КВАЗИОДНОМЕРНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОНЫ

Н.В. Селина

Кубанский государственный технологический университет

Selina_Natalia@mail.ru

Поступила 08.07.2018

Получено непосредственное (без использования специальных функций) решение уравнений Максвелла для кусочно-однородной среды с цилиндрической симметрией. На его основе разработан рациональный способ расчета материальных, геометрических и дисперсионных характеристик плазмонной металлодиэлектрической цилиндрической структуры. Численный расчет волнового вектора плазмонов с применением полученных формул подтвердил основные теоретические и экспериментальные результаты исследований одномерных поверхностных плазмон-поляритонов. Решение применимо к структурам с произвольным числом границ раздела «металл-диэлектрик».

УДК 533.9
DOI: 10.31145/2224-8412-2018-18-1-45-64

1. Введение

Начало теоретического исследования поверхностных плазмонов в системах с цилиндрической симметрией было положено А. Зоммерфельдом в 1899 году [1]. Научными исследованиями в результате анализа электромагнитных полей вблизи металлической поверхности теоретически доказано и экспериментально подтверждено, что вдоль границы раздела сред «металл-диэлектрик» могут возбуждаться поверхностные электромагнитные волны, существующие только во взаимодействии с колебаниями электронов в узком приповерхностном металлическом слое. Данное взаимодействие является необходимым условием существования указанных поверхностных электромагнитных волн. Такое совокупное физическое явление названо возбуждением поверхностных плазмон-поляритонов [2]. Их существование в условиях резонанса возможно на плоскопараллельных и цилиндрических границах раздела сред в металлодиэлектрических наноструктурах, в том числе – в металлических нанопленках и нанопроволоках с многослойной оболочкой. Структурное ограничение в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, определяет единичную размерность цилиндрических плазмонов.

Область научно-технологического использования поверхностных плазмон-поляритонов неуклонно расширяется. Например, это физическое явление может применяться для преобразования электромагнитных волн из оптического диапазона частот в терагерцовый. Биологические молекулы имеют собственный излучательный и поглощательный спектры как раз в последнем из названных диапазонов. Поэтому изучение поверхностных плазмон-поляритонов имеет особое значение для практического применения в биологии, медицине [2, 3].

До недавнего времени предел возможного разрешения оптических приборов определялся классическим неравенством Рэлея, согласно которому минимальный размер изображения ограничен дифракцией электромагнитных волн. С развитием ближнепольной микроскопии появилась возможность преодолеть дифракционный предел. Это позволило находить идентификационные следы взаимодействия света с микроскопическими объектами, находящимися в ближнем световом поле. Указанные достижения имеют большое значение для медицины, биологических, химических, прикладных естественнонаучных исследований, судебной экспертизы и иных сфер аналогичного применения. Физической основой оптических ближнепольных приборов и устройств является процесс возбуждения плазмонов на границе металла и диэлектрика. Такой оптический элемент, как суперлинза, представляет собой многослойную металлодиэлектрическую наноструктуру плоскопараллельной или цилиндрической симметрии. Оба варианта линзы экспериментально реализованы.

Условия возбуждения поверхностных плазмон-поляритонов имеют резонансный характер, что является основой для конструирования сенсоров. Малое изменение среды, окружающей элемент наноструктуры, приводит к существенному колебанию отклика всей системы на воздействие оптической волны. Детектирование этого колебания (оптического сигнала) позволяет идентифицировать характеристики среды, поскольку для каждой из систем «среда + наноэлемент» характерны индивидуальные условия плазмонного резонанса. Описанным образом и достигается сенсорный эффект. В настоящее время практическое использование плазмонных биосенсоров – уже повседневная реальность [3].

Одним из существенно значимых научных направлений становится конструирование искусственных композитных сред, обладающих редкими для природных материалов свойствами. Они получили название «метаматериалы». Так, изотропные среды с отрицательным значением электрической и магнитной проницаемостей не встречаются в природе, однако именно в них, полученных экспериментально, имеют место явления, сопряженные с желаемым эффектом (например, распространение электромагнитных волн с противоположными направлениями фазовой и групповой скоростей, отрицательная рефракция или обратный эффект Допплера). Этот эффект часто невозможен с точки зрения законов классической оптики. Вместе с тем, развитие таких отраслей науки, как нанофотоника и наноплазмоника, преодолевающих пределы классической оптики, открывает новые перспективы. Возможность конструирования особенных сред, обладающих вышеназванными свойствами и называемых «левыми» [3], экспериментально подтверждена. И именно плазмонный резонанс в наноструктурированных металлодиэлектрических материалах обеспечивает отрицательное значение магнитной и диэлектрической проницаемостей, поскольку его условия определяют оптический отклик среды на воздействие излучения. Если длина оптической волны больше размеров любого из элементов структуры, то волна их «не чувствует», и её распространение соответствует некоторым «усредненным» характеристикам среды. Отсутствие такой «чувствительности» придает метаматериалу желаемый эффект однородной среды. В описанном процессе прогнозируемый искомый параметр диэлектрической проницаемости обладает отрицательным значением благодаря большому отрицательному значению диэлектрической проницаемости металла, а магнитные свойства нанообъектов определяют отрицательную магнитную проницаемость метаматериала. Практические области применения композитных особенных сред расширяются с каждым годом, поскольку эти материалы обладают свойствами, перспективными к дальнейшему научно-промышленному исследованию, и имеют существенный научно-технический потенциал.

