квадратов для каждой длины входного массива.

Значения k приведены в Таблице 1:

Таблица 1

Значение коэффициента k для разного объёма входных данных

Длина входного массива	Значение k
2^{20}	0.308
2^{21}	0.422
2^{22}	0.537
2^{23}	0.654
2^{24}	0.772
2^{25}	0.891

Из этой таблицы видно, что с увеличением длины массива, поправочный коэффициент приближается к единице. Следует ожидать того, что для массива определённой длины, он будет очень близок к единице. Правда, с ещё бóльшим увеличением объёма входных данных он может продолжить расти.

Чтобы построить графики аппроксимаций (рис. 7), нам необходимо также знать характеристики вычислительной системы, на которой мы запускали нашу программу. Приведём их для кластера К-100:

1. Латентность: $a = 1.2 * 10^{-6}$ с
2. Пропускная способность $b = 700 * 2^{20}$ байт/с

Кроме этого нам надо также знать значение константы C . Чтобы найти его, воспользуемся данными о времени работы программы на одном узле. Тогда $c = \frac{t}{n \log_2 n}$, где t – время работы программы, n – длина входного массива. Для кластера К-100 получаем $C = 2 * 10^{-8}$.

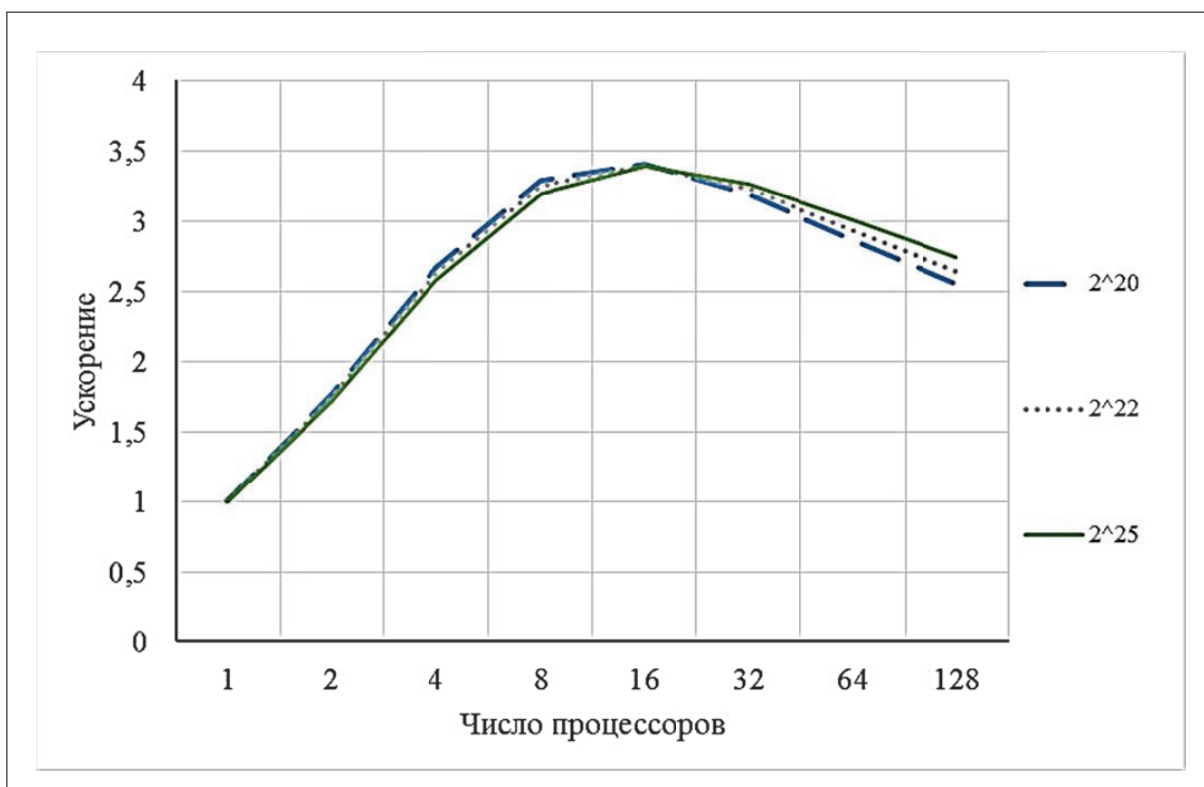


Рис. 7. Зависимость ускорения вычисления БПФ от числа процессоров согласно теоретической формуле с параметрами кластера К-100

Полученная формула (1) хорошо описывает зависимость ускорения расчёта БПФ от числа процессоров и справляется со своей задачей: её максимум действительно приходится на 16 узлов (рис. 7).

5. Заключение

Для задачи быстрого преобразования Фурье разработана и реализована версия алгоритма Radix-4 для многопроцессорных вычислительных систем на основе технологии MPI. Алгоритм протестирован на кластере nwo5 (ОИВТ РАН) и на кластере К-100 (ИПМ РАН). Зависимость ускорения расчёта от числа вычислительных узлов показала, что оптимальное число узлов для данного алгоритма лежит в диапазоне от 4 до 16 для длины входного массива в пределах от 2^{20} до 2^{25} . Построена теоретическая модель описывающая ускорение расчёта на многопроцессорных системах. Она оказалась в удовлетворительном согласии с результатами анализа расчётов. Эта формула позволит определять оптимальное число узлов для расчёта для каждой конкретной вычислительной системы.

Таким образом, данная параллельная реализация даёт ускорение от 1.5 до 4.5 раз как на современных, так и на более старых кластерах при использовании от 4 до 16

процессоров, если длина входного массива находится в пределах от 2^{20} до 2^{25} элементов. Увеличение числа процессоров ведёт к уменьшению ускорения расчёта и к увеличению времени расчёта.

Эти показатели ускорения не являются предельными. Время расчёта можно уменьшить за счёт:

- 1) оптимизации последовательной части программы (технология SIMD и др.) [4];
- 2) декомпозиции задачи для случая большого объёма входных данных (например, пока один процесс будет вычислять поворачивающие множители для дальнейших вычислений, все остальные будут расставлять элементы входного массива в нужном порядке);
- 3) оптимизации расходов на передачу информации между узлами с помощью подготовки подходящей топологии вычислительного кластера.

В процессе работы над статьёй использованы кластеры nwo5 (ОИВТ РАН) и K-100 (ИПМ РАН).

Литература

1. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений // БИНОМ, М., 2007, 424 стр.
2. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C. Introduction to algorithms. // MIT press, Cambridge, 2001, 640 pp.
3. Chu E., George A. Inside the FFT Black Box: Serial and Parallel Fast Fourier Transform Algorithms // CRC Press, 1999, 336pp.
4. Postpischil E. Construction of High Performance FFT // URL: <http://edp.org/work/Construction.pdf>, 2004, 93pp.
5. Grama A., Gupta A., Karypis G., Kumar V. Introduction to Parallel Computing // Addison Wesley, 2003, 612pp.
6. Stasiński R., Potrymajło J. Mixed-Radix FFT for improving cache performance. // Доклад на конференции «ESIPCO'04», 2004, 1525-1528.

EFFICIENCY OF FAST FOURIER TRANSFORM PARALLEL ALGORITHM RADIX-4

A.A. Morozov¹, A.V. Timofeev^{2,1}

¹*Department of Applied Mathematics,
National Research University "Higher School of Economics"*

²*JIHT RAS, Moscow, Russia*

timofeevalvl@gmail.com

Received 03.08.2015

Parallel program for the fast Fourier transform is implemented on the basis of MPI (Message Passing Interface) technology. Radix-4 algorithm is chosen as a basic method to use. The dependence of parallel calculation acceleration on the number of processors is studied for two supercomputers. The formula describing the dependence of the calculation time on the number of processors is proposed for the range of the input data volume and supercomputer characteristics. The number of nodes providing you with maximum acceleration of calculation is estimated.

АКУСТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВИХРЯ, НАЙДЕННЫЙ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Т.А. Петрова, Ф.В. Шугаев

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля*

tapetrova@physics.msu.ru, shugaev@phys.msu.ru

Поступила 10.03.2016

Рассмотрена генерация звука одиночным цилиндрическим вихрем, опирающимся на плоскость. Акустическое излучение возникает за счет диффузии завихренности в вязком теплопроводном газе. Впервые определен акустический спектр такого излучения. Исследована зависимость осцилляций плотности от времени и координат. Рассмотрены геометрически подобные случаи и получена зависимость частоты колебаний от коэффициента подобия. Показано, что частота акустического излучения не зависит от интенсивности начальной завихренности, а зависит лишь от начальных геометрических размеров вихревого цилиндра. Задача решена на основе уравнений Навье-Стокса в приближении малой начальной завихренности. Результаты работы представляют интерес в аэроакустике и могут быть полезны для моделирования торнадо.

УДК 532.516.5

1 Введение

Как известно, вихревые структуры при определенных условиях становятся источниками звука. Излучение звука происходит за счет преобразования вращательной кинетической энергии в продольные акустические волны [1]. Современная теория вихревого звука была основана Лайтхиллом [2]. Общие вопросы генерации звука вихревыми структурами рассмотрены в работе [3]. Акустическое излучение системы двух вихре-

вых колец исследовано в работе [4], системы четырех цилиндрических вихрей – в работе [5]. Влияние вихревых структур на свойства турбулентного течения подтверждено многочисленными экспериментами [6-9]. Анализ энергии возмущений вихревых течений в связи с проблемой устойчивости посвящены работы [10-12].

По мнению ряда исследователей, свойства турбулентного течения могут быть описаны на основе уравнений Навье–Стокса без привлечения дополнительных гипотез [13, 14]. Следует также упомянуть, что в численных моделях LES (Large Eddy Simulation – моделирование с помощью крупных вихрей) турбулентность моделируется совокупностью крупномасштабных вихрей. В этой связи изучение динамики отдельных вихрей и характеристик их акустического излучения представляет определенный интерес. В работе [15] численные модели LES применены для описания акустического излучения.

Частота акустического излучения вихревого кольца в невязкой несжимаемой и слабо сжимаемой жидкости определена в работах [16, 17], в вязком теплопроводном газе – в работе [18]. Что касается частоты акустического излучения одиночного цилиндрического вихря, то она найдена лишь для двумерного цилиндра в невязкой жидкости [19, 20, 21]. Поэтому представляется уместным выполнить исследование для цилиндрического вихря в вязком теплопроводном газе.

Целью данной работы является исследование осцилляций параметров газа, определение частоты акустического излучения, а также спектра акустических колебаний одиночного цилиндрического вихря в вязком теплопроводном газе (воздухе). Анализ производится на основе уравнений Навье–Стокса.

2 Исходные уравнения

Нестационарная система уравнений Навье–Стокса имеет вид:

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \\ \rho \frac{du}{dt} = P_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, P_{ij} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{2}{3} \mu \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} - p \delta_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), u = C_v T.$$

Следуя Гельмгольцу, разложим поле скорости на потенциальную и соленоидальную часть:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = -\frac{\vec{\nabla}}{4\pi} \int \frac{s(\vec{\xi}, t)}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} d\vec{\xi} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{\Omega}(\vec{\xi}, t)}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} d\vec{\xi};$$

$$s = \vec{\nabla} \vec{v}, \vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}, \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\partial}{\partial x_2}; \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (1)$$

Принимая во внимание (1), запишем систему уравнений Навье-Стокса в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Omega_i}{\partial t} &= \nu \Delta \Omega_i + \frac{3}{4} e_{ijk} \nu \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_m} - v_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} + \Omega_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} - s \Omega_i + f_{1i}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -v_j \frac{\partial w}{\partial x_j} + s, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{e^h}{\gamma} \Delta w + \frac{4}{3} \nu \Delta s - \left(\frac{1}{\gamma} e^h + 0.5 s \nu \right) \Delta h + 1.5 \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} - v_j \frac{\partial s}{\partial x_j} + f_2, \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\gamma}{\text{Pr}} \eta \Delta h - (\gamma - 1) s - v_j \frac{\partial h}{\partial x_j} + f_3, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$w = -\text{Log } \rho, \quad h = \text{Log } T, \quad \nu = \mu / \rho, \quad \eta = \lambda / \rho,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, 3.$$

Здесь e_{ijl} – антисимметричный тензор, $\rho, T, \bar{v}$ – безразмерные значения плотности, температуры, скорости (отнесенные к ρ_0, T_0, c_0 , соответственно); μ, ν, λ, c – вязкость, кинематическая вязкость, теплопроводность и низкочастотная скорость звука, соответственно, γ – показатель адиабаты; Pr – число Прандтля. Функции f_{1i}, f_2, f_3 – нелинейные члены относительно первых производных по координатам.

Система (2) записана в безразмерном виде с помощью характеристической длины $l_0 = \nu_0 / c_0$ и характеристического времени $t_0 = \nu_0 / c_0^2$. Индекс “0” относится к начальному состоянию. Коэффициенты вязкости и теплопроводности в воздухе рассчитываются по формулам: $\mu = \mu_0 (T/T_0)^{0.75}$, $\lambda = \lambda_0 (T/T_0)^{0.75}$, где T_0 – температура в начальный момент времени. Давление, температура и плотность связаны уравнением Менделеева-Клапейрона $p = \frac{\rho R T}{M}$, где M – молярная масса.

В начальный момент завихренность имеет отличное от нуля значение ω_0 только внутри газообразного кругового цилиндра радиуса r_0 и высотой z_0 . Цилиндр располагается на плоскости (Рис. 1). Ось цилиндра неподвижна относительно плоскости и перпендикулярна ей:

Задача решается в предположении, что начальная завихренность ω_0 мала, $\omega_0 \ll 1$.

Начальные условия задачи таковы:

$$\Omega_z(\vec{x}, 0) = \begin{cases} \omega_0, & r \leq r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases}$$

$$w(\vec{x}, 0) = s(\vec{x}, 0) = h(\vec{x}, 0) = 0.$$

Скорость газа на плоскости равна нулю:

$$\vec{v}(\vec{x}, t)|_{z=0} = 0.$$

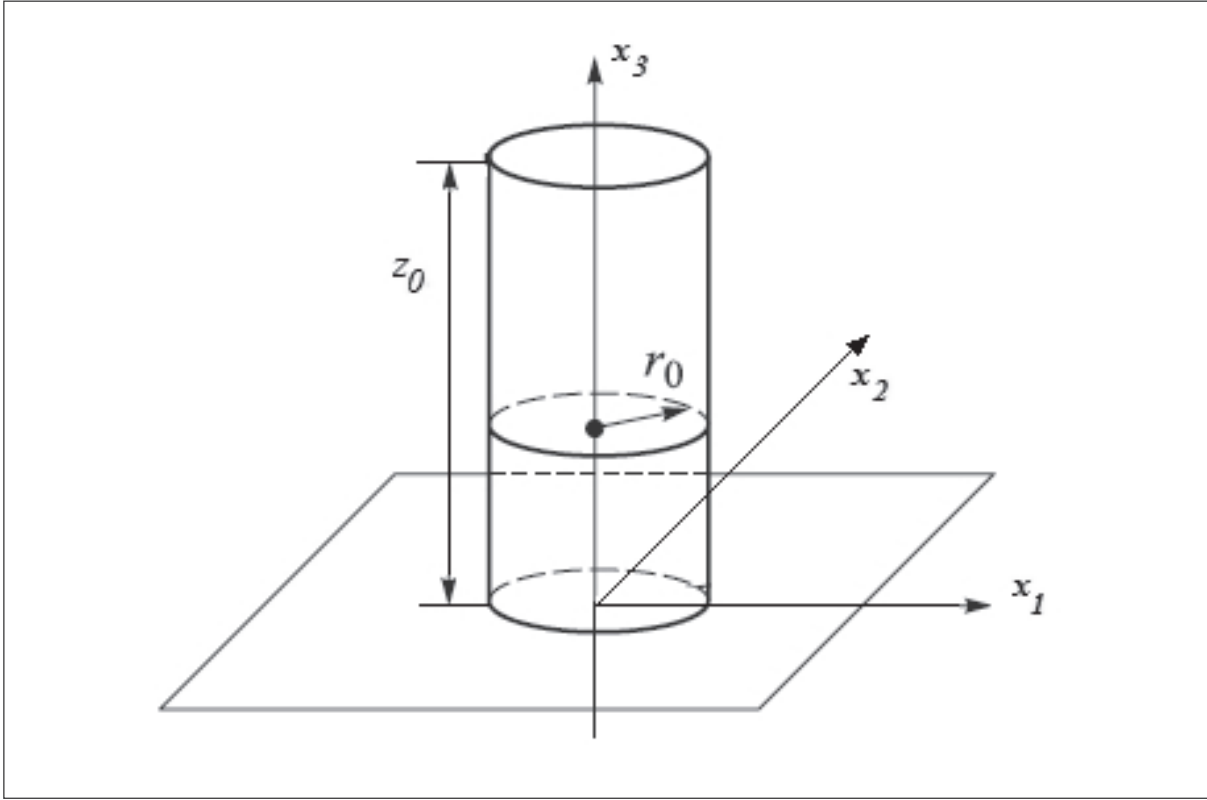


Рис. 1. Схема течения

Вследствие симметрии начальных данных решение не зависит от цилиндрической координаты φ , а зависит только от r, z, t .

