МЕТОД РАЗМЕРНОСТЕЙ И КАЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Ю.М. Брук[1], А.Л. Стасенко[2,3] *

[1]*Физический институт им.П.Н.Лебедева Российской академии наук (ФИАН)*
[2]*Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е.Жуковского (ЦАГИ)*
[3]*Московский физико-технический институт (Государственный университет, МФТИ)*

yubruk@gmail.com, stasenko@serpantin.ru

Поступила 12.04.2016

В предлагаемом обзоре излагается методика построения математических формул в разных разделах физики, основанная на соображениях размерностей и оценках порядков величин. Приведен большой набор конкретных задач, иллюстрирующих один из самых результативных методов качественного анализа физических процессов и явлений. Основные идеи метода важны для качественного моделирования и, часто, - для количественных оценок, предшествующих точным решениям. Метод размерностей тесно связан с подобием в физике и математике, активно обсуждаемым в современной синергетике.

УДК 530.1, 531.22

1. Не начинай вычислений, пока не знаешь ответа

Едва ли не каждое выступление на научных семинарах или конференциях, где обсуждаются новые теоретические или экспериментальные работы, начинается с качественного описания и оценки того эффекта, о котором хочет рассказать выступающий.

* Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, грант 16-19-10472.

Даже в очень подробном докладе или лекции нет возможности рассказать о всех экспериментальных деталях или всех теоретических хитростях, которые были существенны для выполнения самой работы, для решения той или иной задачи. Но есть вопросы, о которых докладчик должен сказать, не дожидаясь пока их зададут слушатели. К таким вопросам всегда и прежде всего относится оценка порядка величины ожидаемого эффекта, оценка, без которой вообще не начинают решать сколько-нибудь сложные физические задачи – будь то постановка нового эксперимента или построение новой теоретической модели. Трудность самой постановки новых задач часто связана именно с возможностью оценки ожидаемых результатов. Вот что пишет в книге “Великие эксперименты в физике” [1] английский физик-экспериментатор Г.Липсон:

“Находятся люди, которые считают, что у ученого не должно быть никакой предвзятой идеи относительно исхода его эксперимента; ученый, – говорят они, – должен быть совершенно объективным. Это вздор. Настоящий ученый почти всегда ставит эксперименты с целью проверить ожидаемые результаты. Он испытывает удовольствие, обнаружив то, что ожидал, и разочарование когда результаты эксперимента не совпадают с ожидаемыми. Если же ученый ничего не ожидает получить, то он не может быть вполне уверен в значимости своих результатов”.

Приступая к измерениям или расчетам, мы хотим отдавать себе отчет в том, что и как можно измерять или вычислять. Для этого нужно научиться строить простые схемы явлений. В немалой степени этому помогает использование аналогий между физическими процессами, иногда и довольно далекими друг от друга.

Построение физических моделей и использование аналогий тесно связаны с умением производить оценки. Часто оценки и аналогии подсказывают и путь более точного решения задачи. А иногда (и не так уж редко!) точный расчет или измерение какой-то величины сделать трудно или даже невозможно. В таких случаях роль оценок и моделей становится определяющей.

В этой статье на многих примерах мы будем обсуждать как физики делают оценки при решении разных физических задач, как строятся простые модели явлений и как помогают этому физические аналогии. Всему этому лучше всего учиться именно на конкретных примерах. Набравшись опыта, читатель сможет потом решить самостоятельно большое число других задач.

Делать оценки очень помогает метод размерностей. Этому методу и его применениям мы уделяем в статье большое внимание. Не будет преувеличением сказать, что метод размерностей обладает “максимальным кпд”, экономя горы бумаги теоретикам, деньги и время экспериментаторам. Быстрая оценка масштабов исследуемых явлений, построение принципиальной схемы эксперимента, получение качественных и функциональных зависимостей, восстановление забытых формул на экзаменах – таковы достоинства и приложения метода размерностей.

Само собой разумеется, что оценки, построение моделей и использование аналогий – это только первый этап исследования физических процессов. За этим этапом должно следовать более аккуратное и, по возможности, более точное изучение обсуждаемых явлений.

Но “очень часто упрощенная модель проливает больше света на то, как в действительности устроена природа явления, чем любое число вычислений ab initio (из начальных принципов, лат.) для различных конкретных случаев, которые, даже если они правильны, часто содержат так много деталей, что скорее скрывают, чем проясняют истину”. Эти слова принадлежат известному физику-теоретику, лауреату Нобелевской премии Ф.Андерсону [2]. Самого его никак нельзя упрекнуть в пренебрежении точными расчетами или неуважении к экспериментальным исследованиям. Любопытно, однако, привести здесь же и продолжение его высказывания:

“Возможность рассчитать или измерить что-либо слишком точно может быть скорее помехой, а не преимуществом, так как часто то, что измеряется или рассчитывается, с точки зрения выяснения механизма явления оказывается несущественным. В конце концов идеальный расчет просто копирует Природу, а не объясняет ее”.

Перед исследователями могут ставиться разные задачи. Пожалуй, наиболее интересной является задача объяснения того или иного явления. Другой задачей, которую никак нельзя считать менее важной или менее трудной, является задача точного измерения или вычисления каких-то величин. Бывает и так, что принципиальная сторона дела ясна, а проблема заключается в повышении точности эксперимента или расчета. С другой стороны, очень часто задачи нельзя так разделять – физическое явление получает свое полное и окончательное объяснение только после точного расчета или измерения. Тем не менее, во всех случаях полезно руководствоваться правилом, сформулированным крупным специалистом по теории атомного ядра и теории гравитации, выдающимся педагогом Дж.Уилером:

“Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа. Каждому вычислению предпосылай оценочный расчет: привлеки простые физические соображения (симметрия!, инвариантность!, сохранение!) до того, как начинать подробный вывод; продумай возможные ответы на каждую загадку. Будь смелее: ведь никому нет дела до того, что именно ты предположил. Поэтому делай предположения быстро, интуитивно. Удачные предположения укрепляют эту интуицию. Ошибочные предположения дают полезную встряску" (Правило Уилера приведено в книге: Э. Тейлор , Дж. Уиллер "Физика пространства-времени" [3]) Давайте постараемся и мы следовать этому разумному и полезному совету.

2. Первое знакомство с методом размерностей

Начиная знакомиться с методом размерностей, рассмотрим простую задачу (задача Релея см. [4]). Пусть между точками A и B натянута струна, на середине струны находится тяжелый шарик. Масса шарика M намного больше массы самой струны. Струну оттягивают и отпускают. Пусть максимальное расстояние x_0 от шарика до прямой AB мало по сравнению с длиной отрезка AB, середину этого отрезка обозначим буквой C. Примем еще, что длина $AC = CB = a$. Довольно ясно, что шарик будет совершать колебания. Если амплитуда колебаний $a_0 \ll a$, процесс будет гармоническим. Нас интересует вопрос о том, как будет зависеть частота этих колебаний ω от натяжения струны T, массы шарика M и размера a. Предположим, что величины ω, T, M и a связаны степенной зависимостью

$$\omega \sim T^x M^y a^z .$$

Здесь x, y и z – некоторые числа, которые нам предстоит сейчас определить. Поступим для этого следующим образом. Выпишем размерности – наименования единиц, в которых измеряются интересующие нас величины, в какой-либо системе единиц, например, в системе СИ:

$$[\omega] = \text{с}^{-1},\ [T] = \text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2},\ [M] = \text{кг},\ [a] = \text{м}$$

(квадратные скобки как раз и обозначают размерность стоящей в них величины).

Если написанная выше формула выражает реальную физическую закономерность, то размерности правой и левой частей этой формулы должны совпадать. Поэтому можно записать равенство:

$$\text{с}^{-1} = \text{Н}^x \text{кг}^y \text{м}^z = \text{кг}^x \text{м}^x \text{с}^{-2x} \text{кг}^y \text{м}^z .$$

Очевидно, что должны удовлетворяться следующие уравнения для x, y и z:

$$(x+y)=0,\ (x+z)=0,\ -2x=-1.$$

Следовательно, $x=1/2$; $y=-1/2$; $z=-1/2$, а значит
$\omega \sim T^{1/2}M^{-1/2}a^{-1/2}$.

Мы не пишем в формулах, полученных таким методом, знак равенства, заменяя его волнистой чертой. Следует иметь ввиду, что метод размерностей не может помочь в вычислении численных коэффициентов в формулах.

Интересно отметить, что точная формула для частоты отличается от найденной нами всего в $\sqrt{2}$ раз ($\omega^2 = 2T/Ma$). Другими словами, мы можем в данном случае считать, что оценку для ω мы получили не только качественную (в смысле зависимости от параметров T, M и a), но и количественную. По порядку величины найденная степенная комбинация T, M и a дает правильное значение частоты.

Нас и в дальнейшем часто будет интересовать оценка по порядку величины. В простых задачах довольно часто можно считать неопределяемые методом размерностей коэффициенты числами порядка единицы. Это, однако, - не строгое правило. Окончательный вывод о величине численного коэффициента можно сделать, конечно, после сравнения с точной формулой, либо из каких-то дополнительных соображений. Мы будем обсуждать подобные вопросы позже.

А сейчас стоит вернуться к рассмотренной задаче и почетче сформулировать предположения, которые мы сделали. Во-первых, мы считали, что натяжение струны T приблизительно одинаково, когда струна вытянута вдоль линии AB, и когда она оттянута. Это предположение основано на том, что струна оттянута несильно, то есть $x_0 \ll a$. Во-вторых, мы предположили, что действительно существует связь между параметрами ω, T, M и a. В-третьих, мы считали, что формула, выражающая эту связь, имеет степенной вид: $\omega \sim T^x M^y a^z$.

