ИОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ПЛАНЕТЫ. ОПЫТ КАЧЕСТВЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ю.М. Брук[1], А.Л. Стасенко[2,3]

[1]Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук ФИАН)
[2]Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского (ЦАГИ)
[3]Московский физико-технический институт (Государственный университет, МФТИ)

yubruk@gmail.com , stasenko@serpantin.ru

Поступила 05.12.2017

Обсуждается возможность моделирования планетных систем на основе кристаллических структур, построенных из почти одинаковых атомов. Цель такого моделирования – описать качественные и количественные характеристики гравитирующих шаров и выяснить их возможные корреляции с реальными планетами. В частности, объясняется почему реальные планеты с большими массами построены в основном из относительно лёгких элементов, какова максимальная высота гор на планетах и предельная глубина бурения коры (мантии) планет.

УДК 22.317; 52+53; 533(9); 539(2)
DOI: 10.31145/2224-8412-2017-17-2-49-63

Введение

Едва ли, кроме астрофизики, найдется такая другая область науки, где теснейшим и часто причудливым образом переплетены идеи и образы из атомной и ядерной физики, оптики и спектроскопии, физики низких температур и гидродинамики, теории твердого тела и физики плазмы. Обычно все эти разделы физической науки изучаются и излагаются в учебниках независимо от гравитации. В астрофизике же именно гравитация определяет специфику многих газодинамических и низкотемпературных, плазменных и твердотельных эффектов и явлений. В это «созвездие наук» включается и наука о ядерных превращениях и теория фазовых переходов в плотном и сверхплотном веществе. Сверхплотным мы будем считать вещество, плотность которого превышает $(10^5 \div 10^6)\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. В макроскопических количествах такое вещество в земных условиях не существует. Можно сказать, правда, что на Земле существует вещество (и сама Земля в значительной степени из него состоит) с плотностью много большей, чем $10^6\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, плотность атомных ядер примерно равна $3{\cdot}10^{14}\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Но нас дальше будут интересовать в основном явления, происходящие в макроскопических сгустках плотного и сверхплотного вещества, в том числе и при ядерных плотностях. Примерами таких сгустков сверхплотного вещества являются белые карлики и нейтронные звезды. Сейчас можно считать окончательно установленным существование множества таких звезд. Мы расскажем о них и других звездах и планетах дальше.

Наша главная цель – продемонстрировать приемы моделирования и качественного оценивания параметров плотных и сверхплотных объектов и физических процессов с ними связанных. При этом мы будем активно пользоваться методами теории размерностей и физическими аналогиями из разных областей физики [1].

Взаимное проникновение идей из одного раздела физики в другой не является, конечно, специфическим только для астрофизики. Можно вспомнить, например, что представления о поверхностном натяжении и колебаниях жидкой капли послужили толчком к созданию капельной модели атомного ядра и позволили оценить характерные частоты колебаний ядер. Интуитивно ясно сходство процессов деления атомных ядер и дробления дождевых капель.

Очень существенно, что аналогии не только наталкивают нас на то, как надо пытаться строить новые теории, но часто помогают еще до построения таких теорий получать количественные оценки. Опыт наблюдений, экспериментов и использования аналогий убеждают нас в разумности таких оценок. Из соображений размерностей мы не можем, конечно, вычислить числовые коэффициенты в формулах, но «к счастью» для нас, эти коэффициенты во многих случаях оказываются числами порядка единицы. Разумеется, оценки не избавляют нас от необходимости более аккуратного решения физических задач в тех случаях, когда это возможно. Но нужно помнить, что возможность строгого решения не всегда имеется. Основных препятствий чаще всего два – недостаточность информации о характере взаимодействия частиц и трудности вычислительной работы. Тем более важным представляется в таких случаях качественный и полуколичественный анализ упрощенной или модельной физической ситуации. Часто даже «наивные» представления оказываются по сути своей более глубокими, чем это кажется на первый взгляд. Системы частиц и физические процессы, о которых мы будем рассказывать, очень непросты. И, пожалуй, вполне уместно напомнить слова, принадлежащие выдающемуся советскому физику-теоретику Я.И. Френкелю [2], «Чем сложнее рассматриваемая система,- писал он,- тем по необходимости, упрощеннее должно быть ее теоретическое описание. Хорошая теория сложных систем должна представлять лишь хорошую карикатуру на эти системы, утрирующую те свойства их, которые являются наиболее типическими, и умышленно игнорирующую все остальные – несущественные свойства».

Следуя этим словам, будем стараться «рисовать хорошие карикатуры». Изучение же обсуждаемых нами вопросов на более высоком уровне строгости показывает, что наши карикатуры можно раскрашивать, но не надо перерисовывать.