Для решения системы (1) используется разложение неизвестных функций по степеням малого параметра $\varepsilon = \omega_0$. В результате получаем выражения [22]:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1^{(1)}(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 \Omega_1^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 \Omega_1^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 \Omega_1^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\
 \Omega_2^{(1)}(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 \Omega_2^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 \Omega_2^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 \Omega_2^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\
 \Omega_3(\vec{x}, t) &= \varepsilon \Omega_3^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^2 \Omega_3^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 \Omega_3^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\
 w(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 w^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 w^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 w^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\
 s(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 s^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 s^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 s^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\
 h(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 h^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 h^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 h^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\
 v_i(\vec{x}, t) &= \varepsilon v_i^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^2 v_i^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 v_i^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots
 \end{aligned} \tag{3}$$

Подстановка разложений (3) в уравнения (1) дает систему линейных параболических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при старших производных, а также выражения для компонент скорости. Ограничиваясь первыми членами разложения, будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega_i^{(1)}}{\partial t} = \Delta \Omega_i^{(1)}, \\ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} = s^{(1)}, \\ \frac{\partial s^{(1)}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \Delta w^{(1)} + \frac{4}{3} \Delta s^{(1)} - \frac{1}{\gamma} \Delta h^{(1)} + \varphi_2^{(1)}, \\ \frac{\partial h^{(1)}}{\partial t} = \frac{\gamma}{\text{Pr}} \Delta h^{(1)} - (\gamma - 1) s^{(1)} + \varphi_3^{(1)}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_2^{(1)} &= -\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i}, \\ \varphi_3^{(1)} &= \frac{1}{2} \gamma (\gamma - 1) D_{ij} v^{(1)} D_{ij} v^{(1)}, \\ D_{ij} v^{(1)} &= \left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Скорость равна:

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}, t) &= -\frac{0.25}{\pi} \int \{ \vec{\Omega}(\vec{x} + \vec{r}', t) \times \vec{n} + s(\vec{x} + \vec{r}', t) \vec{n} \} dr' \sin \theta' d\theta' d\varphi', \\ n &= \{ \sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta' \}. \end{aligned}$$

Система (4) состоит из трех однородных параболических уравнений для $\Omega_i^{(1)}$ и неоднородной параболической подсистемы с постоянными коэффициентами. Отметим, что в нашем случае от нуля отлична только одна компонента $\Omega_3^{(1)}$.

Из первого уравнения системы (4) следует выражение для завихренности:

$$\Omega_3^{(1)}(\vec{x}, t) = \frac{0.125}{\pi^{3/2} t^{3/2}} \int \Omega_3^{(1)}(\xi, 0) * \exp\left(-0.25 \left| \vec{x} - \vec{\xi} \right|^2 / t\right) d\vec{\xi}. \quad (5)$$

Выражение для $\Omega_3^{(1)}$ позволяет вычислить компоненты скорости, а, следовательно, и члены $\varphi_2^{(1)}, \varphi_3^{(1)}$, входящие в правые части дифференциальных уравнений системы (4).

Решение однородной системы с постоянными коэффициентами находится с помощью Фурье-преобразования. При этом однородная параболическая подсистема принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{w}^{(1)}}{dt} = \tilde{s}^{(1)}, \\ \frac{d\tilde{s}^{(1)}}{dt} = -\frac{k^2}{\gamma} \tilde{w}^{(1)} - \frac{4}{3} k^2 \tilde{s}^{(1)} + \frac{k^2}{\gamma} \tilde{h}^{(1)}, \\ \frac{d\tilde{h}^{(1)}}{dt} = -k^2 \frac{\gamma}{\text{Pr}} \tilde{h}^{(1)} - (\gamma - 1) \tilde{s}^{(1)}. \end{cases} \quad (6)$$

Волнистая линия обозначает Фурье-образ. Характеристическое уравнение системы (6) имеет вид [23]

$$f^3 + k^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{\gamma}{\text{Pr}} \right) f^2 + k^2 \left(\frac{4}{3} \frac{\gamma}{\text{Pr}} k^2 + 1 \right) f + \frac{k^4}{\text{Pr}} = 0 \quad (7)$$

При $0 \leq k \leq k_*$ ($k_* \approx 1$ для воздуха), корни уравнения (7) выглядят следующим образом

$$f_1 = \sigma_1(k), f_{2,3} = \sigma_2(k) \pm i\omega(k); \sigma_1, \sigma_2 < 0.$$

При $k > k_*$ все корни действительны и быстро затухают со временем, поэтому данный случай не рассматривается. Дисперсионная кривая $\omega(k)$ имеет две ветви. Учитывается только та ветвь ($0 \leq k \leq k_1 < k_*$), которая соответствует меньшим значениям коэффициентов затухания σ_1, σ_2 .

Фундаментальная матрица решений A для параболической подсистемы (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} A &= [a_{ij}], \\ a_{1i} &= c_{1i} e^{\sigma_1 t} + c_{2i} e^{\sigma_2 t} \cos(\omega t) + c_{3i} e^{\sigma_2 t} \sin(\omega t), \\ a_{2i} &= c_{1i} \sigma_1 e^{\sigma_1 t} + (c_{2i} \sigma_2 + c_{3i} \omega) e^{\sigma_2 t} \cos(\omega t) + (c_{3i} \sigma_2 - c_{2i} \omega) e^{\sigma_2 t} \sin(\omega t), \\ a_{3i} &= c_{1i} \left(1 + \gamma \sigma_1 \left(\frac{\sigma_1}{k^2} + \frac{4}{3} \right) \right) e^{\sigma_1 t} + \left(\left(1 + \frac{\gamma}{k^2} (\sigma_2^2 - \omega^2) \right) + \frac{4}{3} \gamma \sigma_2 \right) c_{2i} + 2\gamma \omega \left(\frac{\sigma_2}{k^2} + \frac{2}{3} \right) c_{3i} e^{\sigma_2 t} \cos(\omega t) + \\ &+ (-2\gamma \omega \left(\frac{\sigma_2}{k^2} + \frac{2}{3} \right) c_{2i} + \left(1 + \frac{\gamma}{k^2} (\sigma_2^2 - \omega^2) + \frac{4}{3} \gamma \sigma_2 \right) c_{3i}) e^{\sigma_2 t} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты c_{ij} определяются из начальных условий и имеют значения:

$$c_{11} = (\gamma(\sigma_2^2 + \omega^2) - k^2) / g_1, c_{12} = -2(\sigma_2 + \frac{2}{3} k^2) / g_0, c_{13} = k^2 / g_1,$$

$$c_{21} = (\gamma \sigma_1 (\sigma_1 - 2\sigma_2) + k^2) / g_1, c_{22} = -c_{12}, c_{23} = -c_{13},$$

$$c_{31} = (\gamma \sigma_1 (\sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \omega^2) + k^2 (\sigma_1 - \sigma_2)) / (\omega g_1),$$

$$c_{32} = (\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \omega^2 + \frac{4k^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{3}) / (\omega g_0),$$

$$c_{33} = k^2 (\sigma_2 - \sigma_1) / (\omega g_1);$$

$$g_0 = (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + \omega^2, g_1 = \gamma g_0.$$

Исследуются колебания плотности $w^{(1)}$:

$$w^{(1)}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{R^3} d\vec{\xi} \int_{R^3} d\vec{k} \exp(i\vec{k}(\vec{x} - \vec{\xi}))^* \{a_{12}(k, t - \tau)\varphi_2^{(1)}(\vec{\xi}, \tau) + a_{13}(k, t - \tau)\varphi_3^{(1)}(\vec{\xi}, \tau)\}, \quad (8)$$

Функции $s^{(1)}(\vec{x}, t)$, $h^{(1)}(\vec{x}, t)$ могут быть получены аналогично.