Метод размерностей помогает находить функциональные зависимости между разными параметрами задачи, но только для тех ситуаций, когда эти зависимости степенные. К счастью, таких зависимостей в природе довольно много, и метод размерностей становится хорошим помощником.

3. Правило $N - K = 1$

Понятие размерности физической величины вводится тогда, когда уже выбраны некоторые основные физические величины и установлены единицы для их измерения.

В механике традиционными основными величинами мы считаем массу, длину и время. В системе СИ эти величины измеряются соответственно в килограммах, метрах и секундах, в системе СГС в граммах, сантиметрах и секундах.

Выражение единиц измерения **произвольной** физической величины через единицы измерения основных величин и называется размерностью. Величины, не включенные в число основных, называются производными. Таковыми являются, например, Ньютон, дина, Джоуль, эрг и т.д.

Если мы рассматриваем задачи, в которых фигурируют немеханические величины (например, электрический заряд, ток, потенциал), – можно увеличить число основных величин. В системе СИ в число основных величин включают силу тока, измеряют ее в Амперах. Точно также в термодинамике в число основных величин можно включить температуру, единица измерения ее – Кельвин.

В общем случае выбор основных величин и единиц для их измерения может производиться разными способами. Здесь, конечно, многое зависит от удобства, традиций и существующих стандартов и соглашений.

В механике с одинаковым успехом можно пользоваться и системой СИ, и системой СГС. Общее у этих систем то, что основными величинами являются масса, длина и время. Иногда говорят, что эти системы принадлежат к классу MLT. Размерностью силы в этом классе можно считать выражение MLT^{-2}, размерностью энергии ML^2T^{-2} и т.д. Заменяя в этих выражениях M на кг или г, L на м или см, T на с, мы получим размерности силы и энергии в системах СИ или СГС соответственно.

Для нас очень важно отметить, что пользоваться методом размерностей можно в любой системе единиц. Каждый раз, конечно, выражения для размерностей различных величин нужно писать в одной, заранее выбранной системе.

Предположим, что в какой-то задаче мы отыскиваем функциональную связь между N величинами. Предполагая степенную зависимость одной из величин от других и выписывая размерности этих величин, мы можем пытаться построить интересующую нас формулу. Если все размерности выражаются через размерности K основных величин, и если при этом $N - K = 1$, мы можем утверждать, что искомая формула единственно возможная. Это правило можно проиллюстрировать уже рассмотренным выше примером с колебаниями шарика на струне. Для этого случая у нас было четыре параметра:

ω, T, M и a; размерности всех этих величин выражались через размерности трех основных величин – кг, м, с. Другими словами: $N = 4$, $K = 3$ и $N - K = 1$. То, что формула $\omega \sim T^{1/2} M^{-1/2} a^{-1/2}$ единственно возможная, следует из того, что система уравнений для определения показателей степеней x, y и z имела единственное решение.

Рассмотрим теперь еще одну очень поучительную задачу о колебаниях сферической капли. Простое решение этой задачи с помощью соображений размерности обсуждалось лордом Релеем еще в 1915 году. К этой задаче сводится, по существу, и вопрос о колебаниях атомных ядер, которые можно считать каплями ядерного вещества. Здесь же мы обсудим сначала простейшую ситуацию.

Пусть из круглого отверстия вытекает сферическая капля. Довольно естественно считать, что в равновесии капля должна иметь сферическую форму. Поверхностная энергия имеет при этом минимум, а всякая система стремится попасть в состояние с минимальной энергией. Даже очень малые деформации капли приведут к тому, что силы поверхностного натяжения “заставят” ее пульсировать с некоторой частотой. Под пульсациями мы должны понимать сейчас периодические изменения формы капли. Мы отвлекаемся сейчас от вопроса о том, сколь быстро затухают подобные колебания. Нас интересует вопрос о частоте (или периоде) процесса. Эта частота может зависеть, очевидно, от величины поверхностного натяжения σ, плотности жидкости ρ и радиуса капли a. Запишем формулу:

$$\omega \sim \sigma^x \rho^y a^z$$

и попробуем найти числа x, y, z. Заметьте, кстати, что под σ можно понимать и плотность поверхностной энергии с размерностью ($\text{Дж}/\text{м}^2$), и силу, отнесенную к единице длины (Н/м).Выпишем размерности всех параметров в системе СИ:

$$[\omega] = \text{с}^{-1},\ [\sigma] = \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}, [\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3},\ [a] = \text{м}\,.$$

Уравнения для определения x, y, z получатся из соотношения

$$\text{с}^{-1} = \text{кг}^x\, \text{с}^{-2x} \text{кг}^y\, \text{м}^{-3y}\, \text{м}^z\,.$$

Для трех неизвестных чисел есть три уравнения:

$$-1 = 2x;\ (x+y) = 0;\ -3y + z = 0\,.$$

Эта система уравнений имеет единственное решение:

$$x = 1/2;\quad y = -1/2;\quad z = -3/2,$$

что опять находится в полном соответствии с правилом $N - K = 1$. Окончательно, интересующая нас формула для частоты колебаний запишется так:

$$\omega \sim \left(\frac{\sigma}{\rho a^3}\right)^{1/2}.$$

Эта формула подсказывает нам сразу же и принципиально возможный способ экспериментального определения величины σ. Для этого нужно знать плотность жидкости ρ, радиус капли a и определить на опыте частоту ω. То, что мы не знаем численного коэффициента в этой формуле, не должно быть серьезным препятствием. Мы можем, например, проделать опыт еще раз с жидкостью, для которой величина поверхностного натяжения известна. Из такого дополнительного опыта определится уже и численный коэффициент. После этого можно вычислять численные значения σ для интересующей нас жидкости.

По существу мы сталкиваемся сейчас с простым случаем моделирования – колебания капли исследуемой жидкости можно промоделировать колебаниями капли жидкости с известными σ и ρ. В таких случаях говорят еще и о подобии физических явлений (в данном случае – колебаний формы капель) в двух разных жидкостях.

И еще одно любопытное замечание. Перепишем формулу для частоты колебаний так: $(\sigma/\rho) \sim a^3\omega^2$. Учтем теперь, что частота обратно пропорциональна периоду колебаний. Параметры σ и ρ характеризуют жидкость и потому одинаковы для любых капель этой жидкости. Пусть T – период колебаний капельки, тогда $T^2 = \mathrm{const}\cdot a^3$.Это важное утверждение. Если взять две капельки из одной жидкости, но разных радиусов, отношение квадратов периодов их колебаний будет равно отношению кубов их размеров! Как тут не вспомнить закон Кеплера для движения планет вокруг Солнца! Там, правда, нужно говорить не о радиусах шаров-планет, а о радиусах их орбит. Подумайте сами – нельзя ли извлечь что-нибудь полезное из этой аналогии?

4. А если $N-K>1$?

Уже при выписывании системы параметров, связь между которыми мы хотим отыскать, нужно отдавать себе отчет в том, что существенно и что несущественно для конкретного физического явления. Если речь идет о динамике (например, колебаниях), то в числе параметров должны быть силовая и массовая характеристики. Роль первой из них в предыдущем примере играла величина σ, роль второй – плотность жидкости ρ.

По существу мы считали выше, что колебания капли определяются поверхностным натяжением. Полученное нами решение безусловно годится, если капля колеблется в кабине космического корабля. А годится ли оно вблизи поверхности Земли? Не должны ли мы учесть еще и земное тяготение, другими словами – вес капли?

Предположим, что мы захотели это сделать. Поступим сначала формально и запишем:

$$\omega \sim \sigma^x \rho^y a^z g^t,$$

g – здесь ускорение свободного падения, x, y, z и t – снова неизвестные числа. Выписывая размерности всех величин, приходим к соотношению:

$$c^{-1} = \text{кг}^x\,\text{с}^{-2x}\,\text{кг}^y\,\text{м}^{-3y}\,\text{м}^z\,\text{м}^t\,\text{с}^{-2t}.$$

Однако теперь уже число параметров $N=5$, а число основных величин, через размерности которых выражаются размерности всех параметров, $K=3$ и $N-K=2$! Система же уравнений для определения x, y, z и t – неопределенная:

$$-1=-2x-2t; \quad x+y=0; \; -3y+z+t=0$$

(всего три уравнения, а неизвестных – четыре). Решение такой системы уже не единственное, и возникает вопрос – как же нам теперь поступить? Было бы досадно, если бы мы не смогли выпутаться из этого затруднения.

Попробуем рассуждать так. Зафиксируем пока число x, то есть оставим его неопределенным (безразмерным!) параметром. Остальные неизвестные выразим через него:

$$y=-x;\ z=-2x-1/2;\ t=\frac{1}{2}-x\,.$$

Тогда

$$\omega\sim\left(\frac{g}{a}\right)^{1/2}\left(\frac{\sigma}{\rho a^2 g}\right)^x.$$

Метод размерностей нам больше ничего сейчас не даст, и нужно привлечь дополнительные соображения. Ограничимся случаем малых капель. Вес капли $\sim\rho a^3 g$, а силы поверхностного натяжения $\sim\sigma a$. Ясно, что для достаточно малых a силы поверхностного натяжения больше веса. Опуская численные множители, напишем неравенство: $\sigma a\gg\rho a^3 g$ для малых a. Это неравенство эквивалентно такому:

$$a\ll\left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{1/2}.$$

Именно для таких капель вес не должен быть определяющим колебания параметром. Но тогда и ускорение g не должно входить в формулу для ω. Поэтому $x=1/2$ [1].