Прежде, чем перейти к конкретным задачам, сделаем важное предварительное замечание. В большом и неоднородном тексте статьи мы иногда позволяли себе обозначать одинаковыми буквами разные физические величины. Мы пошли на это совершенно сознательно потому, что не хотели отступать от сложившихся традиций и соглашений, а число понятий, которые мы обсуждаем, довольно велико. В каждом разделе статьи мы подробно обсуждаем о чем идет речь. Мы надеемся, что это не приведет нигде к недоразумениям. По аналогичным причинам мы не стали делать ни в разделах, ни в статье в целом сплошную нумерацию формул. Мы считаем, что это тоже не создаст трудностей у читателей при чтении.

Что такое модуль Юнга [3]

Рассмотрим сначала модель ионного кристалла, похожего на кристалл поваренной соли *NaCl*, но отличающегося от последнего тем, что все атомы имеют примерно одинаковую массу. Массой электронов по сравнению с массой ядер мы, конечно, пренебрегаем.

Пусть плотность кристалла ρ, а атомные веса элементов, его составляющих $A_1 \approx A_2 \approx A$. Кристаллическая решетка построена из чередующихся положительных и отрицательных ионов. Заряд каждого иона будем считать равным заряду электрона (±*e*). Силами, действующими на каждый ион, являются обычные кулоновские силы. Попробуем оценить плотность электростатической энергии системы ионов. Сделать это несложно. Масса каждого атома примерно равна

$m_я = Am_p$, m_p – масса нуклона.

Выпишем систему параметров задачи: плотность энергии E $(\frac{эрг}{см^3} = г \cdot см^{-1} \cdot с^{-2})$; плотность ρ $(г \cdot см^{-3})$; заряд электрона (иона) e $(г^{1/2} \cdot см^{3/2} \cdot с^{-1})$; масса ядра $m_я$ (г).

Пусть $E \sim e^x m_я^y \rho^z$, сравнивая размерности левой и правой частей этого равенства, найдём $x = 2; y = -\frac{4}{3}; z = \frac{4}{3}$. Итак,

$$E \sim e^2 m_я^{-4/3} \rho^{4/3} \sim (\frac{\rho}{m_я}) \cdot \frac{e^2}{(m_я/\rho)^{1/3}}$$

Совсем понятно, что $(\frac{\rho}{m_я})$ – это просто число ионов в 1 см^3, а $(\frac{m_я}{\rho})^{1/3}$ – среднее расстояние между ионами. Упругие свойства вещества определяются межатомными взаимодействиями. Значит и величина E есть та самая характерная плотность энергии, которую мы называем по-другому упругим модулем G. Численное значение этой энергии по порядку величины мы сейчас вычислим. Пусть, например, ρ=5 г/см^3, A=50. Тогда

$$\frac{\rho}{m_я} \sim 5 \cdot 10^{22} \text{ атомов}/_{\text{см}^3}$$

$$(\frac{m_я}{\rho})^{1/3} \sim 2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$$

$$E \sim 2 \cdot 10^{11} \ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$$

Примерно такое же значение для G вы легко найдёте в таблицах упругих постоянных кристаллов.

В теории ионных кристаллов энергию электростатического взаимодействия часто записывают в виде равенства $E = -\frac{1}{2}\alpha n\frac{e^2}{a}$ [4]. Для нашего примера $n = \frac{\rho}{m_я}$; $a = (\frac{m_я}{\rho})^{1/3}$.

Отрицательный знак энергии означает, что написана энергия связи (сравните со знаком энергии электрона на атомной орбите). Постоянная α носит название постоянной Маделунга. Вычисления для реальных кристаллических решеток – трудная задача, но мы можем считать, что, по крайней мере для нашей простой модели, α не сильно отличается от единицы.

Для других твердых тел (неионных кристаллов) рассчитать упругие модули оказывается существенно сложнее, так как в них важны и другие типы межатомных сил. Здесь нужно сделать ещё одно очень важное замечание. Кроме кулоновских сил притяжения противоположно заряженных ионов, существуют ещё и силы отталкивания, очень сильно возрастающие при сжатии решётки. И именно из-за того, что в решетке существуют как силы притяжения, так и силы отталкивания, кристалл устойчив. Равновесные расстояния между ионами определяются из условия минимальности полной энергии взаимодействия ионов. Другими словами, это означает равенство сил притяжения и отталкивания в кристаллах. Из соображений размерности мы выше получили только кулоновский вклад ионов в потенциальную энергию. Пока расстояние между ионами больше размеров атомов, мы можем считать, что по порядку величины кулоновская энергия ионов и полная энергия связи совпадают. На меньших расстояниях это, конечно, не так. Поэтому, когда мы считаем энергию связи ионного кристалла порядка кулоновской энергии, мы должны помнить, что это так, лишь пока существует ионный кристалл, атомы в котором не слишком близки друг к другу.