Введем переменную $\vec{X} = \vec{\xi} - \vec{x}_0$. Тогда уравнение (9) принимает вид

$$w^{(1)}(\vec{x}_0, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{k_1} k dk \int_0^\infty R_3 dR_3 \int_0^\pi \sin \theta_3 d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(kR_3)^* \{a_{12}(k, t - \tau)\varphi_2^{(1)}(\vec{x}_0 + \vec{X}, \tau) + a_{13}(k, t - \tau)\varphi_3^{(1)}(\vec{x}_0 + \vec{X}, \tau)\}. \quad (9)$$

Отклонение плотности от начального значения равно

$$\frac{\rho_d - \rho_0}{\rho_0} \approx -w \cong -\omega_0^2 w^{(1)}.$$

Здесь ρ_d обозначает размерную плотность.

Функция $w^{(1)}$, также как и частота акустического излучения, не зависит от ω_0 . Аналогичным образом можно получить выражение для $w^{(n)}$, $n > 1$. Первые члены ряда могут быть использованы для анализа частотного диапазона осцилляций плотности в случае малой завихренности. Отметим, что в нашем случае колебания давления практически совпадают с колебаниями плотности.

3 Результаты и обсуждение

Для исследования эволюции плотности использовалось уравнение (9). Кратные интегралы вычислены с применением сеток Коробова [24]. Расчеты выполнены как для исходной области внутри вихревого цилиндра, так и для области вне его.

Рис. 2-5 описывают осцилляции плотности внутри первоначального вихревого цилиндра. Рис. 2 относится к точке на оси цилиндра. Как можно видеть, сначала амплитуда колебаний растет, затем спадает до нуля. Через некоторое время колебания возникают заново с меньшей амплитудой и стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

На спектре (Рис. 3) наблюдаются две собственные частоты (порядка 115 и 280 Гц), которые разделены непрерывным спектром.

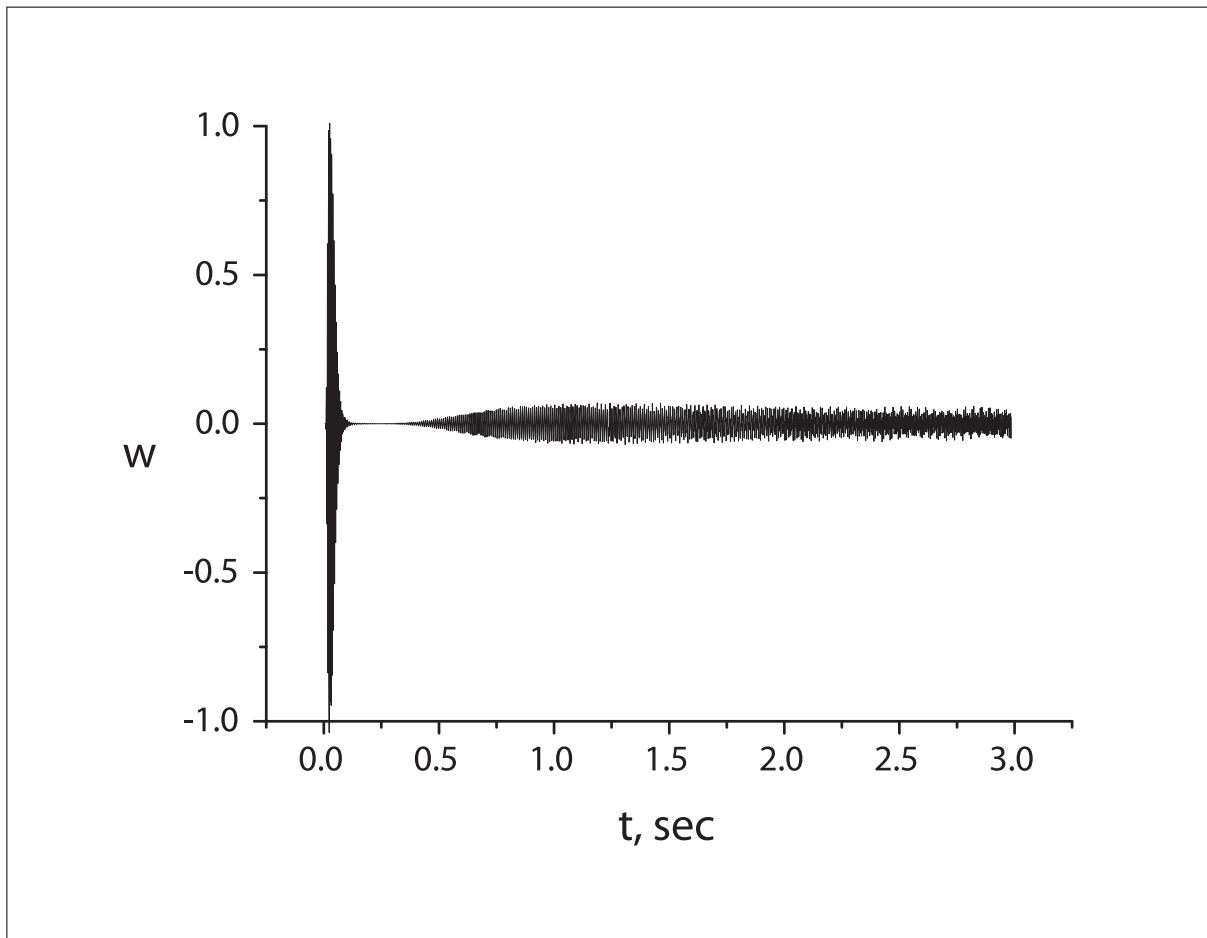


Рис. 2. График функции $w = -\log \rho$ на оси цилиндра в зависимости от времени,
 $r_0 = 0.188 \text{ см}, z_0 = 2.909 \text{ см}, z = 1.7 \text{ см}$.

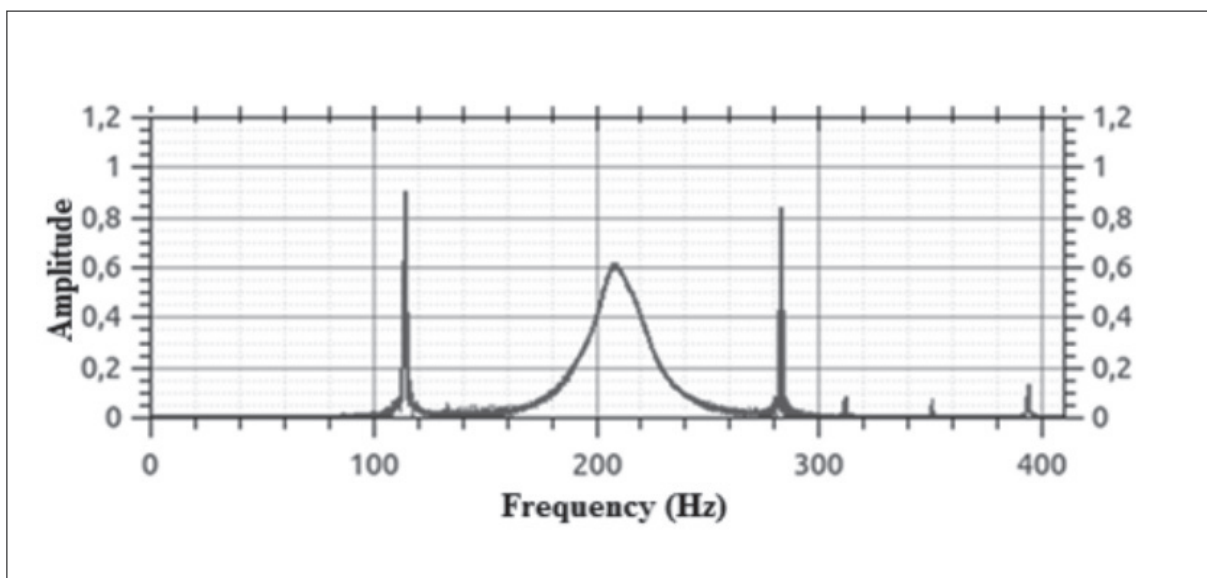


Рис. 3. Спектр колебаний функции $w = -\log \rho$ на оси цилиндра,
 $r_0 = 0.188 \text{ см}, z_0 = 2.909 \text{ см}, z = 1.7 \text{ см}$.