Мы вернулись, таким образом, к формуле, полученной раньше. Остается, возможно, все же некоторая неудовлетворенность тем, что нам пришлось прибегнуть к дополнительным аргументам и ограничиться частным случаем достаточно малых капелек. Про колебания капель (или больших шаров), когда нужно учитывать гравитацию, речь еще пойдет в дальнейшем. Пока же стоит подчеркнуть, что метод размерностей вовсе не есть универсальный инструмент для получения формул в физике. Он “многое мо-

[1] Написанные неравенства верны, разумеется, с точностью “по порядку величины”. Неучтенные численные коэффициенты в этой задаче также порядка единицы.

жет” и сам по себе, но не так уж редки и такие задачи, когда его разумно комбинировать тем или иным способом с другими идеями и методами.

5. Метры вдоль и поперек

В некоторых случаях удобно различать продольные и поперечные размеры тел и вводить различные единицы для измерения длин в разных направлениях. Этот прием позволяет увеличить число основных величин и часто оказывается полезным. Попробуем, например, оценить с помощью метода размерностей длину свободного пробега молекул в газе. Молекулы имеют конечные размеры и могут сталкиваться друг с другом даже в достаточно разреженных газах. Среднее расстояние, пробегаемое молекулами между двумя последовательными соударениями, мы и называем длиной свободного пробега. Обозначим ее буквой l, размер (радиус или диаметр) молекулы буквой a, а плотность молекул в газе буквой n. Мы условно считаем молекулы шариками, а под плотностью здесь понимаем число частиц в единичном объеме.

Размерность n есть, очевидно, M^{-3}, размерности l и $a - M$. Основная величина в данном случае одна – длина, параметров, связь между которыми мы хотим найти, три: l, a и n. Разность $N - K = 2$. С точки зрения размерностей нас устраивают в качестве “допустимых” любые комбинации вида:

$$l \sim a;\ l \sim n^{-1/3};\ l \sim \left(na^2\right)^{-1};\ l \sim a^3 n^{2/3},\ \ldots$$

Какую же из них выбрать? Неужели метод размерностей не поможет нам найти правильную формулу? Это было бы тем более обидным, что задача – то ведь совсем простая, а метод размерностей “работает”, как мы знаем, и в более сложных случаях. Вот здесь-то и помогает упомянутый в начале этого раздела прием.

Условимся следить за какой-нибудь одной молекулой. “Привяжем” к ней систему прямоугольных координат, причем одну из осей направим вдоль траектории. Здесь мы должны иметь ввиду, что в первом приближении между двумя последовательными столкновениями молекула летит по прямой линии. Длину пробега естественно измерять в “продольных” метрах – $\text{м}_{\parallel}$. Поперечные размеры молекул, “мешающих” движению нашей “избранницы”, будем измерять соответственно в “поперечных” метрах – $\text{м}_{\perp}$. А как быть с плотностью? Какие метры выбрать здесь? Считая, что поперечные по отношению к траектории молекулы направления эквивалентны, мы легко сообразим, что объем произвольного в том числе и единичного, кубика, построенного на наших координатных осях, естественно измерять в $м_{||}м_{\perp}^{2}$. Но тогда размерностью числа частиц в единичном объеме (n) будет $м_{||}^{-1}м_{\perp}^{-2}$, а размерностью поперечных сечений молекул, "мешающих" интересующему нас движению $\left[a_{\perp}^{2}\right]=м_{\perp}^{2}$.

После всех этих ухищрений мы из множества выписанных выше "возможных" зависимостей l от n и a совершенно однозначно выбираем единственную формулу: $l \sim n^{-1}a^{-2}$. "Расслоив" метры на "параллельные" и "перпендикулярные", мы увеличили тем самым число основных величин, их стало две, и теперь разность $(N-K)$ снова равна единице.

Введенные нами единицы носят название направленных, или векторных, единиц длины. Чтобы получше освоиться с ними, вернемся к уже обсуждавшейся выше задаче о колебаниях капельки. Предположим снова, что частота колебаний может быть связана с величиной поверхностного натяжения σ, плотностью ρ, размером капли a и ускорением свободного падения g. Выпишем размерности основных величин: кг, с, $м_{||}$, $м_{\perp}$. В задаче есть выделенное направление, оно задается вектором $\vec{g}$, мы вольны назвать его "продольным", тогда $[g]=м_{||}\,с^{-2}$. Объем капли будет измеряться в единицах $м_{||}^{1/3}м_{\perp}^{2/3}$, размерность радиуса капли a при этом $м_{||}^{1/3}м_{\perp}^{2/3}$. Размерность же плотности ρ равна $кг \cdot м_{||}^{-1}м_{\perp}^{-2}$. Нетрудно понять, что размерность σ есть $\dfrac{кг \cdot м_{||}}{с^{2}м_{||}}=\dfrac{кг}{с^{2}}$. То, что вычисляя размерность σ мы используем именно "продольные" метры $м_{||}$, становится понятным, если вспомнить как определяется поверхностное натяжение. Проще всего, видимо, рассмотреть мыльную пленку, натянутую на проволочную рамку. Пленка сопротивляется растяжению в том направлении, в котором ее тянут. Ускорения мы уже договорились измерять в $м_{||}с^{-2}$,значит размерность силы $кг \cdot м_{||}с^{-2}$. Формула $\omega \sim \sigma^{x}\rho^{y}a^{z}g^{t}$ приводит теперь к равенству:

$$с^{-1}=кг^{x}\,с^{-2x}\,кг^{y}\,м_{||}^{-y}\,м_{\perp}^{-2y}\,м_{||}^{z/3}\,м_{\perp}^{2z/3}\,м_{||}^{t}\,с^{-2t}.$$

Правило $N-K=1$ выполняется: $N=5$; $k=4$. Система линейных уравнений для определения x, y, z и t такова:

$$-1=-2x-2t;\ 0=x+y;\ 0=-y+\frac{z}{3}+t;\ 0=-2y+\frac{2z}{3}.$$

Единственное решение этой системы:

$$x=1/2;\ y=-1/2;\ z=-3/2;\ t=0.$$

Формула для частоты колебаний капли, конечно, прежняя:

$$\omega\sim\left(\sigma/\rho a^3\right)^{1/2}.$$

То, что из формулы "выпало" ускорение g, означает, что наше первоначальное предположение о возможности зависимости ω от g оказалось несправедливым. Метод размерностей позволяет, таким образом, исключать лишние параметры. Но мы как будто бы не использовали сейчас предположение о малости капель? А раньше мы говорил о том, что полученная формула для ω годится только для достаточно малых капелек. И критерием малости было неравенство $\sigma a \gg \rho a^3 g$. Перепишем его в виде $\left(\frac{a}{g}\right)^{1/2} > \left(\frac{\rho a^3}{\sigma}\right)^{1/2}$ и заметим, что слева стоит время падения капли на расстояние порядка ее размеров, а справа – период колебаний ($\sim\omega^{-1}$). Это последнее неравенство означает, что колебания, обусловленные силами поверхностного натяжения, можно рассматривать на фоне относительно медленного падения капли. Разница характерного времени падения (на расстояние $\sim a$) и периода колебаний позволяет разделить эти два процесса и рассматривать их независимо. Поэтому для нашего примера период колебаний и на самом деле не зависит от g.

Сделаем еще несколько замечаний о векторных единицах длины. Во-первых, существуют задачи, в которых целесообразно вводить не только "продольные" и "поперечные" размеры, но и, скажем, скорости или ускорения с разными размерностями. Могут встречаться, конечно, и разные силы (одни измеряемые в $\text{кг}\cdot\text{м}_{\parallel}\text{с}^{-2}$, другие в $\text{кг}\cdot\text{м}_{\perp}\text{с}^{-2}$). Во-вторых, возможно естественное обобщение обсуждавшейся нами идеи о введении "своих единиц" для измерения продольных и поперечных размеров. В случае необходимости в какой-то конкретной задаче мы могли бы ввести и “свои метры” для каждого из трех взаимно-перпендикулярных направлений в пространстве. Число основных единиц можно таким образом увеличить сразу на две. Третье замечание такое. Бывает так, что две существенно различные физические величины имеют в какой-то системе единиц одинаковые размерности. В системе СИ, например, такими величинами являются момент силы L и работа A. Обе величины имеют размерности $\text{кг}\cdot\text{м}^2\text{с}^{-2}$. “Обычный” метод размерностей не может эти величины различить. Но если мы снова применим нашу “маленькую хитрость”, введя единицы длины вдоль траектории движения и перпендикулярно к ней, L и A сразу станут различаться. Для вычисления работы мы всегда проектируем силу на направление движения. В определении момента силы существенны “перпендикулярные” единицы длины. Другими словами, момент есть векторное, а работа скалярное произведение: $\vec{L}=\vec{F}\times\vec{r}$, $A=\vec{F}\vec{r}$, $\vec{F}$ – сила, $\vec{r}$ – радиус-вектор. Ясно еще, что размерность самой силы $\vec{F}$ содержит “продольные” метры. Итак, L имеет размерность $\text{кг}\cdot\text{м}_{\parallel}\cdot\text{м}_{\perp}\text{с}^{-2}$, а A – размерность $\text{кг}\cdot\text{м}_{\parallel}^2\text{с}^{-2}$.