Полезно обратить внимание на то, что плотность $n \sim \frac{\rho}{m_я} \sim a^{-3}$, поэтому $E \sim \frac{e^2}{a} \cdot n \sim \frac{e^2}{a^4}$. Отсюда следует, что величина E ограниченная. Расстояние a между ионами во всяком случае не может быть меньше боровского радиуса a_0. Значение E ограничено сверху величиной e^2/a_0^4, $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$, m_e – масса электрона. Параметр e^2/a_0^4 вовсе не содержит в себе информацию о том, упругий модуль какой решетки он ограничивает (он образован из универсальных постоянных). Естественно поэтому, что этот же параметр ограничивает в действительности сверху упругие модули и других кристаллических решеток.

Совсем просто оценить теперь и скорость звука *s* в кристаллической решетке. Учтём, что $s^2 \sim \frac{G}{\rho}$, $\rho \sim nm_Я$, $G \sim n\frac{e^2}{a}$, т.е. $m_Я s^2 \sim \frac{e^2}{a}$ или $s^2 \sim \frac{e^2}{m_p}\frac{1}{aA}$ [5]. Расстояние между атомами a можно для грубых оценок считать величиной, хотя и большей боровского радиуса, но не очень сильно отличающейся от него:

$$a \sim a_0 \sim \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$$

Тогда оценка для скорости звука будет:

$$s^2 \sim \frac{m_e}{m_p} \cdot \frac{e^4}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{A}$$

Разделим обе части этого соотношения на квадрат скорости света c^2 :

$$\frac{s^2}{c^2} \sim \left(\frac{m_e}{m_Я}\right)\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \sim \frac{m_e}{m_p}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{1}{A}$$

Величина $\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \approx \frac{1}{137}$. Эта величина называется в физике постоянной тонкой структуры. А теперь вспомним, что $\left(\frac{e^2}{\hbar}\right)$ – величина порядка орбитальной скорости электронов в атоме v. Отсюда следует, что $s^2 \sim \frac{m_e}{m_Я} v^2$. Скорость звука определяется, как мы видим, отношением массы электрона к массе ядра. Кулоновская же энергия $\frac{e^2}{a}$ оказывается порядка $m_Я s^2$.

Обсудим еще, что было бы, если бы мы сумели «накачать» в 1 см^3 кристалла энергию намного большую, чем (e^2/a^4). Что случилось бы тогда с кристаллической решеткой? Можно сказать, что она сломается, а кристалл превратится в жидкость. Давайте рассуждать так. Ограничение $E < \frac{e^2}{a_0^4}$ следует из того, что пока существует наша решетка, расстояние между ионами $a > a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$. Если же решетку сдавливать («накачивать» в кристалл энергию), то при $a \to a_0$, одновременно со сближением атомов (ионов) начнется и «обдирание» их электронных оболочек. Это становится понятным, если вспомнить, что характерные атомные энергии как раз порядка $\frac{m_e e^4}{\hbar^2} = \frac{e^2}{a_0}$. Значит, сдавливая решетку все сильнее и сильнее, мы в конце концов «обдерем» все атомы, расстояния между ядрами будут совсем малыми, а все электроны обобществятся, то есть ни про какой электрон нельзя будет сказать, что он принадлежит какому-то атому. У нас появится теперь «электронная жидкость», в которой будут «растворены» атомные ядра. Если бы мы сжимали рассматриваемый нами объем со всех сторон равномерно, то могло бы, в принципе, случиться и так, что решетку будут образовывать отдельные «голые» ядра, а между ними будут «гулять» электроны. Ионный кристалл, о котором мы говорили раньше, перестанет существовать. Вместе с тем потеряет смысл и понятие модуля Юнга для него. Взамен G ~ E придется рассматривать кулоновскую энергию взаимодействия ядер (независимо от того, образуют ли они кристаллическую ядерную решетку или не образуют) и соответствующую энергию «электронной жидкости».

Теперь понятно, что достаточно сильное сжатие даже неметаллических кристаллов обязательно приводит к их металлизации. Характер взаимодействия ионов в простейшей ионной решетке по мере сжатия её должен изменяться. Так как сильное сжатие сопровождается дальнейшей ионизацией атомов, должны изменяться и силы взаимодействия между ионами [6], [7]. А «отодранные» от атомов электроны образуют теперь электронный газ, давление которого также противодействует сжатию. Неудивительно, что и силы притяжения сменяются силами отталкивания. Заметьте, что «голые» ядра заряжены положительно и должны отталкиваться, хотя исходные ионы были разноименными и притягивались друг к другу.