Рис. 4 демонстрирует колебания при $r = r_0 / 2$. В этом случае также можно различить два временных интервала, в которых амплитуда колебаний достаточно велика.

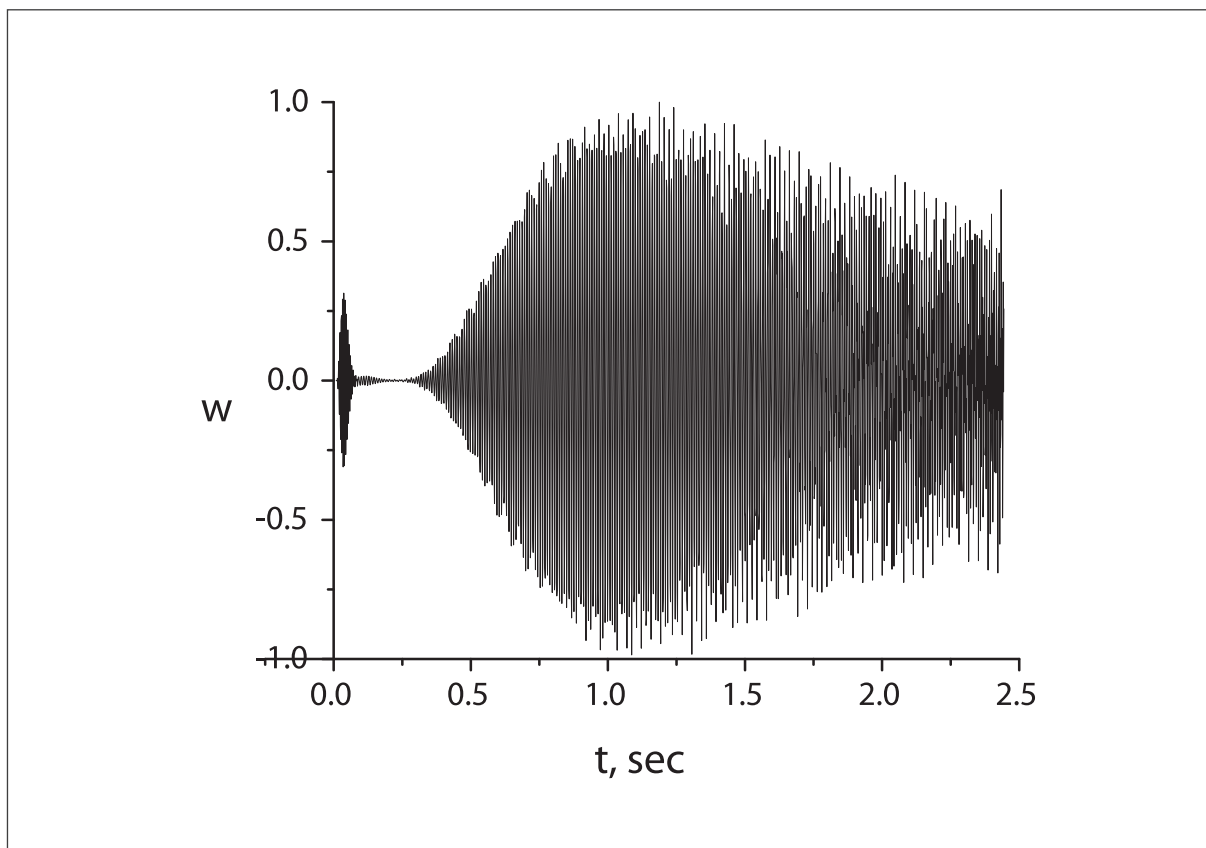


Рис. 4. График функции $w = -\log \rho$ при $r = r_0 / 2$ в зависимости от времени, $r_0 = 0.188 \text{ см}$, $z_0 = 2.909 \text{ см}$, $z = 1.7 \text{ см}$.

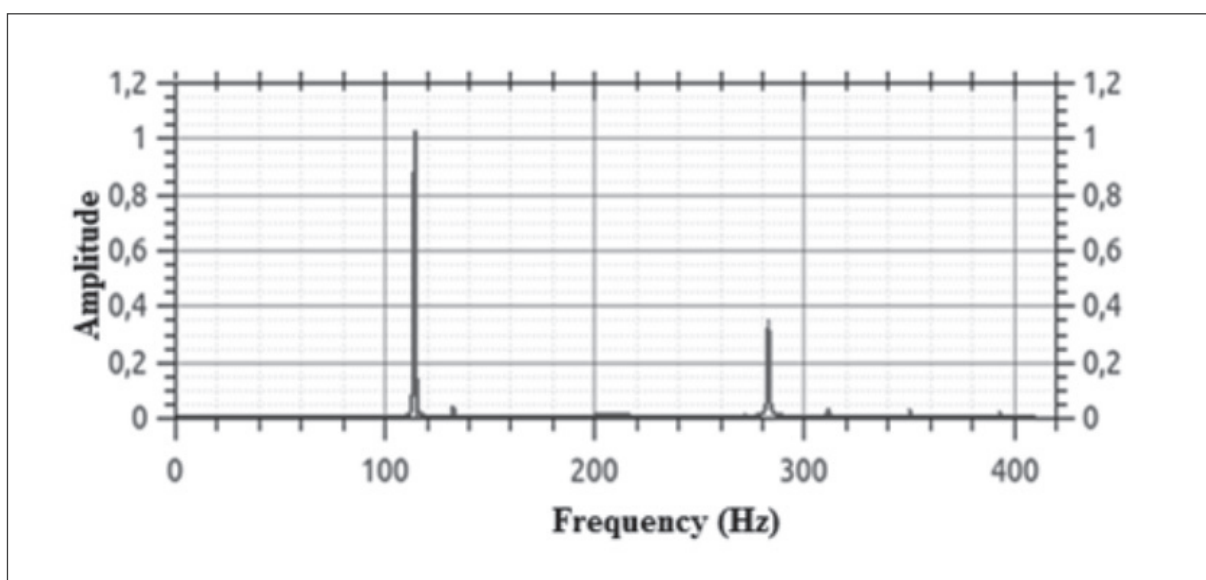


Рис. 5. Спектр колебаний функции $w = -\log \rho$ при $r = r_0 / 2$, $r_0 = 0.188 \text{ см}$, $z_0 = 2.909 \text{ см}$, $z = 1.7 \text{ см}$.

Максимальная амплитуда наблюдается при $f = 110 \text{ Гц}$. Спектр колебаний в этом случае, как и в предыдущем, имеет две собственные частоты (порядка 115 и 280 Гц); области непрерывного спектра не наблюдается. Процесс имеет несколько другой вид для области вне первоначального цилиндра (Рис. 6).

