СПЕКТРАЛЬНЫЕ КЛАСТЕРЫ ПЛАНАРНОЙ ЛОВУШКИ ПЕННИНГА С РЕЗОНАНСНЫМ НАРУШЕНИЕМ АКСИАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Е.М. Новикова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

emnovikova@hse.ru

Поступила 15.11.2015

Дано описание спектральных характеристик планарной ловушки Пеннинга с кольцевой конфигурацией электродов и магнитным полем, отклоненным от аксиальной оси. Найдены соотношения между физическими параметрами, при которых наступает комбинированный частотный резонанс в гармонической (квадратичной) части гамильтониана вблизи центра ловушки. Усредненная ангармоническая часть гамильтониана представлена обыкновенным дифференциальным оператором второго порядка с полиномиальными коэффициентами, найдена асимптотика его собственных значений и собственных функций. Получена формула для асимптотики собственных состояний исходного гамильтониана ловушки в спектральных кластерах вблизи собственных значений гармонической части.

УДК 517.955.8

Введение

Ловушки Пеннинга являются важными физическими устройствами, изучению которых посвящена большая литература. Они широко используются, например, для целей точных измерений или для реализации моделей квантовой информатики [1-7]. Математическая модель ловушки Пеннинга становится нетривиальной при наличии ангармонических членов в потенциалах, которые задаются внешними полями (электрическим и магнитным). Анализ влияния ангармонизма может быть эффективно проведен в режиме частотного резонанса, что является для нас главным моментом.

Данная работа продолжает цикл статей [8–11], посвященных исследованию спектральной задачи для электрона в планарной ловушке Пеннинга. В исследуемой ловушке электрон удерживается с помощью неоднородного электрического поля, порожденного кольцевыми концентрическими электродами, и однородного магнитного поля. Магнитное поле слегка отклонено от оси симметрии ловушки.

Первый параграф содержит описание модели и математическую постановку задачи. В нем сначала (раздел 1.1) подробно описывается конфигурация электромагнитного поля и объясняется процедура обезразмеривания. Затем (раздел 1.2) приводятся соотношения между физическими параметрами, при которых наступает комбинированный частотный резонанс в гармонической части гамильтониана вблизи центра ловушки, и выписывается эффективный гамильтониан, описывающий движение электрона в планарной квантовой ловушке Пеннинга (раздел 1.3). Далее, с помощью линейной замены переменных его старшая часть $\hat{H}_0$ приводится к нормальной квадратичной форме с гиперболическим резонансом 2:(-1):2 между частотами. И наконец, формулируется спектральная задача в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ для возмущенного эффективного гамильтониана $\hat{H}_0 + \varepsilon\hat{H}_1 + \varepsilon^2\hat{H}_2$ (раздел 1.4).

Следуя [12], для решения спектральной задачи мы последовательно применяем два метода: квантовое усреднение и когерентное преобразование.

Квантовое усреднение описывается в параграфе 2. Оно применяется в два этапа. Сначала возмущение $\hat{H}_1+\varepsilon\hat{H}_2$ преобразуется к оператору $\hat{H}_{10}+\varepsilon\hat{H}_{20}$, коммутирующему со старшей частью $\hat{H}_0$ (раздел 2.1). При этом усредненное возмущение $\hat{H}_{10}+\varepsilon\hat{H}_{20}$ выражается через образующие алгебры квантовых симметрий гармонической части $\hat{H}_0$. Затем оператор $\hat{H}_{20}$ преобразуется к оператору $\hat{H}_{200}$, который коммутирует и со старшей частью $\hat{H}_0$, и с главной частью $\hat{H}_{10}$ возмущения (раздел 2.2), и в результате исходная спектральная задача сводится к спектральной задаче для трех коммутирующих гамильтонианов: $\hat{H}_0$, $\hat{H}_{10}$, и $\hat{H}_{200}$. Алгебру совместных симметрий операторов $\hat{H}_0$ и $\hat{H}_{10}$ мы называем резонансной [11]. Это алгебра с квадратичными коммутационными соотношениями (раздел 2.3). Дважды усредненный гамильтониан $\hat{H}_{200}$ явно выражается через образующие этой алгебры (разделе 2.4). Поскольку в редуцированной спектральной задаче спектр гамильтониана $\hat{H}_{200}$ вычисляется лишь на совместных собственных подпространствах операторов $\hat{H}_0$ и $\hat{H}_{10}$, то гамильтониан $\hat{H}_{200}$ далее рассматривается только в неприводимой компоненте представления резонансной алгебры (раздел 2.5).