Полученная нами выше формула $E \sim e^2 m_я^{-4/3} \rho^{4/3}$ имеет и ещё одну забавную особенность – она устанавливает зависимость упругого модуля от безразмерного параметра, который может быть большим по сравнению с единицей. В самом деле, перепишем эту формулу в виде

$$E \sim e^2 A^{-4/3} m_P^{-4/3} \rho^{4/3}$$

Атомный вес (его называют также массовым числом) – A и есть большой безразмерный параметр:

$$A \sim \frac{m_я}{m_P} >> 1.$$

Все это говорит о том, как важно выбирать разумные параметры в каждой задаче. Ясно ведь, что масса нуклона имеет отношение к кулоновской энергии кристаллической решетки лишь постольку, поскольку из нуклонов состоят ядра. «Работающим» же параметром в рассматриваемом примере является, конечно, масса ядра. При разумном выборе параметров безразмерные комбинации функционально связанных величин оказываются обычно числом порядка единицы.

Связаны ли массы планет с массой атомных ядер?

В этом разделе мы попытаемся порассуждать о характеристиках ионно-кристаллической планеты и связи модуля Юнга *G* и давления в центре планеты. Последнее легко находится из соображений размерностей и имеет вид $\rho \sim \gamma(\frac{M}{R^2})^2$. Здесь γ – гравитационная постоянная, M – масса, R – радиус гравитирующего шара (планеты) [8].

Все, что мы скажем ниже, безусловно, носит только качественный характер. Любые реальные планеты всё-таки гораздо сложнее, чем та модель, которую мы собираемся обсуждать. Но мы сумеем «ухватить» очень существенные закономерности, одну из которых даже оказывается возможно совсем просто «проверить» на примере нашей Солнечной системы. Мы уже научились выше «вычислять» модуль Юнга для ионной кристаллической решетки, построенной из почти одинаковых атомов. Теперь представим себе гипотетическую планету, построенную целиком из такого ионного кристалла.

Запишем опять соотношение для модуля Юнга:

$$G \sim E \sim e^2 {m_я}^{4/3} \rho^{4/3}$$

Прежде всего отсюда следует, что G зависит от плотности. Другими словами, в глубине планеты, сжатой гравитацией, величина G больше, чем у поверхности.

Последнее верно, разумеется, не только для ионных кристаллов. Для такой планеты, как Земля, плотность меняется от центра к поверхности не очень уж сильно (примерно в 3 раза), соответственно и модуль Юнга меняется не более, чем в несколько раз. Если бы Земля была ионным кристаллом, то из формулы для G мы нашли бы, что в центре модуль увеличился бы примерно в $3^{4/3} \sim 5$ раз.

«Истинное» давление в центре Земли ~ 4 Мбар.

Модуль Юнга вещества у поверхности Земли ~ 1 Мбар.

Мы можем задуматься: обязательно ли у Земли $G < 4$ Мбар в центре? Если это так, то кристаллическая решетка должна была бы «сломаться» где-то вблизи центра. И у планеты появилось бы жидкое ядро. Если же давление в центре не превосходит модуля G (вычисленного там же в центре), то планета может остаться кристаллической и до самого центра [9].

Существует и еще одно очень важное условие справедливости высказанных только что утверждений. Планета должна быть холодной, точнее температура в центре не должна быть очень близкой к температуре плавления. В противном случае жидкое ядро все равно будет – кристалл просто расплавится.

Все это верно и для нашей гипотетической планеты. Условия существования холодной планеты без жидкого ядра есть

$$G_o \gtrapprox \gamma(\frac{M}{R^2})^2 \; ; T_{центр} < T_{плавл}$$

Здесь G_o – модуль Юнга, характерный для кристалла в центре планеты,

$T_{центр}$ – температура вблизи центра,

$T_{плавл}$ – соответствующая температура плавления.

Будем считать, что температурное неравенство выполнено.

Неравенство $G_o > \gamma(\frac{M}{R^2})^2$ «работает» с той же точностью, с какой мы вычисляем входящие в него величины. Эта оценка, вообще говоря, довольно грубая, Как обычно, мы не будем выписывать никаких численных безразмерных множителей, имея ввиду ограничиться в основном качественной оценкой. Для нашей гипотетической планеты, состоящей из грандиозного ионного кристалла с массой атомов $\approx m_я$, условие отсутствия жидкого ядра можно записать так:

$$G_o \sim e^2 m_Я^{-4/3} \rho_o^{4/3} \geq \gamma \frac{M^2}{R^4}$$

Об уточнении неравенства мы скажем ниже.