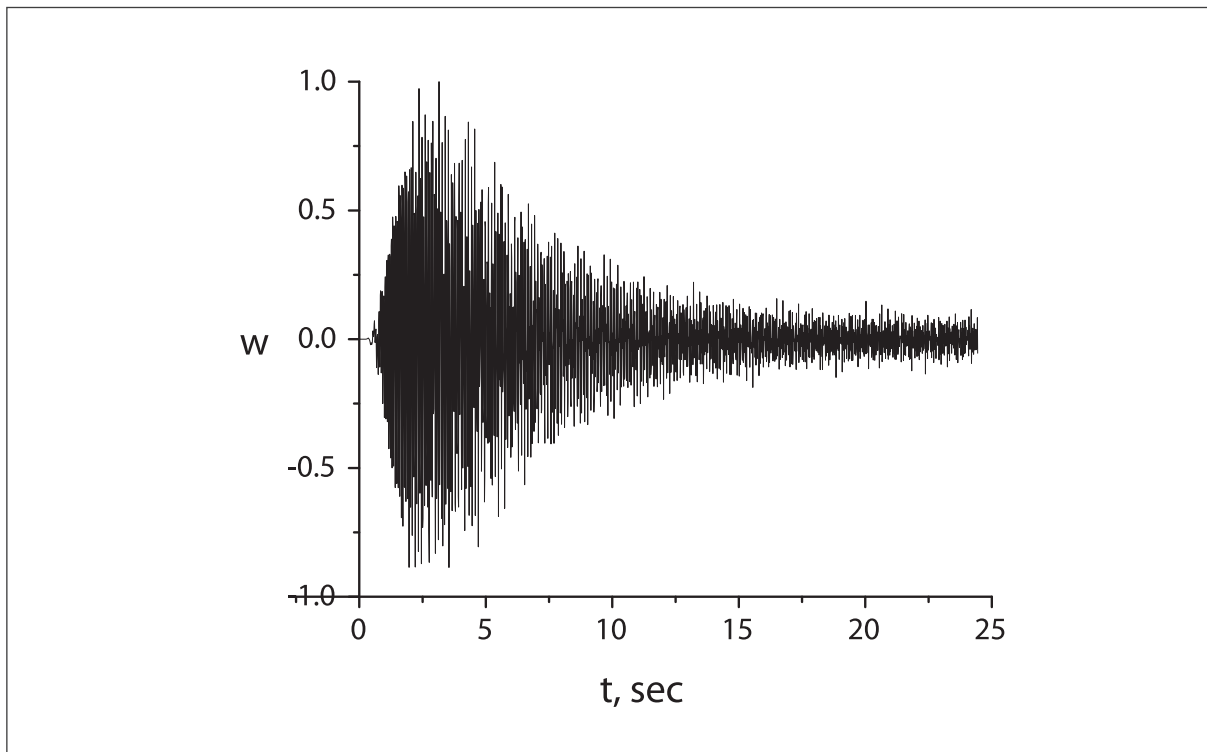


Рис. 6. График функции $w = -\log \rho$ при $r > r_0$ в зависимости от времени,
 $r = 1.709 \text{ см}, r_0 = 0.188 \text{ см}, z_0 = 2.909 \text{ см}, z = 1.7 \text{ см}$.

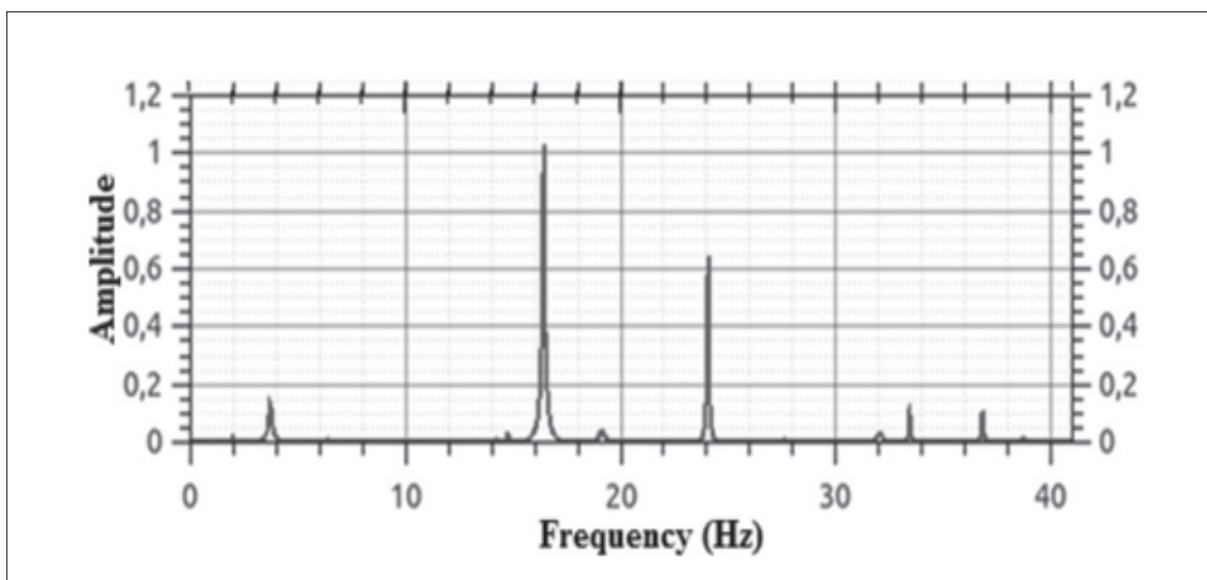


Рис. 7. Спектр колебаний величины $w = -\log \rho$ при $r > r_0$,
 $r = 1.709 \text{ см}, r_0 = 0.188 \text{ см}, z_0 = 2.909 \text{ см}, z = 1.7 \text{ см}$.

Рис. 6 описывает колебания в точке вне цилиндра. Видно, что колебания сначала нарастают ($t = 0 \div 3c$), затем наблюдается область резкого уменьшения амплитуды ($t = 3 \div 12c$) и далее – насыщение и медленное затухание ($t > 12c$). Рисунку 6 соответствует спектр, представленный на Рис. 7. На спектре выделяются две собственные частоты (порядка 17 Гц и 24 Гц).

Далее рассмотрим случаи, геометрически подобные картине течения на Рис.6 с коэффициентами подобия 2, 3, 5.

График на Рис. 8 (коэффициент подобия 2) практически совпадает с исходным графиком, за исключением того, что процесс развивается медленнее. Так, нарастание амплитуды происходит в промежутке $t = 0 \div 15c$, резкий спад – при $t = 14 \div 40c$. При коэффициенте подобия 3 (Рис. 9) процесс развивается еще медленнее, чем предыдущие два. Кроме того, можно наблюдать не одну, а две области нарастания амплитуды колебаний, $t = 0 \div 25c$ и $t = 80 \div 160c$.

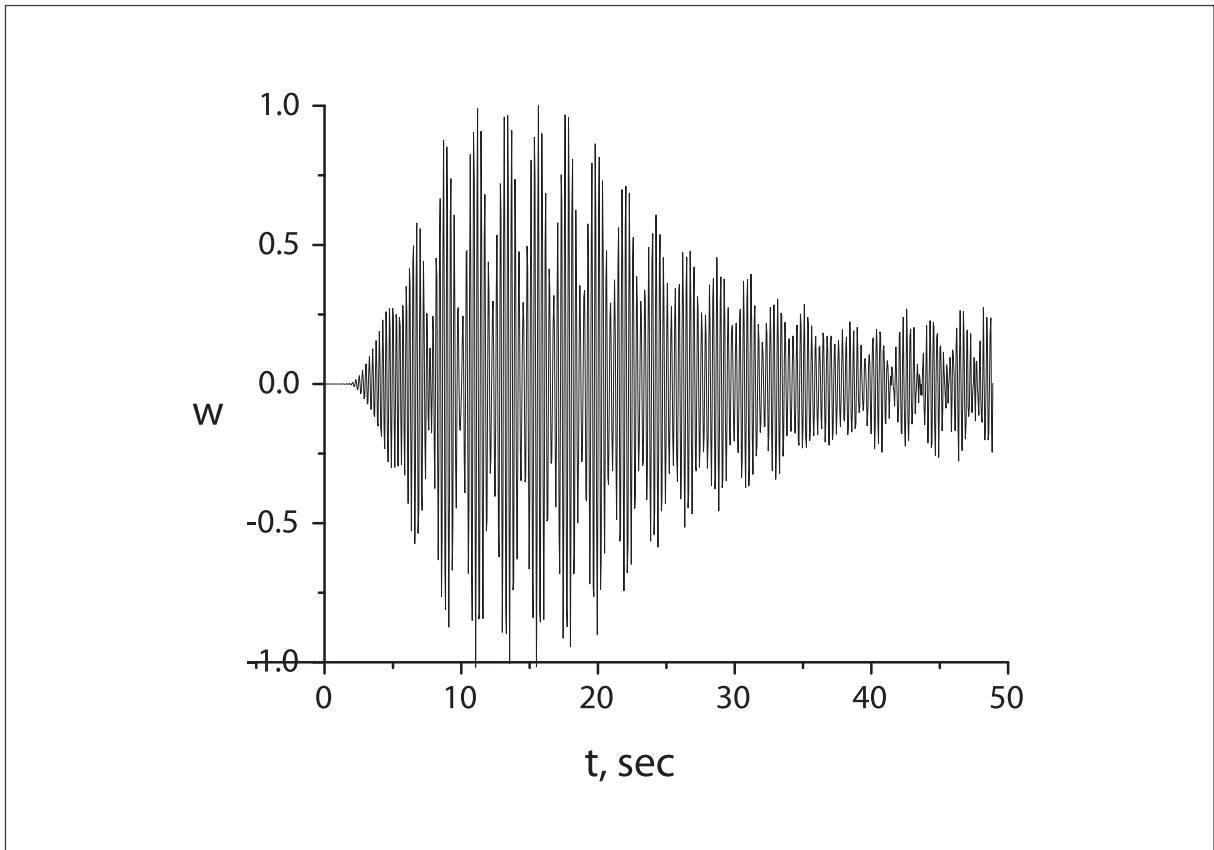


Рис. 8. Коэффициент подобия 2. График функции $w = -\log \rho$ при $r > r_0$ в зависимости от времени $r = 3.418 \text{ см}, r_0 = 0.376 \text{ см}, z_0 = 5.818 \text{ см}, z = 3.4 \text{ см}$.