В продолжение научного физико-математического анализа модели поверхностных плазмон-поляритонов целесообразен поиск упрощения математического формализма модели. Математический аспект изучения поверхностных плазмон-поляритонов сводится к решению уравнений Максвелла для кусочно-однородной среды с плоскопараллельными и цилиндрическими границами раздела сред-компонентов. Существует решение задачи на плоских границах раздела «металл-диэлектрик». Результат представлен в виде уравнения плазмонного резонанса для трехслойной металлодиэлектрической среды со средним слоем нанометровой толщины и полубесконечными крайними слоями [3]:

$$(k_2/\varepsilon_2)tg(a(d)) = -(k_1/\varepsilon_1)i$$

где ε_1, ε_2, $k_1 = \sqrt{\varepsilon_1 {k_0}^2 - \beta^2}$, $k_2 = \sqrt{\varepsilon_2 {k_0}^2 - \beta^2}$ – диэлектрические проницаемости и волновые вектора в металлической и диэлектрической средах, k_0-волновое число фотона в свободном пространстве, β-постоянная распространения (волновой вектор плазмонов). Аргумент тангенса – изменение фазы волны на ширине среднего слоя (d):

$$a(d)=k_2\, d.$$

Поскольку физические принципы распространения плазмонов на плоской и цилиндрической границе «металл-диэлектрик» одинаковы, закономерно возникает предположение, что математический аппарат, применяемый к плоской структуре, может быть, с учетом соответствующих различий, применен к цилиндрической металлодиэлектрической структуре. Однако, в цилиндрической системе координат преобразование уравнений Максвелла приводит к уравнению Бесселя, решением которого являются специальные табулированные функции, а не аналитический результат. Традиционно дисперсионное соотношение для определения волнового вектора поверхностных плазмон-поляритонов определяется методом «сшивания» на границе раздела решений уравнений Максвелла в диэлектрической и металлической областях [1-3]. Полученное уравнение решается только численными программными методами, при этом исследователи иногда используют асимптотики функции Бесселя для упрощения расчетов [2].

По сравнению с задачей о поверхностных плазмонах на плоской границе раздела металла и диэлектрика, здесь уравнение Бесселя содержит не только элементарные, но и специальные функции, что усложняет численный анализ. Наноразмеры структуры в таком случае, хотя и не способствуют непосредственно упрощению численного математического анализа, но позволяют оценить характеристики физических процессов посредством разложения функций в ряд по малому параметру, и, тем самым, приблизить их к аналитическому виду. В целом, этот способ решения задачи предполагает использование достаточно большого вычислительного ресурса [3].

В настоящей статье представлено полученное аналитически решение уравнений Максвелла в однородной среде в цилиндрической системе координат, заданное неявно через элементарные функции:

$$f(r) = const\sqrt{\sin\left(2a(r)\right)/r},$$

где r – радиальная координата, $f(r)$-компонента магнитного или электрического поля, функция $a(r)$ определяется трансцендентным уравнением:

$$a(r) = k_1 r - \sin\big(a(r)\big)^2 /2k_1 r.$$

Это решение является самостоятельным результатом и может применяться в исследовании оптических задач.

Относительно уравнения плазмонного резонанса важен результат для кусочно-однородной среды, общий для всех сред-компонентов:

$$f(r) = const\sqrt{\sin\left(2\tilde{a}(r)\right)/r}$$

$$\tilde{a}(r) = arctg\big(\alpha(r) tg(a(r))\big)$$

$$k_1\varepsilon/(k_r\varepsilon_1) = \alpha(r),$$

где ε, k_r – диэлектрическая проницаемость и волновой вектор в среде, включающей координату r. Как следует из условия плазмонного резонанса, поле на границе при удовлетворении им характеристик металлодиэлектрической цилиндрической структуры, должно бесконечно возрастать по сравнению с нерезонансным случаем, следовательно, математически это условие запишется в виде:

$$(k_2/\varepsilon_2) tg(a(d)) = -(k_1/\varepsilon_1)i.$$

Как видим, оно совпадает с соответствующим уравнением в декартовой системе координат (индексы 1 и 2 относятся к двум средам-компонентам; d-радиус проволоки).

Таким образом, получено общее решение уравнений Максвелла для чередующихся металлической и диэлектрической областей в любом количестве, в результате выведено уравнение, определяющее волновой вектор поверхностных плазмон-поляритонов с включением только элементарных функций. Преимущества найденного решения особенно проявляются при применении его к структуре, характеризующейся, во-первых, наличием многих границ разделов металлических и диэлектрических сред, и, во-вторых – наномасштабом. Относительно первого аспекта, касающегося многослойности структуры, это объясняется тем, что исследование оптических свойств многослойной структуры даже численно не представлено в научной литературе в достаточной полноте. Можно предположить, что такая ситуация предопределена тем обстоятельством, что использование в традиционном подходе специальных функций сильно усложняет расчеты, и это не способствует развитию данного направления исследований. Во втором аспекте, относящемся к размерам структуры, следует отметить, что в случае использования выведенного в настоящей статье уравнения, наномасштаб оптической системы влияет на вид конечных расчетных формул, облегчая вычислительный процесс. Такое исследование необходимо, например, при моделировании цилиндрической суперлинзы.