В параграфе 3 исследуется классическая версия резонансной алгебры. Здесь приводятся скобки Пуассона между классическими симметриями функций Гамильтона H_0 и H_{10} (раздел 3.1) и описываются симплектические листы этой пуассоновой алгебры (раздел 3.2), на которых вводится классическая кэлерова структура.

Затем рассматривается квантовая версия резонансной алгебры. Для нее строятся неприводимые представления двух типов: в параграфе 4 – антиголоморфные (т.е. голоморфные по $\bar{z} \in \mathbb{C}$) представления на комплексной плоскости, а в параграфе 5 – представления над кривой в симплектическом листе.

Более подробно, в параграфе 4 описывается гильбертово пространство неприводимого антиголоморфного представления (раздел 4.1) и приводятся формулы для операторов этого представления (раздел 4.2). Голоморфные когерентные состояния резонансной алгебры сначала строятся в абстрактном гильбертовом пространстве (раздел 4.3), а затем вычисляются в исходной реализации резонансной алгебры в $L^2(\mathbb{R}^3)$ (раздел 4.4). Далее, рассматривается скалярное произведение пары когерентных (раздел 4.5). Оно является воспроизводящим ядром единичного оператора в подпространстве неприводимого антиголоморфного представления. С помощью когерентных состояний определяется когерентное преобразование, сплетающее произвольное представление резонансной алгебры в абстрактном гильбертовом пространстве с неприводимым антиголоморфным представлением (раздел 4.6). Метод построения неприводимых антиголоморфных представлений и голоморфных когерентных состояний подробно изложен в [13]. В работе [14] с помощью этого метода строятся неприводимые представления и когерентные состояния алгебр для многочастотного (в том числе, трехчастотного) резонанса.

В параграфе 5 для квантованной кривой Λ в симплектическом листе определяются Λ-когерентные состояния и амплитуда перехода (раздел 5.1). Следуя [15, 16], с помощью амплитуды перехода мы вводим гильбертово пространство функций над кривой Λ (раздел 5.2), и на этом пространстве строим дифференциальные операторы неприводимого представления над Λ (раздел 5.3).

В параграфе 6 сначала (раздел 6.1) описывается общая процедура когерентного преобразования спектральной задачи, с помощью которой задача может быть переформулирована в терминах дифференциального уравнения либо в голоморфной карте на симплектическом листе, либо глобально на кривой в симплектичеком листе. А затем эта процедура применяется к усредненной спектральной задаче для электрона в плоской ловушке Пеннинга. В результате эта задача переписывается в виде дифференциального уравнения второго порядка в пространстве антиголоморфных функций (раздел 6.2). Решения исходной спектральной задачи выражаются через решения этого дифференциального уравнения.

В параграфе 7 к спектральной задаче, записанной в представлении на кривой в симплектическом листе, применяется квазиклассическое приближение (см. подробное описание этой процедуры в [11]). Сначала демонстрируется геометрический смысл образующих резонансной алгебры и дважды усредненного гамильтониана, записанных в представлении на кривой (раздел 7.1). Затем выбирается кривая (раздел 7.2). Она должна быть подчинена некоторому условию квантования. В результате в квазиклассическом приближении спектральная задача в представлении над кривой переписывается в виде элементарного дифференциального уравнения первого порядка (раздел 7.3). Решения исходной спектральной задачи выражаются через решения этого уравнения.