Мы написали слева среднюю плотность $\rho_o \sim \frac{M}{R^3}$, которую по порядку величины считаем равной плотности в центре. Неравенство можно переписать так:

$$m_Я \lessapprox e^{3/2} \gamma^{-3/4} M^{-1/2}$$

Учтем еще, что $m_я = Am_p$ (A – число нуклонов в атомном ядре, m_p – масса нуклона) и получаем

$$A \lessapprox (\frac{e^2}{\gamma m_p M})^{3/4} (\frac{M}{m_p})^{1/4}$$

Предположения о том, что планета целиком кристаллическая, а плотность её в центре порядка средней плотности, привели нас к выводу, что при заданной массе планеты M не из всяких атомов её можно построить.

Могло бы показаться, что неравенство $G_0 \gtrapprox \gamma \frac{M^2}{R^4}$ писать было бы нельзя, потому что гравитационное давление могло бы превзойти G_o и ионный кристалл разрушился бы. На самом деле это не так. В действительности мы должны вспомнить, что кроме модуля Юнга G_o (можно, кстати, называть его и модулем всестороннего сжатия) существует понятие предела прочности кристалла $G_{пр}$. Для наших целей можно было бы называть его модулем сдвига или разрушения.

Используя аналогию с теорией упругости нужно считать $G_{пр}$ по крайней мере на порядок (или два) меньше G_o. Поэтому правильно было бы писать обсуждавшееся выше неравенство в таком виде

$G_o > G_{пр} \sim \gamma \frac{M^2}{R^4}$ и наши предыдущие рассуждения и выводы из них справедливы.

Понятно, что если все же окажется $\gamma \frac{M^2}{R^4}$ больше, чем G_o, то полностью ионного кристалла уже не будет, у кристаллической планеты будет жидкое ядро.

Параметр *A* оказался ограниченным сверху. Но это ещё не всё.

Можно утверждать, что число *A* ограниченно и снизу. Чтобы понять это, вспомним, что модуль *G* не могут быть больше характерной величины $(\frac{e^2}{a_o^4})$, *e* – заряд электрона, $a_o = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ – боровский радиус, m_e – масса электрона.

Значит, пока существует ионный кристалл, существует и неравенство

$$G_o \sim e^2 m_я^{-4/3} \rho_o^{4/3} < \frac{e^2}{a_o^4}$$

Снова подставляя $\rho_o \sim \frac{M}{R^3}$, получаем отсюда:

$$A > (\frac{M}{m_p})(\frac{a_o}{R})^3$$

Подведем итог: если планета целиком построена из ионного кристалла с $A_1 \approx A_2 \approx A$, то

$$\frac{M}{m_p}(\frac{a_o}{R})^3 < A < (\frac{e^2}{\gamma m_p M})^{3/4}(\frac{M}{m_p})^{1/4} \quad [9]$$

Подобного типа неравенства должны существовать, очевидно, и в тех случаях, когда кристалл сложнее, чем рассматриваемый нами.

Теперь мы просто должны попробовать получить и количественную оценку *A*. Пусть параметры *M* и *R* нашей гипотетической планеты будут такие же как у Земли:

$$M \approx 6 \cdot 10^{27}г, \ R \approx 6 \cdot 10^8 см.$$

Вычисления приводят нас к оценке

$(2 \div 3) < A < (\sim 20)$. Не так уж плохо!

Было бы конечно неправильным делать вывод о том, что ионно-кристаллическую планету нельзя вообще строить из атомов с A большим, чем

$$A_{макс} \sim (\frac{e^2}{\gamma m_p M})^{3/4}(\frac{M}{m_p})^{1/4}$$

Теперь нам ясно, что такие планеты из атомов с $A > A_{макс}$ существовать могут, но они обязаны иметь жидкое ядро.

Ограничения на массы атомов, из которых могут быть построены полностью кристаллические планеты, определяются, как мы убедились, параметрами самих планет.

В частности, для ионно-кристаллических планет без жидкого ядра $A_{макс}$ пропорционально $M^{-1/2}$.

Любопытно в связи с этим сравнить разные планеты нашей Солнечной системы. Они, конечно, не являются ионно-кристаллическими планетами. И мы не будем сейчас обсуждать вопрос о возможности или невозможности существования в реальных планетах жидких ядер. Но мы отметим, что в планетах существуют кристаллические системы.

Планеты земной группы (Меркурий, Венера, Марс) не превосходят по массе Землю $M_з$, а характерными элементом для них является железо (A~60). Планеты Уран и Нептун имеют массы соответственно в 15 и 17 раз больше Земли, а состоят они изо льда, твердых метана (CH_4) и аммиака (NH_3) в металлической фазе. Наконец, планеты-гиганты Юпитер (масса 317 $M_з$) и Сатурн (масса 95 $M_з$) состоят в основном из металлических водорода и гелия. Совершенно отчетливо видна тенденция: чем больше масса планеты, тем меньше средние атомные веса элементов, из которых она состоит.