6. Явления переноса

Вводя “продольные” и “поперечные” единицы длины, мы значительно расширяем класс задач, которые можно рассматривать с помощью метода размерностей. Сплошь и рядом в нашем неравновесном (а потому и таком живом) мире наблюдается стремление к локальному равновесию: тепло “течет” от горячего тела к холодному; капелька чернил попавшая в банку воды, стремится равномерно распределиться по объему банки; в результате движения электрических зарядов выравниваются потенциалы и т.д. Во всех таких случаях мы имеем дело с явлениями переноса – в единицу времени (с) через единицу площади (м^2) переносится определенное количество некоторой физической величины: тепловой энергии (Дж), массы (кг), электрического заряда (Кл), импульса ($\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$), ... Это количество называется потоком соответствующей величины – энергии, массы, заряда, импульса, ...

Мы будем обозначать поток какой-либо величины буквой q, снабжая ее индексом, показывающим какая именно величина переносится. Обсудим вопрос о размерностях потоков в системе СИ. Начнем с потока массы q_m. Размерность этой величины очевидна $\text{кг}\cdot\text{м}_{\perp}^2\text{с}^{-1}$. Аналогично для потока заряда q_e можно записать размерность

$\text{Кл}\cdot\text{м}_{\perp}^{-2}\text{с}^{-1}$. В обоих случаях мы употребляем “перпендикулярные” метры, подчеркивая тем самым, что перенос происходит через площадку, перпендикулярную направлению переноса. Размерность потока заряда можно записать учитывая, что $1\ \text{Кл} = 1\ \text{А}\cdot 1\ \text{с}$. Понятно теперь, что q_e имеет смысл плотности тока. Эта же самая величина может быть определена как произведение суммарного электрического заряда в единице объема на скорость приобретаемую заряженными частицами под действием электрического поля.

Размерность импульса есть, очевидно, $\text{кг}\cdot\text{м}_{\|}\text{с}^{-1}$, а размерность энергии $\text{кг}\cdot\text{м}_{\|}^{2}\text{с}^{-2}$. Соответствующие потоки имеют поэтому размерности:

$$q_p = \text{кг}\cdot\text{м}_{\|}\text{с}^{-1}\text{м}_{\perp}^{-2}\text{с}^{-1} = \text{кг}\cdot\text{м}_{\|}\text{м}_{\perp}^{-2}\text{с}^{-2},$$

$$[q_{\text{т}}] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}_{\perp}^{2}\text{с}} = \text{кг}\cdot\text{м}_{\|}^{2}\text{с}^{-2}\text{м}_{\perp}^{-2}\text{с}^{-1} = \text{кг}\cdot\text{м}_{\|}^{2}\text{м}_{\perp}^{-2}\text{с}^{-3},$$

индекс “т” обозначает здесь энергию (тепло).

Потоки являются всегда следствием какой-то неравновесности в системе. Пусть, например, между точками 1 и 2 в проводящей среде возникла разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$. Если расстояние между точками равно $l_{\|}$ (измеряем его в $\text{м}_{\|}$), то поток заряда q_e пропорционален $(\varphi_2 - \varphi_1)/l_{\|}$. Обозначим коэффициент пропорциональности буквой σ и запишем равенство

$$q_e = \sigma\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l_{\|}}.$$

Легко видеть, что это есть просто закон Ома – слева стоит плотность тока, а справа произведение σ на напряженность электрического поля. Параметр σ называется коэффициентом электропроводности. Нетрудно выписать и его размерность, если учесть, что размерность электрического потенциала (или разности потенциалов) есть

$$\text{Вольт} = \frac{\text{Ватт}}{\text{Ампер}} = \frac{\text{Дж}}{\text{сА}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}_{\|}^{2}\text{с}^{-2}}{\text{с}\cdot\text{А}} = \text{кг}\cdot\text{м}_{\|}^{2}\text{с}^{-3}\text{А}^{-1}.$$

Коэффициент σ будет измеряться в таких единицах:

$$\frac{\text{Кл}\cdot\text{м}_{\|}}{\text{м}_{\perp}^{2}\,\text{с}\,\text{В}}=\text{м}_{\|}^{-1}\text{м}_{\perp}^{-2}\text{кг}^{-1}\text{с}^{3}\text{А}^{2}.$$

Это же можно записать еще и так:

$$[\sigma]=\frac{\text{Кл}\cdot\text{м}_{\|}}{\text{м}_{\perp}^{2}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}=\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{м}_{\|}}{\text{м}_{\perp}^{2}\,\text{с}\,\text{В}}=\frac{\text{м}_{\|}}{\text{Ом}\cdot\text{м}_{\perp}^{2}}.$$

Если же не делать различия между $\text{м}_{\|}$ и $\text{м}_{\perp}$, то в системе СИ: $[\sigma]=\text{А}^{2}\text{с}^{3}\text{кг}^{-1}\text{м}^{-3}$. Условием для существования потока массы является, очевидно, разность плотностей ρ_1 и ρ_2 в точках 1 и 2, находящихся на расстоянии $l_{\|}$ (опять измеряем это расстояние в "продольных" метрах). Записывая равенство

$$q_m=D\frac{\rho_2-\rho_1}{l_{\|}},$$

мы, точно также, как и для σ, можем определить размерность параметра *D*, он называется коэффициентом диффузии. Размерность плотности ρ есть $\text{кг}\cdot\text{м}_{\|}^{-1}\text{м}_{\perp}^{-2}$, поэтому

$$[D]=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}_{\|}^{2}\text{м}_{\perp}^{2}}{\text{м}_{\perp}^{2}\text{с}\,\text{кг}}=\text{м}_{\|}^{2}\text{с}^{-1}.$$

Обратите внимание на то, что в размерность коэффициента диффузии не входит "кг", хотя этот коэффициент и введен нами "через поток массы". Диффузия частиц, описываемая коэффициентом D, связана, конечно, с переносом не только массы, одновременно "переносятся" и другие величины, характеризующие частицы.

Обсудим теперь вопрос о переносе тепловой энергии и импульса. Причиной теплопереноса является разность температур T_2-T_1 в точках 1 и 2, которые, как и выше, разделены расстоянием $l_{\|}$. Поток тепла

$$q_T=\lambda\frac{T_2-T_1}{l_{\|}}.$$

Коэффициент теплопроводности λ, по определению, есть коэффициент пропорциональности между q_T и изменением температуры на единице длины в направлении от точки 2 к точке 1. Размерность λ вычисляется по аналогии с тем, как это делалось выше:

$$[\lambda] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}_{\|}^{2} \text{м}_{\perp}^{-2} \text{с}^{-3}}{\text{К} \cdot \text{м}_{\|}^{-1}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}_{\|}^{3}}{\text{м}_{\perp}^{2} \text{с}^{3} \text{К}}.$$

В знаменателе здесь появилась единица измерения температуры – Кельвин.

Последний коэффициент, который мы сейчас определим, это коэффициент вязкости. Представим себе два параллельно движущихся и трущихся друг о друга слоя жидкости или газа, пусть их скорости u_1 и u_2 измеряются в $\text{м}_{\|}\text{с}^{-1}$. Пусть между этими слоями происходит обмен частицами, например, перпендикулярно направлению скоростей слоев перескакивают молекулы. Тогда эти слои обмениваются импульсом, причем поток импульса также перпендикулярен направлению указанных скоростей. Запишем соответствующее описанной только что схеме равенство:

$$q_p = \mu \frac{u_2 - u_1}{l_{\perp}}.$$

В отличие от аналогичных равенств, для переноса заряда, массы или энергии, в знаменателе правой части формулы сейчас стоит “поперечный” размер. Для коэффициента вязкости легко написать теперь:

$$[\mu] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}_{\|} \cdot \text{м}_{\perp} \text{с}}{\text{с}\, \text{м}_{\perp}^{2} \text{с}\, \text{м}_{\|}} = \text{кг} \cdot \text{м}_{\perp}^{-1} \text{с}^{-1}.$$

Введенные нами величины σ, D, λ и μ часто называют кинетическими коэффициентами или коэффициентами переноса.

7. Обязательно ли вводить новые единицы?

Конкретно мы хотим обсудить сейчас вопрос о том, обязательно ли нужно в “тепловых” задачах вводить единицу измерения температуры – Кельвин, а в задачах, связанных с электрическими явлениями (электрическим током, например) единицу силы тока – Ампер. Эти единицы считаются в системе СИ основными, также как единицы массы (кг), длины (м) и времени (с). Отвлечемся, конечно, пока от “продольных” и “поперечных” длин – их нужно вводить только тогда, когда в них действительно есть нужда.

Если мы вводили бы, скажем, коэффициенты D и μ в системе СГС, то получили бы такие соотношения:

$$[D] = \frac{\text{см}^2}{\text{с}}; \ [\mu] = \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}.$$

По сравнению с системой СИ здесь мало что изменяется – мы просто измеряем длину и массу другими масштабами. Но в термодинамике появляется температура. И соответственно, возникает альтернатива либо измерять температуру в энергетических единицах – Джоулях или эргах[2], либо ввести новую единицу – Кельвин , но тогда автоматически появится и новая константа – k – постоянная Больцмана.