2.Теоретическое решение задачи

Задача о распространении электромагнитных волн в периодической слоистой среде с цилиндрической симметрией предполагает решение уравнений Максвелла с целью определения электрических и магнитных полей в областях, заполненных диэлектриком и металлом.

При сложившемся научном подходе принято начинать решение основной физико-математической задачи с того, чтобы записать систему уравнений Максвелла для компонентов кусочно-однородной среды и решить её [2, 3]. В настоящей статье представлен другой вычислительный подход – найти общее точное решение уравнений Максвелла для всех областей кусочно-однородной среды и вывести из него картину оптических преобразований волн в металлической проволоке.

С целью решения поставленной задачи рассмотрим распространение монохроматической цилиндрической электромагнитной волны в неоднородной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(r)$, однородной вдоль оси OZ. Закон распространения электромагнитной волны описывается волновым уравнением, которое выводится из уравнений Максвелла для напряженностей электрического и магнитного полей в волне [4]:

$$\Delta\mathbf{H} + \frac{[grad\varepsilon \times rot\mathbf{H}]}{\varepsilon} + \frac{\mathbf{H}\varepsilon\omega^2}{c^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\omega^2/c^2 = {k_0}^2,$$

где ω – частота электромагнитной волны, ε – диэлектрическая проницаемость двухкомпонентной кусочно-однородной среды:

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)T(r)$$

$$T(r) = \begin{cases} 1, & \varepsilon(r) = \varepsilon_2 \\ 0, & \varepsilon(r) = \varepsilon_1 \end{cases}$$

(ε_1, ε_2 – диэлектрические проницаемости областей 1 и 2 соответственно).

Так как граница раздела сред с различной диэлектрической проницаемостью имеет цилиндрическую симметрию, будем вести расчет в цилиндрической системе координат. Запишем уравнения, определяющие ротор и векторное произведение векторов в цилиндрических координатах:

$$(rot\mathbf{b})_k = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_j H_j\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(b_i H_i\right)\right)}{H_i H_j} \qquad i, j, k = 1,2,3$$

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]_k = \in_{ijk} a_i b_j,$$

где $\in_{ijk}$ – символ Леви-Чивиты,

$$x_1 = r, \qquad x_2 = \varphi, \qquad x_3 = z$$

$$H_1 = 1, \qquad H_2 = r, \qquad H_3 = 1.$$

Электромагнитные поля, связанные с поверхностными плазмон-поляритонами, локализованы вблизи границы раздела двух сред и затухают при удалении в каждую из сторон от неё. Они являются частично продольными ТМ-волнами. Вектор электрического поля **E** в осесимметричной среде имеет две компоненты: одна из них (E_z) направлена вдоль волнового вектора плазмонов k_s, вторая (E_r) – перпендикулярно к поверхности раздела сред. Вектор магнитного поля **H** перпендикулярен к направлению распространения волны и лежит в плоскости поверхности границы раздела сред 1 и 2.

Таким образом, в волне отлична от нуля только φ-компонента напряженности магнитного поля. Для неё уравнение (1) имеет вид:

$$\Delta H_\varphi - \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right)\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} = -H_\varphi \varepsilon {k_0}^2.$$

Принимая во внимание, что диэлектрическая проницаемость меняется в радиальном направлении, и все характеристики осесимметричной волны не зависят от координаты φ, из (1) получаем:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{r dH_\varphi}{dr}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} = -H_\varphi \varepsilon {k_0}^2 .$$

Зависимость от координаты z определяется множителем exp($i\beta z$), где β – постоянная распространения волны, то есть волновой вектор плазмонов k_s. Полагая

$${k_r}^2 = \varepsilon {k_0}^2 - \beta^2,$$

будем искать решение уравнения:

$$\frac{\varepsilon}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{\varepsilon}\frac{df}{dr}\right) = -f{k_r}^2 \tag{2}$$

Оно определяет φ – компоненту напряженности магнитного поля при кусочно-постоянной диэлектрической проницаемости.

Заметим, что справедливо равенство, определяемое формулой дифференцирования произведения функций, известной из теории математического анализа:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{\varepsilon f}\frac{df}{dr}\right) = \frac{1}{f}\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{\varepsilon}\frac{df}{dr}\right) - \frac{\varepsilon}{r}\left(\frac{r}{\varepsilon f}\frac{df}{dr}\right)^2.$$

С учетом него уравнение (2) преобразуется к следующему равенству:

$$\frac{\varepsilon}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{\varepsilon f}\frac{df}{dr}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2\left(\frac{r}{\varepsilon f}\frac{df}{dr}\right)^2 = -{k_r}^2 \tag{3}$$

Введем обозначение:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon f}\frac{df}{dr} = -k_1 tg\big(a(r)\big), \tag{4}$$

используя которое, уравнение (3) можно представить в виде:

$$-\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{d}{dr}\Big(k_1 tg\big(a(r)\big)\Big) - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{k_1 tg\big(a(r)\big)}{r} + \Big(k_1 tg\big(a(r)\big)\Big)^2$$
$$= -{k_1}^2 - \Delta\left({k_r}^2\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2\right) \tag{5}$$

Здесь k_1 – радиальная компонента волнового вектора в первой среде.