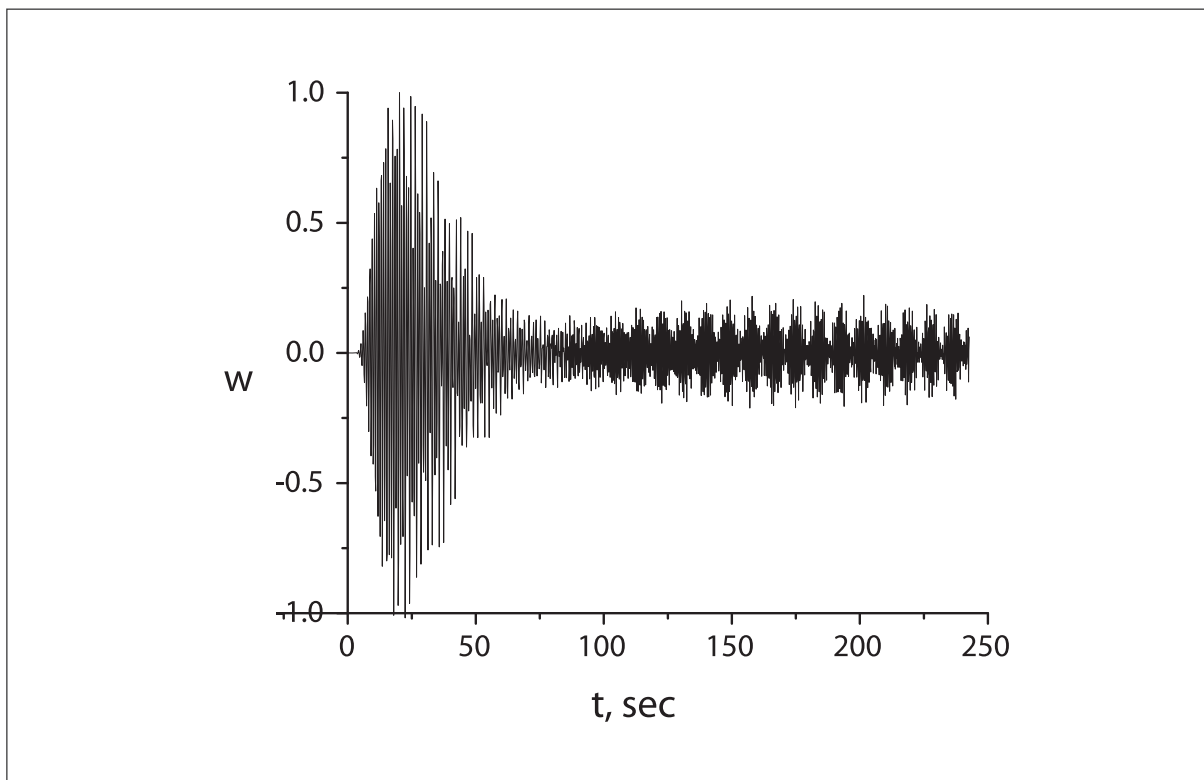


Рис. 9. Коэффициент подобия 3. График функции $w = -\log \rho$ при $r > r_0$ в зависимости от времени, $r = 5.127 \text{ см}$, $r_0 = 0.564 \text{ см}$, $z_0 = 8.727 \text{ см}$, $z = 5.1 \text{ см}$.

4 Заключение

Рассмотрена генерация звука одиночным цилиндрическим вихрем, опирающимся на плоскую поверхность в вязком теплопроводном газе при малой начальной завихренности. Впервые учтен процесс диффузии завихренности и построен акустический спектр в различных точках пространства.

Показано, что процесс характеризуется двумя собственными частотами. Причем для случая на оси цилиндра, между собственными частотами можно наблюдать непрерывный спектр. Показано, что при малой начальной завихренности частота акустического излучения зависит лишь от начального радиуса вихревого цилиндра и не зависит от интенсивности начальной завихренности.

Результаты работы могут представлять интерес для аэроакустики и для моделирования торнадо.

Литература

1. *Howe M.S.* Theory of vortex sound // Cambridge University Press, UK, 2003.
2. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically. Part I: General theory // Proceedings of the Royal Society of London, 1952, A21, pp. 564–587.
3. *Powell A.* Theory of vortex sound // J. Acoust. Soc. Amer. 1964. 36. pp. 177.
4. *Inoue O.* Sound generation by the leapfrogging between two coaxial vortex rings // Phys. Fluids. 2002. 14, No. 9, pp.3361.
5. *Eldredge J.D.* The dynamics and acoustics of viscous two-dimensional leapfrogging vortices // J. Sound and Vibration. 2007. 301. pp. 74.
6. *Луговцов Б.А.* Некоторые проблемы математики и механики // М., Наука, 1970.
7. *Johnson G.M.* An empirical model of the motion of turbulent vortex rings // AIAA J. 1971. Vol. 9, No 4, pp. 763.
8. *Maxworthy T.J.* Turbulent vortex rings // J. Fluid Mech. 1974. 64. pp. 22.
9. *Maxworthy T.J.* Some experimental studies of vortex rings // J. Fluid Mech. 1977. 81. 465 pp.
10. *Holm D., Marsden J., Ratiu T., Weinstein A.* Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Phys.Rep. 1985. 123. 1 pp.
11. *Menshov I., Nakamura Y.* Unconditionally stable scheme for unsteady compressible flows // Phys. Fluids. 2005. V. 17. No. 3. pp. 034102-1 – 034102-15.
12. *Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А.* Об акустической неустойчивости аксиального вихря// Акуст. журн. 1983. 29. стр. 192.
13. *Chorin A., Marsden J., Smale S.* Turbulence seminar. Lecture notes in mathematics // Springer, 1977. pp. 615.
14. *Barenblatt G.I., Chorin A.J.* Turbulence: An Old Challenge and New Perspectives // Meccanica. 1998. V. 33. No. 5. pp. 445.
15. *Claus Wagner, Thomas Hüttl, Pierre Sagaut* Large-eddy simulation for acoustics // Cambridge Aerospace Series, Cambridge University, 2012
16. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A.* Vortex ring eigen-oscillations as a source of sound // J. Fluid Mech. 1997. 341. pp. 19.
17. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Колебания вихревого кольца, возникновение в нем турбулентности и генерация звука // Успехи физ. наук. 2000. 170. № 7. стр. 713.
18. *Shugaev F.V., Shtemenko L.S. et al.* Modelling of laser beam propagation through turbulence // Proc. SPIE. 2014. 9242. pp. 1-12.
19. *Kelvin, Lord W.* Vibrations of a columnar vortex. // Philos. Mag., 1880. 10. 155- 168 pp.
20. *Яковлев П.Г.* Излучение звука плоским локализованным вихрем // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. стр. 563.
21. *Broadbent E. G.* Jet noise radiation from discret vortices // ARC Reports and memoranda.1978. No. 3826. p. 28.

22. *Петрова Т.А, Шугаев Ф.В.* Частота акустического излучения цилиндрического вихря // Вестник Московского Университета, серия 3. Физика, Астрономия. 2015. № 4. стр. 31–35.
23. *Truesdell C.* Precise theory of absorption and dispersion of forced plane infinitesimal waves according to the Navier-Stokes equations // J. Ration. Mech. and Analysis. 1953. **2**. pp. 643-714.
24. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. // М., Наука, 1963.