Сравните это с отмеченной выше корреляцией $A_{макс}$ и масс для ионных планет. Более того, есть основания считать, что подобного типа закономерности могут быть и для популяций экзопланет (так называются планетные системы вблизи других звезд). Открытие их – одно из важных достижений науки XX века.

О металлических планетах и белых карликах мы ещё поговорим позже.

А пока вернемся ещё раз к ионно-кристаллической планете. Модуль G в нашей модели ограничен с обеих сторон. Естественно, максимально допустимое значение $\max G \sim \frac{e^2}{a_o^4}$ должно быть (в такой модели!) больше гравитационного давления $\sim \gamma \frac{M^2}{R^4}$.

Напишем неравенство

$$\frac{e^2}{a_o^4} > \gamma \frac{M^2}{R^4}$$

Оно выражает соотношение между максимально возможной плотностью кулоновской энергии в ионной решетке и характерной плотностью гравитационной энергии, при которой может существовать описываемая нами ионная планета. Ясно, что полученный нами критерий носит достаточно общий характер и не зависит от конкретного типа кристаллической решетки.

Перепишем этот критерий в виде

$$\left(\frac{R}{a_o}\right)^4 > \frac{\gamma M^2}{e^2} [9]$$

Отсюда видно, каким должен был бы быть радиус нашей ионно-кристаллической планеты с массой *M*, не имеющей жидкого ядра.

Такое рассуждение будет, однако, несправедливым для планеты, если в ней появится жидкое ядро и произойдет ионизация. В таком случае появившийся электронный газ создает своё давление, которое может быть больше взаимодействия ионов. Тогда придется сравнивать давление вырожденных электронов с гравитационным давлением (плотностью гравитационной энергии).

Неравенства для возможных скоростей звука в центре ионно-кристаллической планеты.

Будем считать, как и выше, что жидкого ядра у планеты нет.

Нам остается записать очевидные теперь соотношения:

$$s^2 \sim \frac{G_o}{\rho_o} < \frac{e^2}{a_o^4 \rho_o} \sim \frac{e^2}{a_o} \cdot \frac{1}{\rho_o a_o^3}; \quad [5]$$

$$\rho_o \sim \frac{M}{R^3};\ s^2 < \frac{e^2}{a_o} \frac{1}{M} (\frac{R}{a_o})^3 \quad [10]$$

Чтобы сделать эту формулу безразмерной, поделим обе части на квадрат скорости света c^2 и подставим $a_o = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$

$$\frac{s^2}{c^2} < (\frac{e^2}{\hbar c})^2 (\frac{m_e}{M}) (\frac{R}{a_o})^3$$

Ограничение снизу получается также просто:

$$s^2 \sim \frac{G_o}{\rho_o} > \frac{1}{\rho_o} \gamma \frac{M^2}{R^4}, \text{ т.е. } s^2 > \gamma \frac{M}{R}$$

Снова поделим на c^2, тогда $\frac{s^2}{c^2} > \frac{\gamma M}{R_g c^2} (\frac{R_g}{R})$,

R_g – гравитационный радиус.

Так как $R_g = 2\gamma M c^{-2}$, мы видим, что нижний предел скорости звука пропорционален величине $(\frac{1}{2} \frac{R_g}{R})^{1/2} \cdot c$.

Обратите внимание, что скорость звука, которую мы получали раньше $s^2 > \gamma \frac{M}{R}$ оказывается для нашей модели минимальной скоростью звука вблизи центра планеты.

Выпишем окончательную систему неравенств:

$$\frac{R_g}{2R} = \gamma \frac{M}{Rc^2} < \frac{s^2}{c^2} < (\frac{e^2}{\hbar c})^2 (\frac{m_e}{M}) (\frac{R}{a_o})^3$$

Численные оценки для планет, имеющих параметры, похожие на параметры реально существующих планет, читатели легко проделают сами.

Очень интересно, что сами формулы указывают нам границы справедливости наших утверждений и предположений.

Замечание о текучести в глубоких шахтах. Замечания о разрушении кристаллической решетки и высоте гор.

Мы опять ограничимся рассмотрением ионной кристаллической решетки. Для такой решетки (впрочем, и для металлов тоже) температура плавления $T_{плавл}$ определяется приближенным равенством:

$kT_{плавл} \approx 0{,}01\frac{e^2}{a}$, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град – постоянная Больцмана, а $\frac{e^2}{a}$ кулоновская энергия в кристаллической решетке.