В первую очередь найдем решение уравнения (5) для однородной среды, где справедливо равенство: $\varepsilon(r)=\varepsilon_1$. Рассматривая решение (4) уравнения (3), найдем производную функции $a(r)$, которую назовем функцией фазы:

$$\frac{d}{dr}\big(a(r)\big) = k_1 - \frac{{k_1}^2 tg\big(a(r)\big)}{\left[r\left(\Big(k_1 tg\big(a(r)\big)\Big)^2 + {k_1}^2\right)\right]}\ . \tag{6}$$

Определим искомую функцию другим равенством, отличающимся от уравнения (4) изменением значения функции фазы на постоянную величину π/2:

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dr} = -k_1 ctg\big(a_1(r)\big). \tag{7}$$

Для такого решения производная фазы (функции $a_1(r)$) равна:

$$-\frac{d}{dr}\big(a_1(r)\big) = k_1 - \frac{{k_1}^2 tg\big(a_1(r)\big)}{\left[r\left(\big(k_1 tg\big(a_1(r)\big)\big)^2 + {k_1}^2\right)\right]}. \tag{8}$$

Решение уравнения (3), соответствующее определению функции $(1/f)df/dr$ (4), рассчитывается интегрированием производной логарифма f:

$$f = \exp\left(-\int k_1 tg\big(a(r)\big)dr\right)$$

Предположим, что функции a_1 и a отличаются друг от друга только знаком, и для них справедливо равенство: $a_1 = -a$. Тогда степень экспоненты в решении можно преобразовать следующим образом:

$$\int k_1 tg\big(a(r)\big)dr = \int tg\big(a(r)\big)d\big(a(r)\big) + \int \frac{\big[k_1 tg\big(a(r)\big)\big]^2}{\left[r\left(\big(k_1 tg\big(a(r)\big)\big)^2 + {k_1}^2\right)\right]}dr.$$

Используя равенства (6, 8), получаем, что интеграл в этом выражении равен:

$$\int \frac{\big[k_1 tg\big(a(r)\big)\big]^2}{\left[r\left(\big(k_1 tg\big(a(r)\big)\big)^2 + {k_1}^2\right)\right]}dr = \int \frac{dr}{r} - \int ctg\big(a(r)\big)d\big(a(r) - k_1 r\big)$$

Суммируя два последних уравнения, перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned}&\int k_1 ctg\big(a(r)\big)dr - \int k_1 tg\big(a(r)\big)dr \\ &= \int ctg\big(a(r)\big)d\big(a(r)\big) - \int tg\big(a(r)\big)d\big(a(r)\big) - \int \frac{dr}{r}\ .\end{aligned} \tag{9}$$

Используя известное тригонометрическое тождество:

$$ctg(x)\text{-}tg(x)=2ctg(2x),$$

запишем (9) в виде:

$$\int 2k_1 ctg\big(2a(r)\big)dr = \int 2ctg\big(a(r)\big)d\big(2a(r)\big) - \int \frac{dr}{r}. \tag{10}$$

Сложение обеих частей уравнения (5) для функций k_1 $ctg(a(r))$ и $-k_1$ $tg(a(r))$, приводит к уравнению:

$$\frac{d}{dr}\Big(2k_1 ctg\big(2a(r)\big)\Big) - \frac{2k_1 ctg\big(2a(r)\big)}{r} + \Big(2k_1 ctg\big(2a(r)\big)\Big)^2 = -4{k_1}^2$$

Это уравнение вида (5), но записанное для волнового вектора – $2k_1$. Оно выводится из уравнения (3), записанного для такого значения волнового вектора, заменой:

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dr} = 2k_1 ctg\big(2a(r)\big)$$

Определенная таким способом функция f равна:

$$f = \exp\left(\int 2k_1 tg\big(2a(r)\big)dr\right)$$

Соответствующее решение исходного уравнения находится с использованием равенства (10), и имеет вид:

$$f(r) = const\,\frac{\sin\big(2a(r)\big)}{r}. \tag{11}$$

Выведем уравнение для фазы и подтвердим справедливость предположения: a_1 =-a. С целью определения фазы, предварительно найдем выражение для производной функции f, определяемой равенством (11):

$$\frac{d}{dr}\frac{\sin\big(2a(r)\big)}{r} = 2k_1 ctg(2a)\exp\left(2k_1\int_0^r ctg(2a)dx\right)$$

Интеграл в экспоненте уже определён выше и равен:

$$\int_0^r 2ctg(2a)dx = \int_0^r 2ctg(2a)da - \ln(r)$$

Следовательно, искомая производная определяется выражением:

$$\frac{d}{dr}\frac{\sin\big(2a(r)\big)}{r} = 2k_1\frac{\cos\big(2a(r)\big)}{r}$$

Анализируя структуру уравнений (3) и (6), заметим, что справедливо утверждение: если функция $f=sin(2a(r))/r$ является решением уравнения (3), то функция $f=sin(2a(r)+\pi/2)/\mathrm{r}$ тоже будет решением этого уравнения, поскольку дифференциал константы равен нулю. Для такой функции справедлива формула:

$$\frac{d}{dr}\frac{\cos\big(2a(r)\big)}{r} = -2k_1\frac{\sin\big(2a(r)\big)}{r}\,. \tag{12}$$

Перейдем к вычислению фазы, непосредственное интегральное уравнение для которой имеет вид:

$$a(r) = k_1 r - \int \frac{tg\big(a(r)\big)}{\left[r\left(\left(tg\big(a(r)\big)\right)^2 + 1\right)\right]}dr = k_1 r - \int \frac{\sin\big(2a(r)\big)}{2r}dr$$

Вычислив с использованием равенства (12) интеграл в нем, получаем трансцендентное уравнение для фазы с условием в нуле: $a(0)=0$:

$$a(r) = k_1 r - \sin\big(a(r)\big)^2 / 2k_1 r$$

Проинтегрируем аналогичным способом также уравнение (8), получим уравнение:

$$-a_1(r) = k_1 r - \sin\big(a_1(r)\big)^2 / 2k_1 r.$$

Второе слагаемое в этих определениях фазы есть четная по знаку фазы функция. Сравнивая результаты интегрирования (6) и (8), убеждаемся, что предположение: $a_1=-a$ справедливо.