1 Описание резонансной ловушки Пеннинга

1.1 Электромагнитное поле ловушки

В рассматриваемой модели планарной ловушки Пеннинга электрическое поле создается тремя концентрическими электродами, лежащими в одной плоскости, а именно: кругом с радиусом ρ_1, на котором поддерживается потенциал 0, кольцом с радиусами $\rho_1 < \rho_2$, к которому приложен постоянный потенциал W, а также внешностью кольца, где поддерживается потенциал 0. Обозначим через (q_1, q_2) координаты в этой плоскости с началом в центре кругового электрода, $r \stackrel{def}{=} \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$, а через q_3 обозначим координату в направлении, перпендикулярном плоскости. Обезразмерим эти координаты так:

$$x \stackrel{def}{=} \frac{q_1}{\rho_1}, \quad y \stackrel{def}{=} \frac{q_2}{\rho_1}, \quad \rho \stackrel{def}{=} \frac{r}{\rho_1}, \quad z = \frac{q_3}{\rho_1}.$$

Будем рассматривать случай, когда внешний радиус кольцевого электрода много больше внутреннего радиуса:

$$\delta \stackrel{def}{=} \frac{\rho_1}{\rho_2} \leq 1.$$

В полупространстве $q_3 \geq 0$ потенциал V, создаваемый электродами, имеет стационарную точку с координатой

$$z^0 \stackrel{def}{=} \delta^{-1/3}(1 + \delta^{2/3})^{-1/2} = \delta^{-1/3}\Big(1 - \frac{1}{2}\delta^{2/3} + O(\delta^{4/3})\Big).$$

В окрестности этой точки потенциальная энергия (с учетом отрицательности заряда электрона) имеет разложение:

$$-eV = cV_0 \cdot u, \qquad u = const + \frac{\omega_0^2}{2}u^{[2]} + \varepsilon\beta u^{[3]} + \varepsilon^2\gamma u^{[4]} + \ldots,$$

где V_0 – это некоторая калибровка напряжения, которую мы фиксируем ниже, а $u^{[j]}$ – однородные полиномы j-ой степени от координат ρ, z:

$$u^{[2]} = (z-z^0)^2 - \frac{1}{2}\rho^2, \qquad u^{[3]} = (z-z^0)\Big[(z-z^0)^2 - \frac{3}{2}\rho^2\Big],$$
$$u^{[4]} = (z-z^0)^4 - 3(z-z^0)^2\rho^2 + \frac{3}{8}\rho^4.$$

Формулы для коэффициентов имеют следующий вид (см. подробнее в [11]):

$$\omega_0^2 = 3\frac{W}{V_0}\delta^{4/3}\Big(1 - \frac{1}{2}\delta^{2/3} + O(\delta^{4/3})\Big), \qquad \beta = -2\frac{W}{V_0}\delta^{5/3}\big(1 + O(\delta^{2/3})\big),$$
$$\gamma = \frac{5}{2}\frac{W}{V_0}\delta^2\big(1 + O(\delta^{2/3})\big).$$

Помимо электрического потенциала, в ловушке имеется однородное магнитное поле $\mathcal{B}$, которое отклонено на малый угол ε от оси (от перпендикуляра к плоскости электродов). Предположим, что магнитное поле направлено в сторону от стационарной точки электрического потенциала к плоскости электродов.

Введем теперь калибровку напряжения, которая задается удельной энергией магнитного поля, удерживающего заряженную частицу в объеме ловушки: $V_0 = \frac{e|\mathcal{B}|^2\rho_1^2}{mc^2}$. Здесь m и e – масса и величина заряда частицы (электрона), c – скорость света. Введем также магнитную длину $\rho_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{e|\mathcal{B}|}}$ и определим эффективную постоянную Планка $h = (\rho_0/\rho_1)^2$.

В единицах энергии eV_0 полный гамильтониан модели имеет вид

$$\hat{H} = (\hat{p} - \mathcal{A})^2/2 + u.$$

Здесь $\mathcal{A}$ – эффективный магнитный потенциал, связанный с магнитным полем так: $(\nabla \times \mathcal{A}) = \mathcal{B}/|\mathcal{B}|$, а $\hat{p} = -ih\nabla$ – это эффективный квантовый импульс, и операция $\nabla = (\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z)$ берется в безразмерных координатах (x, y, z).