Размерности разных величин, так или иначе связанных с переносом тепла, будут, конечно, зависеть от того, как мы договоримся измерять температуру. Чтобы это проиллюстрировать, напишем еще раз равенство

$$q_{\text{т}} = \lambda \frac{T_2 - T_1}{l}.$$

Предположим, что мы не вводим новых единиц для измерения температуры и хотим ограничиться только механическими единицами. Если $[q_{\text{т}}] = \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$; $[T_2 - T_1] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \text{с}^{-2}$; $[l] = \text{м}$, то $[\lambda] = \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2 \text{м}}{\text{с}^3 \text{кг} \cdot \text{м}^2} = \text{м}^{-1}\text{с}^{-1}$. Размерность λ в системе еди-

[2] Такая возможность есть следствие того, что во многих задачах количество тепловой энергии, получаемой или отдаваемой каким-либо телом при нагревании или охлаждении, можно считать пропорциональным соответствующей разности температур.

ниц, где температура измеряется в энергетических единицах, вовсе не похожа на размерность этого же коэффициента в системе СИ! Аналогично обстоит дело и с введением единицы силы тока – Ампера. В системе СИ за включение этой единицы приходится "расплачиваться" появлением в формулах новой размерной постоянной ε_0. Размерность ее проще всего определить из вида закона Кулона.

В вакууме мы записываем закон Кулона так:

$$F = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

где e_1, e_2 – здесь электрические заряды, $[e_1] = [e_2] = \text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с}$, $[F] = \text{Н} = \text{кг} \cdot \text{мс}^{-2}$; $[r] = \text{м}$. Поэтому

$$[\varepsilon_0] = \frac{[e_1][e_2]}{[F]\,[r^2]} = \frac{\text{А}^2\text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}\text{м}^2} = \text{А}^2\text{с}^4\text{кг}^{-1}\text{м}^{-3}.$$

Физики предпочитают все же чаще пользоваться системой СГС. Главная причина этого в том, что на основе СГС – системы разработана очень стройная и симметричная схема вычислений в электродинамике. Мы кратко остановимся сейчас на так называемой гауссовой системе единиц. В этой системе не возникает постоянных типа ε_0, а размерности напряженности электрического и индукции магнитного полей совпадают (в системе СИ это не так!).

Закон Кулона в гауссовой системе записывается в наиболее простом виде: $F = \frac{e_1 e_2}{r^2}$. Для размерности заряда получается выражение:

$$[e] = [F^{1/2} r] = \text{дин}^{1/2} \cdot \text{см} = \text{г}^{1/2}\text{см}^{1/2}\text{с}^{-1}\text{см} = \text{г}^{1/2}\text{см}^{3/2}\text{с}^{-1}.$$

Плотность тока $j = neu$, здесь n – число заряженных частиц в $1\ \text{см}^3$, u – скорость переноса зарядов (ее называют также дрейфовой скоростью). Произведение $e\vec{E}$ – есть сила, действующая на заряд, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля. Все эти определения нам хорошо известны, но мы привели их для того, чтобы вычислить теперь размерность коэффициента электропроводности:

$$[\sigma]=\frac{[j]}{[E]}=\frac{[neu]}{[F]/[e]}=\frac{[ne^2u]}{[F]}=\frac{[ne^2u][r^2]}{[e^2]}=[nur^2]=\frac{1}{\text{см}^3}\frac{\text{см}}{\text{с}}\text{см}^2=\text{с}^{-1}.$$

Итак, в гауссовой системе $[\sigma]=\text{с}^{-1}$, а в системе СИ $[\sigma]=\text{А}^2\text{с}^3\text{кг}^{-1}\text{м}^{-3}$. Сложность последнего выражения не свидетельствует в пользу системы СИ. И теперь мы понимаем, что можно и в электродинамике обойтись тремя основными единицами – см, г, с.

С другой стороны исторически сложилась такая ситуация, что электро- и радиотехнические измерения проводятся с использованием единиц системы СИ. Приборы в физических лабораториях и на заводах отградуированы повсеместно в Амперах, Вольтах, Ваттах и т.п. Ясно поэтому, что надо уметь уверенно пользоваться разными системами единиц.

Еще раз отметим, что введение новых основных единиц может быть связано с появлением и новых размерных постоянных. Про эти константы нельзя забывать, если вы пользуетесь методом размерностей для вывода формул.

8. Кинетические коэффициенты для плазмы

Займемся последовательным вычислением коэффициентов переноса для простейшей модели плазмы- газа заряженных частиц. Прежде всего сделаем несколько замечаний о той модели, которую мы будем рассматривать. Будем считать, что плазму образуют не электроны и ионы, как это чаще всего бывает, а частицы с зарядами $\pm e$ и с одинаковыми массами. Это нам нужно для того, чтобы не учитывать сейчас разницу масс электрона и иона, учет этой разницы усложнил бы наши вычисления, но не изменил бы тех выводов, которые мы в конце сформулируем. Следующая оговорка состоит в том, что мы рассматриваем плазму без магнитного поля. При наличии магнитного поля дело тоже усложняется, вычисление кинетических коэффициентов нужно было бы тогда проводить с учетом параметров, зависящих от магнитного поля. Замечание для знатоков: мы отвлекаемся от “кулоновского логарифма” – множителя возникающего при точном расчете и примерно на порядок меняющего численные значения вычисляемых величин. Этот множитель безразмерный, а мы вообще не заботимся сейчас о таких коэффициентах, из соображений размерностей их получить все равно нельзя.

Вычисление кинетических коэффициентов будем проводить в системе СИ. Цель, которую мы преследуем, состоит в изучении характера зависимости кинетических коэффициентов от температуры. Плазму считаем нерелятивистской (скорости частиц малы по сравнению со скоростью света) и классической (неквантовой).

Сначала вычислим коэффициент диффузии D. Предположим, что он зависит от массы частиц m, их скорости v и заряда e. В число определяющих параметров мы должны включить и размерную постоянную ε_0 речь идет о частицах, взаимодействующих друг с другом по закону Кулона. Запишем:

$$D \sim e^x \varepsilon_0^y v^z m^t .$$

Размерность ε_0 мы получили раньше: $[\varepsilon_0] = \text{А}^2\text{с}^4\text{кг}^{-1}\text{м}^{-3}$. Равенство

$$\text{м}^2\text{с}^{-1} = \text{А}^x\text{с}^x\text{А}^{2y}\text{с}^{4y}\text{кг}^{-y}\text{м}^{-3y}\text{м}^z\text{с}^{-z}\text{кг}^t$$

приводит к системе уравнений:

$$2 = -3y + z; \quad -1 = x + 4y - z;$$
$$0 = x + 2y; \quad 0 = -y + t .$$

Решение этой системы единственно, правило $N - K = 1$ выполнено: $x = 2$; $y = z = t = -1$; значит

$$D \sim \frac{e^2}{\varepsilon_0 v m} .$$

Чтобы явно учесть зависимость D от температуры T, заметим, что $mv^2 \sim kT$, окончательно получаем:

$$D \sim \frac{e^2}{\varepsilon_0 (kT)^{1/2} m^{1/2}} .$$

Повышение температуры ведет, как мы видим, к уменьшению D! Попробуйте сами понять и объяснить причину такого поведения коэффициента диффузии. Мы убедимся дальше, что другие кинетические коэффициенты – λ, μ и σ ведут себя иначе, они растут с ростом температуры.

Вычисление электропроводности σ совершенно аналогично. Записывая $\sigma \sim e^x \varepsilon_0^y v^z m^t$, приходим к равенству

$$\text{А}^2 \text{с}^3 \text{кг}^{-1} \text{м}^{-3} = \text{А}^x \text{с}^x \text{А}^{2y} \text{с}^{4y} \text{кг}^{-y} \text{м}^{-3y} \text{м}^z \text{с}^{-z} \text{кг}^t .$$

Из этого соотношения получается опять четыре уравнения, решение этой системы таково: $x = -2$; $y = 2$; $z = 3$; $t = 1$. Снова учитывая связь скорости частиц и температуры, напишем:

$$\sigma \sim \frac{\varepsilon_0^2 v^3 m}{e^2} = \frac{\varepsilon_0^2 (kT)^{3/2}}{m^{1/2} e^2} .$$

На первый взгляд, не должна отличаться от уже приведенных и схема вычисления λ. Однако равенство

$$\lambda \sim e^x \varepsilon_0^y v^z m^t$$

отличается тем, что теперь правило $N - K = 1$ не выполнено! В самом деле, в выражение размерности λ входит “Кельвин”, поэтому число основных величин равно сейчас числу параметров, связь между которыми мы отыскиваем: $N = K = 5$. Попытаемся, основываясь на уже имеющемся у нас опыте, увеличить на этот раз не число основных единиц, а число параметров, определяющих коэффициент λ. Будем искать функциональную связь между величинами λ, e, ε_0, k, T, m. Мы исключили из набора параметров скорость частиц v, но включили вместо этого температуру T и постоянную

Больцмана k. Это вполне разумная замена, ибо $mv^2 \sim kT$. Но теперь $N = 6$ и $K = 5$, правило $N - K = 1$ снова выполняется. Предположив, что

$$\lambda \sim e^x \varepsilon_0^y k^z T^t m^s$$

придем к уравнению:

$$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^1 = \text{А}^x \text{с}^x \text{А}^{2y} \text{с}^{4y} \text{кг}^{-y} \text{м}^{-3y} \text{кг}^z \text{м}^{2z} \text{с}^{-2z} \text{К}^{-z} \text{К}^t \text{кг}^s .$$

Мы учли, что $[kT] = \text{Дж} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \text{с}^{-2}$. Выпишем систему пяти линейных уравнений:

$$-1 = -y + z + s, \quad 1 = -3y + 2z; \quad -3 = x + 4y - 2z; \quad -1 = -z + t; \quad 0 = x + 2y$$

Решение этой системы: $x = 4$, $y = 2$, $z = 7/2$, $t = 5/2$; $s = -1/2$, а окончательный вид интересующей нас формулы для коэффициента теплопроводности:

$$\lambda \sim \frac{\varepsilon_0^2 (kT)^{5/2} k}{e^4 m^{1/2}} .$$

Получение формулы для вязкости плазмы мы предоставляем читателям. Результат же этого вычисления мы выписываем:

$$\mu = \frac{\varepsilon_0^2 v^5 m^3}{e^4} \sim \frac{m^{1/2} \varepsilon_0^2 (kT)^{5/2}}{e^4} .$$

Нам осталось сказать, что между разными коэффициентами переноса существуют вполне определенные связи. Разделим, например, λ на σ, для такого отношения получится:

$$\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right) \sim \left(\frac{k}{e}\right)^2 T .$$

Это соотношение называется законом Видемана–Франца для плазмы. Отношение же $\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right) \sim \left(\dfrac{k}{m}\right)$ не зависит от температуры вовсе. Заметьте еще, что оно не зависит и от электрических характеристик (e и ε_0) частиц.