Для решения с волновым вектором k_1 справедлива формула:

$$f(r) = const\,\frac{\sin\big(a(r)\big)}{r}$$

где для фазы $a(r)$ имеет место формула, получаемая из уравнения (5) с подстановкой $\frac{1}{f}\frac{df}{dr} = k_1 ctg\big(a(r)\big)$:

$$a(r) = k_1 r - \sin\big(a(r)\big)^2 / 2k_1 r$$

Получив решение задачи для однородной среды, обратимся к металлодиэлектрической структуре. Для двухкомпонентной кусочно-однородной среды с цилиндрическими границами раздела сред-компонентов определим равенство:

$$\frac{k_1 \varepsilon_r}{k_r \varepsilon_1} = \alpha(r)$$

Где k_r – волновой вектор в среде, заполняющей область, к которой принадлежит точка с координатой r; ε_r – диэлектрическая проницаемость среды в указанной области.

Магнитное поле волны в этом случае определяется как:

$$H_\varphi(r) = H_0 \exp\left(-(\varepsilon_r/\varepsilon_1)k_1 \int\limits_0^r \Big(2ctg\big(2a(x)\big)\Big)\,dx\right).$$

В обозначениях, соответствующих многослойной структуре, преобразование функции фазы аналогично уравнению (6):

$$\frac{d}{dr}\big(\tilde{a}(r)\big) = k(r) - \frac{k(r)^2 tg\big(\tilde{a}(r)\big)}{\left[r\left(\Big(k(r)tg\big(\tilde{a}(r)\big)\Big)^2 + k(r)^2\right)\right]} \tag{13}$$

где

$$\tilde{a}(r) = arctg\big(\alpha(r)tg(a(r))\big),$$

$k(r)$ – радиальные компоненты волновых векторов в двух средах-компонентах: k_1 либо k_2. Интегрируя (13), получаем уравнение, общее для всех сред-компонентов, и определяем решение:

$$f(r) = \frac{\exp\left(\int_0^{\tilde{a}(r)} 2k(r)ctg(2\tilde{a})\,d\tilde{a}\right)}{r} = \frac{\sin(2\tilde{a})}{r}$$

Теперь можно записать выражение для продольной и поперечной компоненты электрического поля в волне. Согласно уравнениям Максвелла, они связаны с напряженностью магнитного поля уравнениями [4]:

$$k_r^2 H_\varphi(r) = i\varepsilon k_0 \frac{\partial}{\partial r}\big(E_z(r)\big),$$

$$k_r^2 E_r(r) = i\beta \frac{\partial}{\partial r}\big(E_z(r)\big)$$

Подставляя в эти уравнения выражение для напряженности магнитного поля H_φ, убеждаемся, что такое решение уравнения (3) автоматически определяет непрерывность тангенциальной компоненты электрического и магнитного полей на границе раздела сред. Напряженность электрического поля конечна и отлична от нуля на оси цилиндра.

Для того, чтобы рассчитать поля в волне, необходимо знать постоянную распространения волны β, определяемую частотой волны, а также материальными параметрами и геометрическими характеристиками структуры. Эту величину можно рассчитать, используя дисперсионное соотношение:

$$\left(\frac{k_2}{\varepsilon_2}\right) tg\big(a(d)\big) = -\left(\frac{k_1}{\varepsilon_1}\right) i \tag{14}$$

3. Алгоритм расчета электромагнитного поля в многослойной цилиндрической структуре

Рассмотрим подробно все этапы вычисления напряженностей электрического и магнитного поля оптической волны при распространении её в многослойной цилиндрической металлодиэлектрической структуре. Нас интересует задача определения полей, когда известны следующие исходные данные: материальные и геометрические параметры структуры, а также частота оптической волны и волновой вектор плазмонов $_\beta$.

Во-первых необходимо вычислить значение функции фазы $a(r)$ на ближайшей к оси цилиндра границе раздела сред, используя формулу (13):

$$a_1 = k_1 d_1 - \frac{\sin(a_1)^2}{2k_1 d_1}$$

Здесь a_1 – значение функции фазы $a(r)$ на ближайшей к оси цилиндра границе раздела сред; $k_1 = \sqrt{\varepsilon_1 k_0^2 - \beta^2}$ – поперечная к оси компонента волнового вектора оптической волны в первой (ближайшей к оси) среде; ε_1 – диэлектрическая проницаемость первой среды; d_1 – радиус в поперечном сечении структуры области, заполненной первой средой.