Можно было бы привести некоторые «серьезные» аргументы в пользу написанной формулы, но мы будем рассматривать ее как экспериментальное соотношение. В действительности множитель 0,01 есть, грубо говоря, отношение модуля сдвига к модулю сжатия в кристаллической решетке. Эта же величина характеризует изменение удельного объема при плавлении – для большого числа веществ $\frac{v_ж - v_k}{v_ж} \sim 10^{-2}$, $v_ж$, v_k – здесь удельные объемы жидкой и кристаллической фаз, $v_ж \sim v_k \sim a^3$. Физический смысл формулы довольно ясен. Величина ~ kT всегда характеризует энергию «тепловых» колебаний атомов. Если эти колебания становятся достаточно «сильными» (другими словами, если их амплитуда становится достаточно большой) – решетка разрушается. Критерием «силы» колебаний как раз и является написанное соотношение. Заметим теперь, что, рассуждая о разрушении кристаллических решеток во всех предыдущих примерах, мы всегда говорили о модуле Юнга $G \sim \frac{e^2}{a^4}$. Именно этот модуль характеризует «прочность» решетки при всесторонней деформации. В то же время читатели наверняка знают, что деформацией сдвига решетку разрушить обычно легче, чем деформацией сжатия или растяжения. Довольно понятно, что предельное напряжение сдвига (мы называем так максимальное напряжение, при котором решетка еще не разрушается) по порядку величины не должно быть больше $\frac{kT_{плавл}}{a^3}$. Если же соответствующее сдвиговое напряжение (напомним размерность напряжения $\frac{дин}{см^2} = \frac{эрг}{см^3}$) достигнет величины $\sim(\frac{kT_{плавл}}{a^3})$, решетка начнет плавиться, при этом температура ее может быть и много меньшей, чем «обычная» температура плавления. В этом нет ничего удивительного, ведь величина $\frac{kT_{плавл}}{a^3} \approx 0{,}01\frac{e^2}{a^4}$ есть просто характерная энергия, при которой атомы смещаются так сильно из положения равновесия, что могут уже в них и не вернуться. Все то, что мы говорили раньше, остается, конечно, и теперь справедливым. Не нужно, например, «подправлять» оценки в предыдущем разделе – там речь шла о всестороннем сжатии и «работал» именно параметр G.

Подумаем теперь, в каких случаях становятся существенными сдвиговые деформации. Мы знаем, например, что при деформировании стержня в продольном направлении меняются и его поперечные размеры. Пока продольные деформации стержня малы, малы и изменения его поперечного сечения, а стало быть, и расстояния между атомами стержня во всех направлениях меняются незначительно. Поэтому при малых продольных деформациях можно считать малыми и поперечные (сдвиговые) напряжения. Если продольное (растягивающее или сжимающее) напряжение увеличить, то увеличится не только продольная, но и поперечная деформация. Может случиться так, что при некотором продольном напряжении, меньшем чем $G \sim (\frac{e^2}{a^4})$, поперечное (сдвиговое) напряжение уже достигнет величины $\sim \frac{kT_{плавл}}{a^3} \sim 0,01\frac{e^2}{a^4}$. В этом случае стержень должен «потечь» в поперечном направлении. Наше рассуждение уточняет таким образом приведенные раньше оценки максимально достижимых в лабораторных условиях давлений. Текучесть материалов является одним из самых серьезных препятствий при получении высоких давлений при односторонней (или, как говорят, одноосной) деформации.

Обсудим теперь вопрос о максимально возможной высоте гор на поверхности нашей гипотетической ионно-кристаллической планеты [11]. Сжимающее напряжение в горе равно, очевидно, ρgh , ρ – плотность вещества, $g = \gamma\frac{M}{R^2}$, а h – высота горы. Мы предполагаем, что $h << R$ – радиуса планеты, тогда g можно считать не меняющимся на высотах $\lessapprox h$. Предположим еще, что плотность вещества горы порядка средней плотности вещества планеты. Для того, чтобы гора не разрушалась, все напряжения должны быть меньше ~ 0,01G. Предельный случай достигается, когда сжимающее напряжение становится порядка 0,01 G. Ясно, что если бы при $\rho gh \sim 0,01$ G вещество у подножия горы стало «жидким», сдвиговые напряжения тоже стали бы ~ 0,01 G (сравните это с законом Паскаля для жидкостей – давление во всех направлениях должно быть одинаковым в данной точке внутри жидкости).