Выпишем здесь еще кинетические коэффициенты для нашей модели плазмы в системе единиц СГСК (см–г–с–К):

$$D \sim \frac{e^2}{vm} \sim \frac{e^2}{(mkT)^{1/2}}; \qquad \sigma \sim \frac{v^3 m}{e^2} \sim \frac{m}{e^2}\frac{(kT)^{3/2}}{m^{3/2}};$$

$$\lambda \sim \frac{km^2}{e^4} \cdot \frac{(kT)^{5/2}}{m^{5/2}}; \qquad \mu \sim \frac{m^3 v^5}{e^4} \sim \frac{(mkT)^{5/2}}{m^2 e^4}.$$

В этой системе единиц формулы не содержат ε_0, но в них входит k. Проверку этих соотношений мы предоставляем читателям. Зависимости кинетических коэффициентов от температуры будут точно такими же и для более реалистичной – электронно-ионной плазмы. Мы не будем обсуждать сейчас этот вопрос подробнее.

9. Гравитационная постоянная и скорость света

Продолжим теперь обсуждение вопроса о том, в каких случаях следует ожидать появления в формулах размерных постоянных. В этом разделе речь пойдет о гравитационной постоянной γ и скорости света c.

Естественно, что γ появляется в задачах, описывающих гравитационное взаимодействие, а c задачах, где речь идет о движении частиц со скоростями близкими к скорости света. Присутствует скорость c и в задачах, относящихся к распространению света или электромагнитного излучения- такое излучение есть просто поток фотонов, а они всегда движутся, конечно, со скоростью c.

Пример, который мы сейчас рассмотрим, требует одновременного включения в число определяющих параметров обоих констант – γ и c. Сейчас хорошо известно, что луч света, идущий из далекой галактики и проходящий вблизи края солнечного диска, отклоняется на малый угол $\varphi_0 \approx 2 \cdot 10^{-6}$ радиана. Известны нам масса Солнца $M_С \simeq 2 \cdot 10^{30}$ кг и его радиус $R_С \simeq 7 \cdot 10^5$ км. Гравитационное поле Солнца служит причиной отклонения светового луча, само же это поле определяется параметрами γ, M_C и R_C. Было бы интересно попытаться получить формулу, связывающую угол φ_C с параметрами γ, M_C, R_C и c. Никаких других параметров в нашей задаче нет. Говоря, что луч света проходит вблизи звезды, мы пренебрегаем, конечно, разницей между радиусом звезды и расстоянием от ее центра до ближайшей точки луча. Запишем, как обычно, формулу:

$$\varphi_C \sim M_C^x R_C^y \gamma^z c^t .$$

Размерность гравитационной постоянной проще всего получить из закона всемирного тяготения:

$$[\gamma] = \frac{[Fr^2]}{[m^2]} = \text{Н} \cdot \text{м}^2\text{кг}^{-2} = \text{кг}^{-1}\text{м}^3\text{с}^{-2} .$$

Угол же φ_C – величина безразмерная, поэтому мы получим три таких уравнения:

$$x - z = 0; \quad y + 3z + t = 0; \quad -2z - t = 0 .$$

Неизвестных же чисел у нас – четыре, правило $N - K = 1$ не выполнено. Но с подобной ситуацией мы уже сталкивались и знаем, что теперь нужна какая-то дополнительная информация. Зафиксируем число x, тогда: $y = -x$, $z = x$, $t = -2x$. Интересующая нас формула может быть представлена в таком виде:

$$\varphi_C \sim \left(\frac{\gamma M_C}{R_C c^2}\right)^x .$$

Для определения числа x мы можем использовать теперь известное из наблюдений и приведенное выше численное значение φ_C. Учитывая, что $\gamma \simeq 6,7 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$, а скорость $c \simeq 3 \cdot 10^8 \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$, мы легко проверим, что написанная формула правильна при $x \simeq 1$.

Соображения подобия позволяют, по-видимому, считать, что угол отклонения светового луча в гравитационном поле любой звезды с массой M и радиусом R определяется аналогичным образом и равен

$$\varphi \sim \frac{\gamma M}{Rc^2}.$$

В этих рассуждениях появилось два новых для нас момента. Во-первых, мы не можем утверждать только на основании сказанного выше, что $x=1$. Формулы мы пишем только по порядку величины и, казалось бы, ничто не мешает нам считать, что $x=0.99$ или 1.02. Уверенность в том, что $x=1$ основана не на приведенных формальных вычислениях, да и к тому же с неизвестным численным коэффициентом и с приближенными значениями всех параметров, а на опыте и соображениях уже не размерности, а разумности. Опыт говорит нам, что показатели степеней в формулах бывают обычно целыми числами или простыми дробями. В то же время не видно каких-либо оснований для того, чтобы считать, например, $x=8/9$ или $x=19/21$. Разумность и наше желание видеть формулы возможно более изящными играют вовсе не последнюю роль в физике! Нельзя, конечно, целиком отдаваться эмоциям, но ничего другого без точного решения обсуждаемой задачи мы сказать все равно не смогли бы. Точное же решение на самом деле приводит к $x=1$.

Второе обстоятельство, которое мы хотим отметить, заключается в том, что безразмерная комбинация параметров M, R, γ и c приводит для большого числа звезд к значению $\varphi \ll 1$. Обратите внимание на то, что φ сейчас вовсе не является безразмерным постоянным коэффициентом, это функция других параметров, функция безразмерная, но вовсе не обязанная быть универсальной константой! Неопределяемая же из соображений размерности константа в правой части формулы $\varphi \sim \left(\gamma M / Rc^2\right)$, конечно, тоже есть, и вот она-то порядка единицы.

Малость значения функции φ для нашего Солнца вовсе не означает что эта функция всегда мала. Пользуясь полученной для нее формулой, можно оценить отклонение луча света, проходящего и вблизи нейтронных звезд. Так называют звезды, плотность которых примерно такая же, как плотность вещества внутри атомных ядер. Позже мы еще вернемся к таким сверхплотным сгусткам вещества. Сейчас же для нас достаточно сказать, что их массы по порядку величины совпадают с массой нашего Солнца, а радиусы составляют всего лишь десятки километров. Гравитационное поле нейтронных звезд намного “сильнее” поля Солнца, неудивительно, что типичное значение угла φ для них достигает уже десятых долей радиана! Читатель легко проверит это сейчас сам.

10. Три фундаментальные константы

Фундаментальными (или мировыми) константами часто называют гравитационную постоянную γ, скорость света c и постоянную Планка $\hbar$, входящую в формулы, описывающие квантовые явления.

Наш читатель уже знает, вероятно, что излучаемая (или поглощаемая) атомами энергия квантуется. В простейшей квантовой модели атом рассматривается по аналогии с планетной системой. Электроны вращаются вокруг ядра по орбитам вполне определенных радиусов, переход же электрона с одной орбиты на другую должен сопровождаться излучением (или поглощением) кванта энергии величиной $\hbar\omega$. Здесь ω – частота излучения, определяемая разностью энергий электрона на соответствующих орбитах. Отсюда ясно, что размерность $\hbar$ в системе СИ определяется так: $[\hbar] = \text{Дж} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м}^2\text{с}^{-1}$, а в системе СГС:

$$[\hbar] = \text{эрг} \cdot \text{с} = \text{г}\,\text{см}^2\text{с}^{-1}.$$

Теперь мы можем обсудить, например, вопрос об излучении энергии нагретым телом. Такое тело излучает обычно энергию в разных диапазонах. Потоки тепла, света и рентгеновского излучения можно рассматривать, конечно, как потоки квантов соответствующих частот.