Эффективное (безразмерное) магнитное поле задано единичным вектором $\mathcal{B}/|\mathcal{B}|$, который имеет три компоненты: $\mathcal{B}/|\mathcal{B}| = (\sin\varepsilon, 0, \cos\varepsilon)$ в предположении, что координатная ось x направлена вдоль проекции магнитного поля на плоскость электродов. Пренебрегая малыми членами по ε, получим: $\mathcal{B}/|\mathcal{B}| = b + \varepsilon\tilde{b} + O(\varepsilon^3)$, где $b = (0, 0, \omega)$, $\tilde{b} = (1, 0, 1/4)$ и $\omega = 1 - \varepsilon/4 - \varepsilon^2/2$. Таким образом, эффективное магнитное поле в виде "главной части" b, направленной вдоль оси ловушки, и малого возмущения $\varepsilon\tilde{b}$, у которого осевая и продольная компоненты соотносятся как 1:4. Это специально подобранное нарушение коммутативности аксиальной симметрии ловушки.

Величина ω представляет частоту вращения в (x, y) – плоскости. Кроме этого, в квадратичной части потенциала u имеется частота ω_0 колебаний в направлении оси z. Как известно [5], соотношение $\omega > \sqrt{2}\,\omega_0$ гарантирует ловушечный режим (ограниченность траекторий частицы).

1.2 Условие резонанса

Чтобы обеспечить не только ограниченность, но и периодичность траекторий, наложим на частоты более сильное резонансное условие:

$$\omega = \frac{3}{2}\omega_0.$$

В силу представленных выше явных формул для частот ω и ω_0 условие резонанса выглядит так:

$$\frac{4}{9}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^2}{2}\Big)^2 = 3\frac{W}{V_0}\delta^{4/3}\Big(1 - \frac{1}{2}\delta^{2/3} + O(\delta^{4/3})\Big).$$

Предположим, что геометрические параметры ловушки по масштабу малости соотносятся между собой следующим образом:

$$\delta^{1/3} = k\varepsilon, \qquad k \sim 1. \tag{1.1}$$

Тогда условие резонанса можно, с точностью $O(\varepsilon^3)$, представить так:

$$\frac{W}{V_0} = \frac{4}{27\delta^{4/3}}\Big(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\Big(\delta^{2/3} - \frac{15}{8}\varepsilon^2\Big)\Big). \tag{1.2}$$

Это соотношение комбинированного резонанса связывает между собой потенциал W кольцевого электрода ловушки, величину магнитного поля (определяющую напряжение V_0), угол ε отклонения магнитного поля от оси ловушки, и отношение радиусов кольцевого электрода $\delta = \rho_1/\rho_2$.

При условии комбинированного резонанса (1.2) коэффициенты разложения эффективного потенциала u по степеням малого параметра ε задаются формулами:

$$\omega_0 = \frac{2}{3}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^2}{2}\Big), \qquad \beta = -\frac{8k}{27} + O(\varepsilon), \qquad \gamma = \frac{10k^2}{27}.$$

1.3 Гамильтониан электрона в резонансной ловушке

Эффективный гамильтониан, описывающий движение электрона в планарной квантовой ловушке Пеннинга, запишется в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \varepsilon\hat{H}_1 + \varepsilon^2\hat{H}_2 + O(\varepsilon^3), \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{H}_0 &= \frac{1}{2}\Big[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 - \frac{3}{2}\omega_0(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) + \omega_0^2(z - z^0)^2 + \frac{1}{16}\omega_0^2(x^2 + y^2)\Big],\\
\hat{H}_1 &= \frac{1}{8}\Big[y\hat{p}_x + \big(4(z - z^0) - x\big)\hat{p}_y - 4y\hat{p}_z - 3\omega_0(z - z^0)x + \frac{3}{4}\omega_0(x^2 + y^2)\Big]\\
&\qquad + \beta(z - z^0)\Big[(z - z^0)^2 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2)\Big],\\
\hat{H}_2 &= \frac{1}{128}\big[17y^2 + \big(x - 4(z - z^0)\big)^2\big] + \gamma\Big[(z - z^0)^4 - 3(z - z^0)^2(x^2 + y^2) + \frac{3}{8}(x^2 + y^2)^2\Big].
\end{aligned}$$