Итак, оценка максимальной высоты горы $h_{макс}$ следует из равенства:

$$\rho g h_{макс} \sim 0{,}01G \sim 0{,}01\frac{e^2}{a^4} \sim 0{,}01 e^2 m_Я^{-4/3} \rho_o^{4/3}$$

Подставляя теперь $\rho \sim \frac{M}{R^3}$ и $g = \gamma\frac{M}{R^2}$, мы получим формулу
$\frac{h_{макс}}{R} \sim \frac{0{,}01e^2}{\gamma m_Я^{4/3} M^{2/3}}$.

Можно записать оценку для $h_{макс}$ и по-другому. Учтем, что $(\frac{kT_{плавл}}{a^3}) \sim 0{,}01G$, тогда $\rho gh \sim \frac{kT_{плавл}}{a^3}$.

Отсюда сразу видно, что $h_{макс} \sim \frac{kT_{плавл}}{m_Я g}$ (так как $a^{-3} = n$, а $\rho = nm_Я$).

Физический смысл этой последней формулы совершенно очевиден. Она показывает, что разрушение гор начинается как раз тогда, когда потенциальная энергия атома на вершине горы $m_Я g h_{макс}$ становится порядка теплоты плавления $kT_{плавл}$(в расчете на один атом). Если для оценки взять $T_{плавл} \sim 10^3$ °К и $m_Я \sim 50m_p \sim 10^{-22}$г, мы получим

$h_{макс}$~16 км. Заметьте, что эту оценку мы получаем, вовсе «не зная» массы и радиуса планеты!

Подводя итог приведенным выше рассуждениям, мы приходим теперь к выводу о том, что факт отличия деформаций сжатия (или растяжения) от деформаций сдвиговых означает и существование различных характерных модулей. Модуль сжатия отличается от модуля сдвига.

В соответствии с этим для твердых тел должно быть уточнено и понятие о звуковых волнах. Существуют, как мы знаем, волны продольные и поперечные. Частицы в продольной волне (волне сжатий и разрежений) колеблются в направлении распространения волны, в поперечной волне – направление колебаний частиц перпендикулярно к направлению распространения волны. Скорость продольного звука обычно несколько больше скорости поперечного. Но эти заключения справедливы только для твердых тел. В жидкостях и газах поперечные волны не могут распространяться. Это обстоятельство играет важную роль в сейсмологии. Изучая закономерности распространения продольных и поперечных сейсмических волн в Земле, геофизики строят модели строения тех или иных слоев внутри Земли. Заметим еще, что предположение о существовании в Земле жидкого ядра, по существу, основано именно на том, что поперечные волны через ядро не проходят.

Литература

1. *Брук Ю.М., Стасенко А.Л.* Метод размерностей и качественные оценки физических величин // М. Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2017, том 16 № 1, с. 5-40.
2. *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей // М. Наука, 1975, 592 стр.
3. *Петров Ю.В.* Основы физики конденсированного состояния // М. Интеллект, 2013, 216 стр.
4. *Борн М., Хуань Кунь* Динамическая теория кристаллических решёток // М., Иностранная литература, 1958, 488 стр.
5. *Стрэтт Дж. В. (Лорд Релей)* Теории звука // Т1, М. ГТТИ, 1955, 503 стр.
6. *Иванов Б.Н.* Законы физики // М. Едиториал УРСС, 2016, 368 стр.
7. *Джалмухамбетов А.У. Фисенко М.А.* Задачи, оценки и модели физических систем // М. Кнорус, 2016, 110 стр.
8. *Засов А.В. Постнов К.А.* Общая астрофизика // М. Век-2, 2015, 576 стр.
9. *Дибай Э.А. Каплан С.А.* Размерности и подобие астрофизических величин // М. Наука, 1976, 400 стр.
10. *Брук Ю.М. Стасенко А.Л.* Как физики делают оценки – метод размерностей и порядок физических величин // М., Знание 1975, в сб. «О современной физике», с. 54-131.
11. *Вайскопф В.* Современная физика в элементарном изложении // М., Наука, Успехи физических наук, 1971, том 103, вып 1, с. 155-179.

ION-CRYSTAL STRUCTURES AND PLANETS. AN EXPERIENCE OF QUALITATIVE MODELING

Yu.M. Bruk[1], A.L. Stasenko[2,3]

[1]P.N.Lebedev Physical Institute Russian Academy of Science
[2]Central Aerohydrodynamic Institute
[3]Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

yubruk@gmail.com , stasenko@serpantin.ru

Received 05.12.2017

A possibility of the planetary systems modeling is discussed on the basis of crystalline structures built with the almost identical atoms. The aim of such approach is to describe qualitative and quantitative characteristics of gravitating balls and to reveal their possible correlation with real planets. In particular, it is explained why the real planets (which have the larger masses) are built with relatively lights elements, what is the maximal height of mountains on those planets and also the limiting depth of drilling the planet crust (mantle).