Пусть температура излучающей поверхности равна T. Обозначим буквой q – количество энергии, излучаемой с единицы поверхности за единицу времени. Эта величина имеет смысл потока энергии, ее размерность в системе СИ $[q] = \dfrac{\text{Дж}}{\text{м}^2\text{с}} = \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$. Кванты электромагнитного излучения движутся со скоростью c.Отвечающая температуре T характерная энергия есть, очевидно, kT. И естественно предположить, что функционально могут быть связаны четыре величины: q, (kT), c и $\hbar$. Из соображений размерности тогда мы легко получим формулу:

$$q \sim (kT)^4 c^{-2} \hbar^{-3}.$$

Часто этот закон записывают в виде

$$q = \sigma T^4$$

и называют законом Стефана–Больцмана. Коэффициент σ называется соответственно постоянной Стефана–Больцмана. Ясно, что в системе СИ

$$\sigma \sim k^4 c^{-2} \hbar^{-3}; \quad [\sigma] = \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \text{К}^{-4}.$$

Приведем еще для полноты численные значения констант, входящих в написанные формулы:

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 1{,}38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{К}},$$
$$\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\, \text{кг} \cdot \text{м}^2 \text{с}^{-1} = 1{,}05 \cdot 10^{-27}\, \text{г} \cdot \text{см}^2 \text{с}^{-1}.$$

Таким образом, мы познакомились уже с несколькими размерными константами. Формулы для q и σ содержат две фундаментальные константы c и $\hbar$. Это есть прямое указание на то, что строгое решение задачи об излучении нужно строить на основе квантовой и одновременно релятивистской теории. Постоянная Стефана Больцмана, вычисляемая в такой теории, равна

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2} \simeq 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{кг}}{\text{с}^3 \text{К}^4} = 5{,}67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{г}}{\text{с}^3 \text{К}^4}.$$

Заметьте, кстати, что численный коэффициент $\left(\pi^2/60\right)$ в последней формуле тоже можно считать при грубых оценках числом порядка единицы.

Вполне естественно, что существуют и такие физические процессы и явления, когда существенны квантовые эффекты и несущественны релятивистские. Примером такой ситуации могут быть электронные процессы в металлах. Мы увидим позже, что электронные скорости в атомах и твердых телах малы по сравнению со скоростью света, и поэтому c не входит в формулы, описывающие, скажем, кинетические явления в твердом теле.[3]

Зададим себе теперь такой вопрос. В каком случае в формулах могут содержаться все три фундаментальные константы?

Очевидно, что для этого существенными должны быть одновременно гравитация, релятивизм и квантование. Любопытно, что из γ, c и $\hbar$ можно сконструировать величины с размерностями массы, длины и времени. Из соображений размерности такие соотношения строятся сразу же и однозначно и имеют вид:

$$m_p \sim \left(\frac{\hbar c}{\gamma}\right)^{1/2}; \; l_p \sim \left(\frac{\gamma\hbar}{c^3}\right)^{1/2}; \; t_p \sim \left(\frac{\gamma\hbar}{c^5}\right)^{1/2}.$$

Если принять неопределенные численные коэффициенты в этих формулах равными единице, то мы получаем "естественные" масштабы для измерения масс, длин и времени. Эти масштабы впервые ввел М.Планк и они называются планковскими единицами. Выбор их естественен в том смысле, что нам его подсказывает сама Природа. При таком выборе единиц уже нет того произвола и случайности, которые характерны для выбора килограмма, метра и секунды. Говоря же о связи планковских единиц со "случайными", но привычными нам единицами систем СИ или СГС, мы должны, конечно, признать, что пользоваться первыми было бы не очень удобным. Нетрудно проверить, что численно $m_p \sim 2\cdot 10^{-8}$ кг, $l_p \sim 2\cdot 10^{-35}$ м и $t_p \sim 5\cdot 10^{-44}$ с. Для практических задач, возникающих в повседневной жизни, это слишком малые масштабы.

Современная физическая теория не может пренебрегать, однако, и такими масштабами. В космологии – науке, описывающей эволюцию Вселенной, Планковский период играет очень важную роль, именно планковские масштабы определяют самую раннюю историю нашего Мира. Строгой теории физических процессов происходящих на начальных стадиях жизни Вселенной, пока еще не существует. Никаких экспериментов со Вселенной (кроме, быть может, мысленных) мы проводить тоже не можем. Но уже сама возможность построения планковских единиц подсказывает нам, что будущая теория ранней Вселенной должна быть во всяком случае квантовой гравитационной

---

[3] Подчеркнем, что сейчас не имеются ввиду кинетические эффекты в магнитном поле или при наличии в среде излучения.

теорией. Чтобы лишний раз проиллюстрировать сколь непросто построить такую теорию, вычислим еще планковские единицы плотности и температуры:

$$\rho_p \sim \frac{m_p}{l_p^3} \sim \frac{c^5}{\gamma^2 \hbar} \simeq 5 \cdot 10^{96}\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$T_p \sim \frac{1}{k}\left(\frac{\hbar c^5}{\gamma}\right)^{1/2} \simeq 10^{32}\ \text{К}.$$

Вероятно эти грандиозные численные значения должны заставить читателя окончательно поверить в то, что свойства вещества или излучения, характеризующиеся такими параметрами, не могут быть простыми и, скорее всего, вовсе непохожи на все то, к чему мы привыкли.

11. Давление электронного газа в металле

Формулы, которые мы намереваемся получить сейчас, содержат только одну фундаментальную константу. Попытаемся понять какими параметрами должно определяться давление газа электронов.

Металл, как мы знаем, состоит из ионов, “сидящих” в узлах кристаллической решетки, и электронов, “гуляющих” между ионами. В каком-то смысле такая система напоминает рассматривавшуюся нами раньше модель плазмы, но есть и очень существенное отличие. Для частиц классической плазмы, как и для обычного молекулярного газа, мы можем пользоваться известными формулами кинетической теории:

$$P = nkT\,; \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT\,.$$

Здесь p – давление, n – число частиц в единице объема, m – масса частиц, v – их скорость. Квантовые эффекты в написанных формулах разумеется, не учтены. Для металла же такие формулы уже совершенно не годятся, электронный газ в металле – объект существенно квантовый. Заметим, что при $T \to 0$ из классических формул следует, что $p \to 0$ и $v \to 0$. Для электронов в металлах скорость и давление вовсе не стремятся к нулю с уменьшением температуры. Более того, скорость электронов в металле практически не зависит от температуры, и всегда $m_e v_e^2 \gg kT$ (m_e – масса электрона, v_e – его скорость).

Будем основываться на самой простой квантовой схеме-модели атома Бора-Зоммерфельда. В этой модели электроны крутятся по орбитам, взаимодействуя с ядром в соответствии с законом Кулона. Для отрыва же электрона от нейтрального атома нужно, очевидно, сообщить ему дополнительную энергию. Это значит, что скорость “оторвавшегося” электрона не меньше, чем скорость электрона находящегося на внешней орбите. В последнем случае скорость определяется кулоновским взаимодействием и не зависит, конечно, от температуры. Для оценок можно считать, что электрон на внешней атомной орбите сравнительно слабо связан с ядром, поэтому ему достаточно передать лишь малую энергию по сравнению с его собственной, чтобы он “ушел гулять” по кристаллу. Отсюда следует, что скорости свободных электронов не должны сильно отличаться от скоростей, которые характерны для внешних орбит.

С другой стороны, само существование вполне определенных орбит в модели Бора – есть следствие квантового описания атома. Поэтому можно и нужно думать, что и характеристики свободных электронов, “гуляющих по кристаллу” (иначе их называют еще электронами проводимости) должны зависеть от постоянной $\hbar$. Если мы хотим вычислять давление электронного газа p_e, то естественно включить в число определяющих параметров (также, как и в классической формуле, кстати!) массу m_e и концентрацию n_e. Записывая, как обычно, $p_e \sim \hbar^x m_e^y n_e^z$ и сравнивая размерности правой и левой частей этого равенства, мы получим: $x = 2$, $y = -1$, $z = 5/3$, то есть

$$p_e \sim \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{5/3}.$$

Точная формула для давления выводится в статистической физике и имеет вид:

$$p_e = \frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}}{5} \cdot \frac{\hbar^2}{m_e} \cdot n_e^{5/3}.$$

(Численный коэффициент и здесь порядка единицы!) Точно таким же образом можно получить формулу и для скорости v_e электрона проводимости:

$$v_e \sim \frac{\hbar}{m_e} n_e^{1/3}.$$

Заметим теперь, что число частиц в единице объема n_e связано, по определению, со средним расстоянием между частицами a простым соотношением $n_e \simeq a^{-3}$. В данном случае под a нужно понимать среднее расстояние между электронами проводимости. Если же считать атомы в металле однократно ионизованными (такая ситуация типична), то a – есть в то же время и среднее расстояние между атомами. Не будет большой ошибкой, если при численных оценках подставлять вместо a и размер атома – в твердом теле, как мы знаем, эти величины также одного порядка.

Возможность численных оценок с помощью полученных выше формул связана с тем, что неопределяемые нами числовые коэффициенты по порядку величины не малы и не велики по сравнению с единицей.

Сами такие оценки достаточно поучительны и просты. Пусть плотность металла ρ, масса атома с нашей точностью совпадает с массой атомного ядра $m_я$. Тогда число атомных ядер в единице объема $n_я \simeq \frac{\rho}{m_я}$. При однократной ионизации $n_e \simeq n_я$, поэтому

$$v_e \sim \frac{\hbar}{m_e}\left(\frac{\rho}{m_я}\right)^{1/3}; \quad p_e \sim \frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{\rho}{m_я}\right)^{5/3}.$$

Масса атомного ядра $A_я \simeq Am_n$, здесь A – массовое число, а m_n – масса нуклона (разницей масс нейтрона и протона мы, конечно пренебрегаем при таких оценках). Нам остается еще учесть, что $m_e \simeq 9\cdot 1\cdot 10^{-31}$ кг $\simeq 10^{-30}$ кг, а $m_n \simeq 1838 m_e$. Подстановка чисел в формулу для скорости приводит к оценке $v_e \sim 10^6$ м/с, другими словами $v_e \ll c \simeq 3\cdot 10^8$ м/с. Мы убедились, что электроны в металлах не нужно описывать релятивистскими формулами, они подчиняются законам нерелятивистской квантовой механики. Зависимость от A в формуле для v_e сравнительно слабая, типичные значения $A \simeq 50-100$.