С помощью линейной замены

$$x=\sqrt{\frac{2}{\omega_0}}(x_+ + x_-),\qquad y=\sqrt{\frac{2}{\omega_0}}(\hat p_+ - \hat p_-),\qquad z=\frac{x_0}{\sqrt{\omega_0}}+z^0,$$
$$\hat p_x=\frac12\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}(\hat p_+ + \hat p_-),\qquad \hat p_y=-\frac12\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}(x_+ - x_-),\qquad \hat p_z=\sqrt{\omega_0}\hat p_0$$

главную часть $\hat H_0$ этого гамильтониана можно привести к нормальной форме

$$\hat H_0=\frac14\omega_0\big(2(\hat p_+^2+x_+^2)-(\hat p_-^2+x_-^2)+2(\hat p_0^2+x_0^2)\big)$$

с гиперболическим резонансом $2:(-1):2$ между частотами.

1.4 Спектральная задача

Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ задачу на собственные значения для возмущенного гамильтониана (1.3):

$$(\hat H_0+\varepsilon\hat H_1+\varepsilon^2\hat H_2)\Psi=E\Psi,\qquad \Psi\in L^2(\mathbb{R}^3). \tag{1.4}$$

Здесь отброшены малые члены порядка ε^3. Для решения этой задачи мы дважды применим операторное усреднение, а затем усредненную задачу упростим с помощью когерентного преобразования.

2 Редукция спектральной задачи и резонансная алгебра

2.1 Первое усреднение спектральной задачи

Введем операторы комплексной структуры

$$\hat\xi_j=\frac{1}{\sqrt2}(x_j+i\hat p_j),\qquad j\in\{+,-,0\},$$

и сопряженные к ним в $L^2(\mathbb{R}^3)$ операторы $\hat\xi_j^*$, а также определим операторы действие

$$\hat S_\pm=\hat\xi_\pm^*\hat\xi_\pm,\qquad \hat S_3=\hat\xi_0^*\hat\xi_0,\qquad \hat S_0=2\hat S_+-\hat S_-+2\hat S_3,$$

у которых спектр состоит из чисел кратных h. Тогда

$$\hat H_0=\frac{\omega_0}{2}\big(\hat S_0+\frac{3h}{2}\big),$$

причем $\mathrm{Spec}(\hat S_0)=\{hn\mid n\in\mathbb{Z}\}$. Поскольку группа $\exp\{-it\hat S_0/h\}$ периодична, то, при условии $\varepsilon\ll1$, применяя процедуру квантового усреднения

$$U^{-1}\hat HU=\hat H_0+\varepsilon\hat H_{10}+\varepsilon^2\hat H_{20}+O(\varepsilon^3),$$

можно перейти к новым возмущающим операторам $\hat{H}_{10}$ и $\hat{H}_{20}$, которые коммутируют со старшей частью:

$$[\hat{H}_0, \hat{H}_{10}] = [\hat{H}_0, \hat{H}_{20}] = 0.$$

Здесь U – унитарный деусредняющий оператор:

$$U = \exp\{-\frac{i\varepsilon}{h}(\hat{H}_1^\sharp + \varepsilon \hat{H}_2^\sharp)\}, \tag{2.1}$$

где

$$\hat{H}_j^\sharp = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - t)\exp\{-\frac{it\hat{S}_0}{h}\}\hat{H}_j \exp\{\frac{it\hat{S}_0}{h}\}\, dt, \qquad j = 1, 2.$$

При дополнительном предположении $\varepsilon = O(h)$ он принимает более простую форму:

$$U = \exp\{-\frac{i\varepsilon}{h}\hat{H}_1^\sharp\} + O(\varepsilon).$$

В результате спектральная задача (1.4) запишется в виде системы

$$\begin{cases} \hat{H}_0\tilde{\Psi} = \frac{h\omega_0}{2}(n + \frac{3}{2})\tilde{\Psi}, \\ (\hat{H}_{10} + \varepsilon^2\hat{H}_{20})\tilde{\Psi} = (E - \frac{h\omega_0}{2}(n + \frac{3}{2}))\tilde{\Psi} \end{cases}$$