ACOUSTIC SPECTRUM OF A CYLINDRICAL VORTEX CALCULATED ON THE BASIS OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS

T.A. Petrova, F.V. Shugaev

*Department of Quantum Statistics and Field Theory,
Faculty of Physics, M.V.Lomonosov Moscow State University.*

tapetrova@physics.msu.ru, shugaev@phys.msu.ru

Received 10.03.2016

Generation of sound by a single cylindrical vortex on a flat wall is considered. Acoustic radiation arises due to the diffusion of vorticity in a viscous heat-conducting gas. For the first time the acoustic spectrum of this radiation is defined. Geometrically similar cases are considered. It is also shown that the frequency of the acoustic radiation does not depend on the intensity of the initial vorticity, and depends only on the initial radius of the vortex cylinder. The problem is solved on the basis of the Navier-Stokes equations in the approximation of small initial vorticity. The results may be useful for aeroacoustics and simulation of a tornado.

Информация и правила для авторов

Общие положения

Журнал «Наноструктуры. Математическая физика и моделирование» (сокращенно: НМФМ) публикуется с 2009 года и является периодическим научным изданием. Электронная версия журнала размещается на сайте <http://www.nano-journal.ru>. Основная цель издания: представление новых теоретических и вычислительных методов моделирования наноструктур и мягкой материи, общих подходов в исследовании мезосистем, а также ключевых экспериментальных результатов в данной области и связанных с этим проблем математической физики.

Журнал НМФМ имеет междисциплинарный характер и в силу этого несет определенную образовательную направленность, а не только узко научную. Работы, представляемые в журнал, должны содержать вводные сведения, которые обеспечат понимание постановок задач и восприятие результатов не только прямыми специалистами. Определения понятий, объяснение обозначений и терминов, оценки характерных параметров, теоретические предпосылки и идеи, используемые методы, и т.п., должны быть кратко объяснены в тексте статьи, имея в виду читателей, специализирующихся в иных направлениях. Должны быть описаны базовые математические модели и уравнения. Во Введении и в последующих разделах очерчивается стратегия и основные трудности, это увязывается с используемыми моделями. Структура статьи ориентируется на прояснение общей логики и методики исследования, содержит резюмирующие выводы. В тексте должны быть рассмотрены характерные примеры (хотя бы, методические), ясно иллюстрирующие предлагаемые алгоритмы.

Журнал публикует научные обзоры, исследовательские статьи и краткие научные сообщения, а также избранные аналитические и информационно-образовательные материалы, тексты докладов и циклов лекций, прочитанных в университетах, научных центрах, на школах-семинарах, конференциях, нигде ранее не публиковавшиеся и не принятые к публикации в других изданиях. Язык публикации в журнале НМФМ, как правило, русский. Работы, представляемые в журнал, не могут иметь научно-популярный или компилятивный характер. Все статьи рецензируются и могут быть отклонены редколлегией журнала. В случае принятия работы к печати ее авторы передают издателью журнала НМФМ право на разовую безвозмездную публикацию текста и его размещение в электронной версии на сайте журнала. Перевод опубликованных в журнале статей на другие языки может осуществляться только с разрешения и при участии авторов.

Порядок представления статей

- В редакцию изначально представляются:
 - файл статьи, файлы с иллюстрациями;
 - сопроводительное письмо, можно в электронной форме, содержащее сведения об объеме статьи и обо всех авторах (фамилии, имена, отчества, полные названия мест работы, почтовый адрес с индексом, номер контактного телефона с кодом города, электронный адрес автора, ответственного за переписку с редакцией); предпочтительно, чтобы это письмо было выполнено на бланке учреждения, в котором работает кто-то из авторов, было заверено печатью и содержало утверждение о возможности открытого опубликования статьи;
 - файл с переводом на английский язык названия статьи, фамилий и инициалов авторов, аннотации, ключевых слов.
- Авторские файлы могут быть присланы на электронный адрес: papers@nano-journal.ru; (резервный адрес в случаях затруднений с пересылкой: nano@miem.edu.ru) или переданы в редакцию на любом электронном носителе. Авторы получают из редакции подтверждение о получении их материалов.
- Телефон (факс) редакции: +7 (495) 916-8876. Адрес редакции: Москва 109028, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, Московский институт электроники и математики (МИЭМ), комн. 449.

Общие требования к представляемым файлам

- Допускается использование текстовых редакторов WORD и LATEX. К рабочим файлам должна быть приложена их pdf-копия. В названии файлов используется латинский алфавит, пробелы заменяются знаком `_`. Шапка статьи содержит название, инициалы и фамилии авторов, место работы, электронный адрес, краткую аннотацию, ключевые слова. В аннотации не следует использовать формулы и ссылки на текст работы или список литературы; в конце она должна содержать индекс УДК (к английской версии аннотации можно добавить индексы зарубежных рубрикаторов).
- Объем кратких сообщений 4-8 страниц, исследовательских статей, как правило, до 20 страниц, а обзоров – более 20 страниц. Верхняя граница согласуется с редколлегией. При подсчете объема нужно ориентироваться на страницы формата А4, шрифт 12, знаков в строке 80, интервалов между строками 1.
- Авторы не должны злоупотреблять сокращениями, составленными из заглавных начальных букв терминов. Предпочтительней каждый раз использовать полное наименование объекта. Возможно использование только устоявшихся аббревиатур.

Требования к файлам Word

- Рекомендуемый шрифт – Times New Roman.
- Строки в пределах абзаца не должны разделяться символом возврата каретки (Enter).
- Нельзя использовать автоматическое создание сносков, автоматический перенос или автоматический запрет переносов, создание списков, автоматический отступ и т.п.
- Ссылки на список литературы даются цифрами в квадратных скобках: [1], [5,6,7], [1-9].
- Все без исключения формулы и обозначения размерности, даже состоящие из одной латинской буквы, и в тексте и вынесенные в отдельную строку, всегда набираются в формульном редакторе и никогда – в обычном текстовом редакторе.

- При создании таблицы рекомендуется использовать возможности Word или MS Excel. Таблицы, набранные вручную (с помощью большого числа пробелов), не принимаются.

Требования к иллюстрациям

- Иллюстрации представляются в отдельных файлах, черно-белыми. Они должны иметь разрешение не менее 600 dpi.
- Форматы файлов – TIFF, EPS, PSD, JPEG.

Требования к списку литературы

- Ф.И.О. авторов или редакторов выделяются курсивом.
- Для статей приводится название. Названия отделяются от выходных данных знаком //. Расположение выходных данных указано на образце ниже. Номер тома выделяется жирным шрифтом, номер выпуска дается в скобках. Указываются номера первой и последней страниц статьи, либо уникальный номер статьи и ее объем. Для книг желательно указывать их объем. Если известна ссылка на электронный архив или сайт, то ее желательно указать.

Фамилия И.О. Название статьи // Назв. журн., 2000, **1** (1), 1-6.

Family F.M. and Family F. Title of the paper // Name of the Journal, 2006, **73**, 165313, 9 pp.

Фамилия И.О., Фамилия И.О. Название книги // Наука, С.-П., 1999, 176 стр.

Family F.M. Title of the paper // In book: *Family F.M. (et al. eds)*, Title of the collection, Publisher, Boston, 2005, 9-24.

Family F.M. (ed.), Title of the collection // Publisher, N.Y., 2005, 324 pp.

Фамилия И.О. Название доклада // Доклад на конференции «Название конференции (место и дата проведения)»; ссылка на электронный ресурс.

Наноструктуры. Математическая физика и моделирование

Журнал зарегистрирован

в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС77-34934 от 29 декабря 2008 г.

Учредители

Московский государственный институт электроники и математики (МИЭМ),

ФГУ ГНИИ ИТТ «Информика»,

Европейский центр по качеству

Председатель Совета Учредителей

Тихонов А.Н.

Издатель

Европейский центр по качеству

ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛ НМФМ

На первое полугодие 2016 г. подписаться на журнал можно в любом отделении связи по каталогу
Агентства Роспечать «Журналы России»,

рубрика «Физико-математические науки», подписной индекс 70017.

Редакция предлагает подписчикам возможность безвозмездно получить подборку прошлых
выпусков журнала. Пришлите на электронный адрес nano@miem.edu.ru (или на почтовый адрес:
123458, Москва, ул. Таллинская, д. 34, каб. 429, редакция журнала НМФМ)

копию подписной квитанции, а также адрес для отсылки выпусков.