Следующим шагом определяется значение функции фазы на второй, при последовательном перемещении от оси в радиальном направлении, границе раздела сред:

$$a_2 - \widetilde{a_1} = k_2 d_2 - \frac{\sin(a_2)^2}{2k_2 d_2} + \frac{\sin(\widetilde{a_1})^2}{2k_2 d_1}$$

Здесь

$$\widetilde{a_1} = arctg\big(\alpha_1 tg(a_1)\big),$$

$$\frac{k_1 \varepsilon_2}{k_2 \varepsilon_1} = \alpha_1$$

a_2 – значение функции фазы $a(r)$ на второй границе раздела сред; $k_2 = \sqrt{\varepsilon_2 k_0^2 - \beta^2}$ – поперечная к оси компонента волнового вектора оптической волны во второй, при отсчете от оси в радиальном направлении, среде; ε_2 – диэлектрическая проницаемость второй среды; d_2 – разность внешнего и внутреннего радиусов в поперечном сечении структуры области, заполненной второй средой.

Аналогично рассчитывается значение функции фазы на каждой границе раздела сред вплоть до внешней n-ой границы:

$$a_n - \tilde{a}_{n-1} = k_n d_n - \frac{\sin(a_n)^2}{2k_n d_n} + \frac{\sin(\tilde{a}_{n-1})^2}{2k_n d_{n-1}}$$

Здесь

$$\tilde{a}_{n-1} = arctg\big(\alpha_{n-1} tg(a_{n-1})\big),$$

$$\frac{k_{n-1} \varepsilon_n}{k_n \varepsilon_{n-1}} = \alpha_{n-1}$$

a_{n-1}, a_n – значения функции фазы $a(r)$ на n-1-ой и n-ой границах раздела сред; $k_{n-1} = \sqrt{\varepsilon_{n-1} k_0^2 - \beta^2}$, $k_n = \sqrt{\varepsilon_n k_0^2 - \beta^2}$ – поперечная к оси компонента волнового вектора оптической волны в n-1-ой и n-ой, при отсчете от оси в радиальном направлении, средах; ε_{n-1}, ε_n – диэлектрические проницаемости n-1-ой и n-ой сред; d_{n-1}, d_n – разности внешнего и внутреннего радиусов в поперечном сечении структуры областей, заполненных n-1-ой и n-ой средами.

Вычислив a_n, можно определить напряженность магнитного и электрического полей на внешней границе структуры, согласно формулам:

$$H(R_n) = const \frac{\sin(2\tilde{a}_n)}{R_n}$$

$$\tilde{a}_n = arctg\big(\alpha_n tg(a_n)\big)$$

$$\frac{k_n \varepsilon_o}{k_o \varepsilon_n} = \alpha_n$$

Здесь $k_o = \sqrt{\varepsilon_o k_0^2 - \beta^2}$ – поперечная к оси компонента волнового вектора оптической волны в окружающей структуру среде; ε_o – диэлектрическая проницаемость внешней среды; R_n – радиус структуры.

Таким образом, для того, чтобы рассчитать электромагнитное поле в n-слойной цилиндрической структуре, необходимо последовательно решить n уравнений. Если же задача состоит в том, чтобы оптимизировать структуру относительно условий плазмонного резонанса, то к числу n неизвестных a_i (i=1,2…n) прибавится ещё одно – параметр оптимизации, в качестве которого можно выбрать ε_i, d_i (i=1,2…n) k_0 или β. В этом случае необходимо решить систему уравнений, в которую входят уравнения для функции фазы на всех границах раздела сред и дисперсионное уравнение:

$$\left(\frac{k_n}{\varepsilon_n}\right) tg(a_n) = -\left(\frac{k_o}{\varepsilon_o}\right) i$$

4. Численный расчет и обсуждение результатов

Полученные формулы аналитически объясняют природу плазмонного резонанса в металлических нанопроволоках, а именно – колоссальное усиление электромагнитных полей на границе металла и диэлектрика в резонансных условиях. Действительно, производная функции фазы по радиальной координате, определенная формулой (13), также может быть представлена выражением:

$$\frac{d}{dr}\big(\tilde{a}(r)\big) = \frac{d}{dr}\big(a(r)\big)\frac{\varepsilon(r)}{\varepsilon_1}(1 + (\alpha^2 - 1)\cos(a)^2)$$

где

$$\tilde{a}(r) = arctg\big(\alpha(r)tg(a(r))\big).$$

Таким образом, в диэлектрических частях кусочно-однородной среды производная фазы положительна ($\varepsilon(r)$=ε_1, $\alpha(r)$=1), а в металлических – отрицательна, из-за отрицательного знака и при этом большого модуля диэлектрической проницаемости металла. В статьях [5, 6] отмечена эта особенность скорости изменения фазы плазмонной волны в наноструктурах декартовой и сферической симметрии. Как и в названных случаях [5, 6], рассматривая металлические нанопроволоки, можно сделать вывод: фаза волны не возрастает, а убывает при распространении волны. Из это следует, что волна является обратной, а её фазовая и групповая скорости имеют различные направления. Следовательно, если радиальная компонента волнового вектора имеет большую мнимую часть, что характерно для поверхностного плазмона, волна не затухает, а усиливается при распространении её в направлении от металлодиэлектрической границы вглубь металла и обратно к границе, и рассеянные на структуре электромагнитные поля сильно возрастают.