для двух коммутирующих гамильтонианов $\hat{H}_0$ и $\hat{H}_{10} + \varepsilon\hat{H}_{20}$. Собственные функции спектральной задачи (1.4) связаны с собственными функциями усредненной спектральной задачи с помощью деусредняющего оператора U:

$$\Psi = U\tilde{\Psi} + O(\varepsilon).$$

Подробные вычисления приведены в [8]. Гамильтониан $\hat{H}_{10}$ можно записать в виде линейной комбинации

$$\hat{H}_{10} = \frac{1}{4}\Big(4\hat{A}_+ - 2\hat{A}_- + \hat{A}_0 + \frac{3h}{2}\Big) \tag{2.2}$$

следующих трех коммутирующих операторов, спектр которых состоит из чисел, кратных h:

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 = \hat{S}_-, \qquad \hat{A}_+ &= \frac{1}{3}[2\hat{S}_+ + \hat{S}_3 - \sqrt{2}(\hat{A}_\rho + \hat{A}_\rho^*)], \\ \hat{A}_- &= \frac{1}{3}[\hat{S}_+ + 2\hat{S}_3 + \sqrt{2}(\hat{A}_\rho + \hat{A}_\rho^*)]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

В этих формулах участвует один из трех генераторов

$$\hat{A}_\rho = \hat{\xi}_+^*\hat{\xi}_0, \qquad \hat{A}_\sigma = \hat{\xi}_+^*(\hat{\xi}_-^*)^2, \qquad \hat{A}_\theta = (\hat{\xi}_-^*)^2\hat{\xi}_0^*$$

алгебры симметрий оператора $\hat{H}_0$.

2.2 Второе усреднение спектральной задачи

В гамильтониане (2.2) мы получаем новый (вторичный) резонанс $4:(-2):1$, который обеспечивается выбранной выше пропорцией $1:4$ между осевой и продольной компонентами добавки порядка ε в магнитном поле. Благодаря этому резонансу удается еще раз применить процедуру усреднения, теперь к гамильтониану $\hat{H}_{10}+\varepsilon\hat{H}_{20}$.

На n-ом собственном подпространстве, где $\hat{H}_0$ принимает значение $\frac{h\omega_0}{2}(n+\frac{3}{2})$, спектр старшей части $\hat{H}_{10}$ усредненного гамильтониана состоит из чисел

$$\frac{h}{4}(6m-n+\frac{3}{2}), \qquad m\in\mathbb{Z}_+.$$

Каждое собственное значение бесконечно вырождено.

С помощью унитарного оператора

$$\tilde{U}=\exp\{-\frac{i\varepsilon}{h}\,{}^\sharp\hat{H}_{20}\}, \tag{2.4}$$

где

$${}^\sharp\hat{H}_{20}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)\exp\{-\frac{2it}{3h}\hat{H}_{10}\}\hat{H}_{20}\exp\{\frac{2it}{3h}\hat{H}_{10}\}\,dt,$$

гамильтониан $\hat{H}_{10}+\varepsilon\hat{H}_{20}$ приводится к виду

$$\tilde{U}^{-1}(\hat{H}_{10}+\varepsilon\hat{H}_{20})\tilde{U}=\hat{H}_{10}+\varepsilon\hat{H}_{200}+O(\varepsilon^2), \qquad \text{где} \quad [\hat{H}_{10},\hat{H}_{200}]=0.$$

И мы приходим к спектральной задаче

$$\begin{cases}\hat{H}_0\Phi=\frac{h\omega_0}{2}(n+\frac{3}{2})\Phi,\\ \hat{H}_{10}\Phi=\frac{h}{4}(6m-n+\frac{3}{2})\Phi,\\ \hat{H}_{200}\Phi=\lambda\Phi\end{cases} \tag{2.5}$$

для трех попарно коммутирующих гамильтонианов.