Посмотрим, наконец, какова должна быть температура, чтобы величина kT стала порядка кинетической энергии электрона проводимости $\left(m_e v_e^2\right)/2$. Такая температура называется температурой вырождения T_0 и легко вычисляется. Для T_0 получается оценка порядка десятков тысяч градусов. Ясно, что металл раньше расплавится и испарится, чем нарушится условие $kT \ll \frac{m_e v_e^2}{2}$. На этом основании электронный газ в металле называют квантовым вырожденным газом. Написанное здесь неравенство есть соответственно условие вырождения.

12. Промежуточные итоги

Пожалуй, уже настало время подвести краткий итог тому, о чем говорилось выше. Рассмотренные нами примеры относились к различным разделам физики и имели целью проиллюстрировать основные идеи и технику применения метода размерностей.

Мы хотим сейчас еще раз подчеркнуть, что метод размерностей эффективно работает только тогда, когда мы сумели правильно выбрать определяющие явление или процесс параметры. Было бы неправильно думать, что мы можем, пользуясь только соображениями размерности, получать новые физические законы. При выборе системы определяющих параметров явно или неявно подразумевается, что мы что-то уже знаем об обсуждаемой конкретной задаче, до какой-то степени умеем отделять главное от второстепенного, или хотя бы пытаемся это делать.

В той же Нобелевской лекции, которую мы цитировали в самом начале, Ф.Андерсон сказал и такие слова: “Искусство построения моделей заключается в умении отбросить реально существующие, но несущественные стороны проблемы, и чревато риском как для автора, так и для читателя. Автор может отбросить что-нибудь, что на самом деле важно; читатель, вооруженный слишком тонкой экспериментальной методикой или проделывающий чрезмерно аккуратные вычисления, может понять слишком буквально схематизированную модель, основная цель которой – это демонстрация какой-то возможности.”

Те возможности метода размерностей, которые были продемонстрированы выше, существенно связаны не только с тем, что строившиеся нами формулы были степенными, но и с тем, что все они были одночленными. Мы подчеркивали также, что в простых задачах неопределяемые из соображений размерности коэффициенты – суть числа порядка единицы. Может быть, нелишне сказать, что отличие их в 2, 3, 5, даже 10 раз от единицы часто не так уж страшно. Пример тому – хорошо известная формула для периода колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Метод размерностей позволяет, конечно, связать период T с длиной маятника l и ускорением g, коэффициент же 2π этим методом получен быть не может. Можно было бы, наверное, сказать, что 2π – коэффициент сравнительно большой. С точки зрения качественного описания характера колебаний мы можем, однако, считать 2π числом порядка единицы – нет никакой специальной причины, по которой в столь простой задаче должен был бы возникнуть очень большой (или малый) численный коэффициент.

Большое значение имеет и сам выбор системы функционально связанных параметров. При удачном выборе численный множитель типа 2π, например, может и вообще не появиться. Если бы в примере с маятником мы отыскивали не связь T с l и g, а связь ω с l и g, никакого множителя 2π вообще не возникло бы, его происхождение связано лишь с определением величины $\omega = 2\pi/T$.

В тех случаях, когда при точном решении каких-то задач все же появляются числовые параметры или коэффициенты, сильно отличающиеся от единицы (скажем, на два порядка, а иногда и на порядок), – всегда имеет смысл поискать причину этого. Примером такой ситуации может служить наш расчет кинетических коэффициентов плазмы. В более точных формулах должен был бы возникнуть множитель, типичное значение которого ~ 20. Причиной появления такого большого безразмерного параметра является то, что мы не смогли учесть входящий в формулы логарифмический множитель, получивший название кулоновского логарифма. Аргументом этого логарифма также является безразмерная комбинация параметров задачи, но сама эта функция, к счастью, изменяется медленнее, чем степенные множители. Поэтому и найденные нами формулы верны с точностью до упомянутого логарифма. В грубом приближении можно включить логарифм в неопределяемый численный коэффициент. Но при более аккуратных вычислениях заменять логарифм константой, конечно, нельзя.

Не поможет метод размерностей и в тех случаях, когда формула, выражающая какую-либо закономерность, содержит другие нестепенные функции, например, синус или экспоненту. В случаях, когда есть причина для периодического изменения или экспоненциального роста интересующего нас параметра, метод размерностей может нам помочь разве что в выборе аргумента функции – естественно пытаться “конструировать” аргумент как безразмерную комбинацию каких-то параметров. Понятно должно быть и то что в безразмерном виде можно записывать и сами уравнения, выражающие физические закономерности. Приведем лишь один пример. Мы записывали раньше формулу для частоты пульсационных колебаний капли жидкости так: $\omega \sim \left(\sigma / \rho a^3\right)^{1/2}$. Но ту же самую закономерность можно написать и в безразмерном виде: $\sigma / \left(\rho a^3 \omega^2\right) \sim 1$. Безразмерная форма записи бывает иногда удобной, но она, конечно, не единственна. Можно ведь записать и такие формулы: $\dfrac{\rho a^3 \omega^2}{\sigma} \sim 1$; $\left(\dfrac{\rho a^3 \omega^2}{\sigma}\right)^2 \sim 1$ и т.п. Естественно, разумеется, ограничиваться лишь простейшей формулой такого типа.

И наконец, лучше поздно, чем никогда. Авторы должны объясниться с читателями. Речь идет о том, что в большом и неоднородном тексте этой статьи мы не смогли (и даже не хотели) избегать обозначения одной и той же буквой разных физических величин. Например, буквой σ обозначены в разных разделах поверхностное натяжение, электропроводность и постоянная Стефана–Больцмана. Мы пошли на это совершенно сознательно потому, что не хотели отступать от сложившихся традиций и соглашений, а число понятий, которые мы обсуждаем, довольно велико.

В каждом разделе статьи мы максимально подробно объясняли о чем идет речь. Мы надеемся, что это нигде не должно привести к недоразумениям.

По аналогичным причинам мы не стали делать ни в разделах, ни в статье в целом сплошную нумерацию формул. Мы надеемся, что это тоже не создаст трудностей у читателе при чтении.

Можно считать, что с основами метода размерностей теперь мы знакомы. Наше дальнейшее изложение будет построено в основном по тематическому принципу. Мы обсудим это в следующей статье, которую мы надеемся предложить читателям в недалеком будущем. Но это вовсе не исключает использования уже сейчас аналогий между разными физическими явлениями и процессами.

Литература

1. *Липсон Г.* Великие эксперименты в физике // М.: Мир, 1972, 216 стр.
2. *Андерсон Ф.* Локальные моменты и локализованные состояния. Нобелевская лекция, 1977 г. // Успехи физических наук 1979, т. 127, № 1, стр. 19-39
3. *Тейлор Э., Уилер Дж.* Физика пространства-времени // М., Мир, 1971 319 стр.
4. *Стретт Дж.В.* (*Лорд Релей*), Теория звука, т. 1 // М., ГТТИ, 1955, 503 стр.

Дополнительный список источников по проблеме метода размерностей

1. *Бриджмен П.* Анализ размерностей // Ижевск: НИЦ РХД, 2001, 148 стр.
2. *Крайнов В.П.* Качественные методы в физической кинетике и гидродинамике // М.: Высшая школа, 1989, 224 стр.
3. *Крайнов В.П.* Лекции по избранным проблемам механики сплошных сред//Долгопрудный: Интеллект, 2014, 120 стр.
4. *Брук Ю.М., Стасенко А.Л.* Как физики делают оценки // В книге "О современной физике – учителю". М.: Знание, 1975, стр.54–131.
5. *Иванов Б.Н.* Мир физической гидродинамики // М.: Едиториал УРСС, 2014, 240 стр.
6. *Иванов Б.Н.* Законы физики // М.: УРСС, 2016 368 стр.
7. *Баренблатт Г.И.* Автомодельные явления – анализ размерностей и скэйлинг // Долгопрудный, Интеллект, 2009, 216 стр.
8. *Трубецков Д.И.* Две лекции о двух путях истории симметрии // Прикладная нелинейная динамика, 2013, Саратов, том 21, №4, 9–42.
9. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике // М. Наука, 1981. 440 стр.

DIMENSIONAL METHOD AND QUALITATIVE ASSESSMENTS OF PHYSICAL QUANTITIES

Ju.M. Bruk[1], A.L. Stasenko[2,3]

[1]*P.N.Lebedev Physical Institute Russian Academy of Science*
[2]*Central Aerohydrodynamic Institute*
[3]*Moscow Institute of Physics and Technology (State University)*

yubruk@gmail.com, stasenko@serpantin.ru

Received 12.04.2016

The proposed survey presents a technique for constructing mathematical formulas in various fields of physics on the basis of the concept of dimensions and the numerical estimation of the quantity orders. Several specific problems are considered to illustrate one of the most efficient methods for the qualitative analysis of physical processes and phenomena. The principal ides of the method are important for qualitative modeling and, rather often, for obtaining numerical estimates preceding the exact solutions. The dimensional method is closely related to the concept of similarity in physics and mathematics, which are actively discussed in the contemporary mathematics.