Формулу для напряженности магнитного поля на границе металла и диэлектрика можно записать следующим образом:

$$f(r) = \frac{\sin(2\tilde{a})}{r} = \frac{\sin(2a)}{r(1 + (\alpha^2 - 1)\cos(a)^2)}.$$

Становится ясным, что при выполнении резонансных условий, а именно, применении дисперсионного уравнения (14), что соответствует равенству нулю знаменателя выражения, определяющего функцию $f(r)$, электромагнитные поля в структуре на металлодиэлектрической границе неограниченно возрастают. Малое отклонение от условий резонанса приводит к существенному уменьшению напряженностей полей. Поэтому цилиндрические плазмонные структуры можно применять при конструировании сенсоров, и это свойство плазмонов на цилиндрической границе металла и диэлектрика хорошо демонстрируется выведенными в статье формулами. Их же удобно применять при расчете параметров сенсоров.

Используя уравнение (14), можно вычислить константу распространения плазмонной волны (волновой вектор плазмонов) β, соответствующую резонансным условиям, то есть решить задачу, рассмотренную в разделе 3 для двухкомпонентной среды с одной границей раздела сред-компонентов. При малой частоте и малом радиусе проволоки фаза $a(d)$ мала. В таком приближении выразим её значение через величину $k_1 d$:

$$a(d) = (\sqrt{3} - 1)k_1 d$$

Тогда структура дисперсионного уравнения (14) упрощается:

$$\left(\frac{k_2}{\varepsilon_2}\right) tg\left(\left(\sqrt{3} - 1\right)k_1 d\right) + i\left(\frac{k_1}{\varepsilon_1}\right) = 0 \tag{15}$$

Это выражение близко к дисперсионному уравнению для двумерных плазмонов в трехслойной металлодиэлектрической среде со средним металлическим слоем толщиной d. Диэлектрическая проницаемость металла – ε_2, диэлектрика – ε_1. Поэтому, в подобие дисперсионной кривой в этих условиях, график зависимости волнового вектора от частоты плазмонов в металлической проволоке близок к дисперсионной зависимости для фотонов в диэлектрике:

$$\omega = \left(c\beta/\sqrt{\varepsilon_1}\right)\left(1 - \left(c\beta/\omega_{pl}\right)^2 th^2(ia)/2 + \cdots\right).$$

При больших значениях волнового вектора плазмонов β дисперсионные зависимости для одномерных и двумерных поверхностных плазмонов также близки. Максимальное значение частоты плазмонов в этих структурах:

$$\omega = \omega_{pl}/\sqrt{\varepsilon_1 + 1}\ .$$

Такое же поведение дисперсионных кривых демонстрируют графики, построенные по традиционной формуле [3]. Они изображены на рисунке 1. Поверхностным плазмонам соответствует линия, лежащая ниже биссектрисы координатного угла, поскольку диэлектрическая проницаемость воздуха, принимаемого при расчете в качестве диэлектрика, равна 1. На рисунке 2 приведены дисперсионные кривые, рассчитанные по формуле (14) и выражению для фазы (13). Линии на рисунках 1 и 2 демонстрируют достаточно хорошее совпадение.

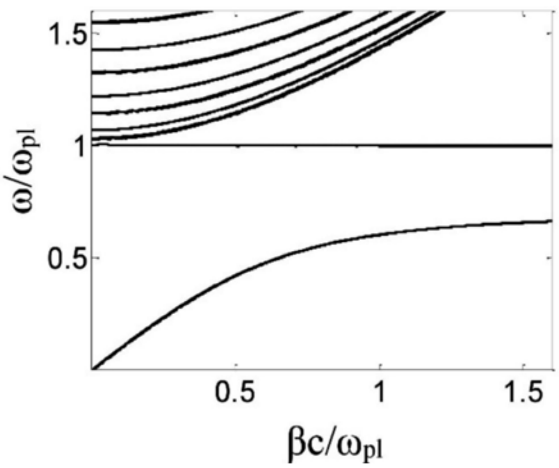

Рисунок 1. Дисперсионная кривая электромагнитной волны в металлической нанопроволоке с характеристиками: радиус металлической проволоки d=0.2 мкм, диэлектрическая проницаемость окружающей среды: ε_1=1, плазменная частота металла ω_{pl}=9eV. График построен по формуле, приведенной в [3].

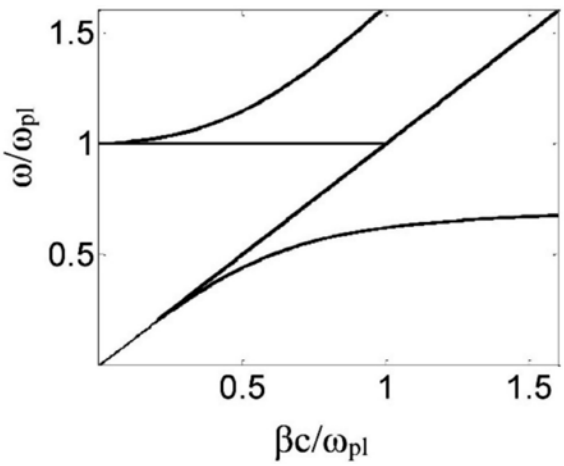

Рисунок 2. Дисперсионная кривая электромагнитной волны в металлической нанопроволоке с характеристиками: радиус металлической проволоки d=0.2 мкм, диэлектрическая проницаемость окружающей среды: ε_1=1, плазменная частота металла ω_{pl}=9eV. График построен по формулам (13-14).