Таким образом, решение исходной спектральной задачи (1.4) сводится к решению спектральной задачи для дважды усредненного гамильтониана $\hat{H}_{200}$ на совместных собственных подпространствах операторов $\hat{H}_0$ и $\hat{H}_{10}$. Решения задач (1.4) и (2.5) связаны по формулам

$$E=\frac{h\omega_0}{2}(n+\frac{3}{2})+\frac{\varepsilon h}{4}(6m-n+\frac{3}{2})+\varepsilon^2\lambda+O(\varepsilon^3), \qquad \Psi=U\tilde{U}\Phi+O(\varepsilon). \tag{2.6}$$

Здесь $\lambda=\lambda_k^{(n,m)}$, $\Phi=\Phi_k^{(n,m)}$ нумеруются квантовыми числами n, m и дополнительным числом k.

2.3 Резонансная алгебра

Дважды усредненный гамильтониан $\hat{H}_{200}$ можно записать в виде функции от образующих алгебры совместных симметрий $\hat{H}_0$ и $\hat{H}_{10}$.

Теорема 2.1. *Алгебра совместных симметрий $\hat{H}_0$ и $\hat{H}_{10}$ задается операторами $\hat{A}_0$, $\hat{A}_+$, $\hat{A}_-$, определенными в (2.3), и операторами*

$$\hat{B}=\sqrt{\frac{2}{3}}(\hat{A}_\sigma+\sqrt{2}\hat{A}_\theta), \qquad \hat{C}=\hat{B}^*. \tag{2.7}$$

Коммутационные соотношения между образующими (2.3), (2.7) *имеют вид*

$$\begin{aligned}
&[\hat{A}_0, \hat{A}_\pm] = [\hat{A}_+, \hat{A}_-] = 0, \\
&[\hat{A}_0, \hat{B}] = 2h\hat{B}, \qquad [\hat{A}_+, \hat{B}] = 0, \quad [\hat{A}_-, \hat{B}] = h\hat{B}, \\
&[\hat{C}, \hat{B}] = 2h(\hat{A}_0^2 + 4\hat{A}_0\hat{A}_- + 3h\hat{A}_0 + 2h\hat{A}_- + 2h^2),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

и плюс сопряженные соотношения. В этой алгебре имеются три элемента Казимира:

$$\hat{D} = 2\hat{A}_- - \hat{A}_0, \qquad \hat{S}_1 = \hat{A}_+, \qquad \hat{K} = \hat{B}\hat{C} - 2\hat{A}_0(\hat{A}_0 - h)\hat{A}_-.$$

В реализации (2.3), (2.7) *элементы Казимира задаются операторами*

$$\hat{D} = \frac{4}{3\omega_0}\hat{H}_0 - \frac{4}{3}\hat{H}_{10} - \frac{h}{2}, \qquad \hat{S}_1 = \frac{1}{3\omega_0}\hat{H}_0 + \frac{2}{3}\hat{H}_{10} - \frac{h}{2}, \qquad \hat{K} = 0.$$

2.4 Выражение дважды усредненного гамильтониана через образующие резонансной алгебры

Теорема 2.2. *Дважды усредненный гамильтониан $\hat{H}_{200}$ является квадратичной функцией*

$$\hat{H}_{200} = s\Big(a\hat{A}_0^2 + \hat{b}\hat{A}_0 + \hat{c} - \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})\Big) \tag{2.9}$$