Результат анализа, как формул, так и вида кривых, свидетельствует о том, что верхний предел частоты плазмонов для металлической проволоки, окруженной воздухом, равен: $\omega_{pl}/\sqrt{2}$. Диэлектрическая проницаемость металла рассчитывалась согласно результатам теории Друде [3]:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_{pl}}{\omega}\right)^2.$$

В этом случае волновой вектор плазмонов не имеет мнимой части и возрастает при возрастании частоты. Характер кривых соответствует результатам классической теории А. Зоммерфельда [1, 3].

График дисперсионной зависимости плазмонов расположен на фазовой плоскости ниже дисперсионной кривой фотона в диэлектрике. Следовательно, частота плазмонов меньше частоты фотонов, если они соответствуют одинаковым волновым векторам, и резонансные частоты плазмонов в некотором диапазоне волновых векторов попадают не в оптический, а в терагерцовый диапазон. Плазменные волны (плазмоны) в двумерных электронных системах (на поверхностях раздела металла и диэлектрика) могут быть использованы для генерации, усиления, преобразования и детектирования терагерцового излучения, поскольку частоты плазменных резонансов находятся в терагерцовом диапазоне для субмикроволновых структур.

Если поперечные размеры сколько-нибудь протяженных металлических нанообъектов исчезающе малы (используется наноцилиндр или узкая нанополоска металла с квадратным поперечным сечением), то плазмоны на их границах описываются уравнением (15). Действительно, поперечный волновой вектор в параллелепипеде с квадратным сечением определяется в двух направлениях:

$$k_x = k_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 k_0^2 - \beta^2}{2}} \approx 0.7\sqrt{\varepsilon_2 k_0^2 - \beta^2},$$

где β-волновой вектор плазмонов, ε_2 – диэлектрическая проницаемость металла.

В уравнении (15) коэффициент в тангенсе при функции фазы приблизительно равен 0.7. Общий вид дисперсионного уравнения для двух рассматриваемых структур имеет вид:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_2 k_0^2 - \beta^2}}{\varepsilon_2} tg\left(0.7d\sqrt{\varepsilon_2 k_0^2 - \beta^2}\right) + i\frac{\sqrt{\varepsilon_1 k_0^2 - \beta^2}}{\varepsilon_1} = 0,$$

где ε_2 – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, d-поперечный размер структуры (радиус или длина стороны квадрата в сечении).

Таким образом, элементы теории металлодиэлектрических наноструктурированных сред цилиндрической симметрии, выведенные в настоящей статье, совпадают с алгоритмом расчета характеристик таких же сред плоскопараллельной симметрии. Конструировать материал с геометрически различающимися объектами можно одним способом. При этом он несет более конструктивный характер без привлечения в расчет специальных функций и позволяет предусматривать и аналитически рассчитывать свойства метаматериала уже на первых шагах алгоритма.

5. Выводы

В статье получено новое решение задачи математического описания распространения одномерных поверхностных плазмонов. В результате исследования выведены трансцендентное уравнение неявной зависимости фазы волны от координаты и уравнение, определяющее значение фазы волны на границе раздела сред «металл-диэлектрик». Результирующее уравнение содержит неизвестный волновой вектор поверхностных плазмонов. По функциональным характеристикам и асимптотикам результат близок к традиционному решению задачи об одномерных поверхностных плазмонах, полученному А. Зоммерфельдом. Новый результат в своей (актуальной) сфере применяемости более удобен для расчета по сравнению с ранее принятым обращением к табулированному варианту. Данное преимущество особенно проявляется в случае, когда условия задачи включают в себя несколько границ раздела сред «металл-диэлектрик». Упрощение и доступность численной обработки этих формул облегчают решение задачи при очевидной общности математического выражения природы двумерных и одномерных поверхностных плазмон-поляритонов. При этом ключевые параметры традиционного и альтернативного решений, как и результаты их численного расчета, близки.

Литература

1. *Sommerfeld A.* Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen an einem zylindrischen// Leiter *Ann. der Physik und Chem*. 1899, Vol.67., P. 233-290.
2. *Князев В.А., Кузьмин А.В.* Поверхностные электромагнитные волны: от видимого диапазона до микроволн// *Вестник НГУ. Серия: физика.* 2007. 2 (1). С. 108-122.
3. *Климов В.В.* Наноплазмоника. М.: Физматлит 2009.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит 2003.
5. *Seina N.V., Tumayev E.N.* Propagation of electromagnetic waves in the Pendry lens// Nanotechnologies In Russia. 2016. Т. 11. № 7-8. С. 491-496.
6. *Seina N.V., Tumayev E.N.* Localized plasmon resonance// Nanotechnologies In Russia, 2017, Vol. 12, Nos. 5–6, Pp. 285–290

QUASI-ONE-DIMENSIONAL CYLINDRICAL SURFACE PLASMON-POLARITONS

N. V. Selina

Kuban state technological University

Received 08.07.2018

The direct (without using special functions) solution of Maxwell's equations for piecewise homogeneous medium with cylindrical symmetry is obtained. Was developed on the basis of a rational calculation method of the material, geometrical and dispersive characteristics of plasmon metal-dielectric cylindrical structure. Numerical calculation of the wave vector of plasmons using the obtained formulas confirmed the main theoretical and experimental results of studies of one-dimensional surface plasmons-polaritons. The solution is applicable to structures with an arbitrary number of metal-dielectric boundaries.