от образующих (2.3), (2.7) *алгебры бисимметрий* (2.8). *Здесь мы обозначили*

$$\begin{aligned}
s &= \frac{4\sqrt{2}\beta}{\sqrt{3}\omega_0^{5/2}} = -\frac{8}{3}k, \qquad a = \frac{298\omega_0^2\gamma - 881\beta^2}{48\omega_0^4 s} \simeq \frac{1289}{1152}k, \\
\hat{b} &= \frac{1}{216\omega_0^4 s}[1260(2\omega_0^2\gamma - 7\beta^2)\hat{S}_1 + 9(10\omega_0^2\gamma - 17\beta^2)\hat{S}_0 - 360\omega_0^3 - \\
&\qquad - 18\omega_0^2\gamma(13 - 152h) + 9\beta^2(85 - 956h)] \simeq \\
&\simeq \frac{1}{576}[1820k\hat{S}_1 - 7k\hat{S}_0 + 540/k - 145k + 1896hk], \\
\hat{c} &= \frac{1}{432\omega_0^4 s}[36(26\omega_0^2\gamma - 85\beta^2)\hat{S}_1^2 - 72(2\omega_0^2\gamma - 7\beta^2)\hat{S}_1\hat{S}_0 + 9(10\omega_0^2\gamma - 17\beta^2)\hat{S}_0^2 - \\
&\qquad - (684\omega_0^3 - 72\omega_0^2\gamma(26 + 45h) + 36\beta^2(170 + 309h))\hat{S}_1 + \\
&\qquad + (36\omega_0^3 - 36\omega_0^2\gamma(13 - 8h) + 90\beta^2(17 - 4h))\hat{S}_0 - \\
&\qquad - 18h(36\omega_0^3 - 162h\omega_0^2\gamma + 537h\beta^2)] \simeq \\
&\simeq -\frac{1}{1152}\Big[- 580k\hat{S}_1^2 + 104k\hat{S}_1\hat{S}_0 + 7k\hat{S}_0^2 - (1026/k + 1160k + 2244hk)\hat{S}_1 + \\
&\qquad + (54/k + 290k + 80hk)\hat{S}_0 - (972h/k + 1866h^2k)\Big],
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где k – это отношение геометрических параметров ловушки (1.1). *Операторы действия $\hat{S}_0$ и $\hat{S}_1$ коммутируют со всеми образующими алгебры и их спектр состоит из чисел, кратных h:* $\operatorname{Spec}\hat{S}_0 = \{hn \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\operatorname{Spec}\hat{S}_1 = \{hm \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

2.5 Неприводимые представления резонансной алгебры на подпространстве $\mathcal{L}[n,m] \subset L^2(\mathbb{R}^3)$

Таким образом, модель планарной резонансной ловушки Пеннинга сведена к гамильтониану

$$a\hat{A}_0^2 + b\hat{A}_0 - \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) \tag{2.11}$$

с известными числовыми коэффициентами a, b над алгеброй

$$\begin{aligned}
&[\hat{A}_0, \hat{A}_-] = 0, \qquad [\hat{A}_0, \hat{B}] = 2h\hat{B}, \qquad [\hat{A}_-, \hat{B}] = h\hat{B},\\
&[\hat{C}, \hat{B}] = 2h(\hat{A}_0^2 + 4\hat{A}_0\hat{A}_- + 3h\hat{A}_0 + 2h\hat{A}_- + 2h^2)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

с условиями эрмитовости

$$\hat{A}_0^* = \hat{A}_0, \qquad \hat{A}_-^* = \hat{A}_-, \qquad \hat{B}^* = \hat{C} \tag{2.13}$$

и с элементами Казимира $\hat{D} = 2\hat{A}_- - \hat{A}_0$ и $\hat{K} = \hat{B}\hat{C} - 2\hat{A}_0(\hat{A}_0 - h)\hat{A}_-$. При этом гамильтониан (2.11) рассматривается только в неприводимом представлении этой алгебры на собственном подпространстве $\mathcal{L}[n,m] \subset L^2(\mathbb{R}^3)$, где оператор $\hat{D} = \hat{S}_0 - 2\hat{S}_1$ принимает значение $d = h(n - 2m)$, а элемент $\hat{K}$ равен 0.

3 Пуассонова резонансная алгебра

3.1 Классическая версия резонансной алгебры

На фазовом пространстве $\mathbb{R}^6_{(x,p)}$ с координатами $x = (x_+, x_-, x_0)$, $p = (p_+, p_-, p_0)$ рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
&S_0 = 2|\xi_+|^2 - |\xi_-|^2 + 2|\xi_0|^2, && S_1 = \frac{1}{3}\big[2|\xi_+|^2 + |\xi_0|^2 - \sqrt{2}(\bar{\xi}_+\xi_0 + \xi_+\bar{\xi}_0)\big],\\
&A_0 = |\xi_-|^2, && A_- = \frac{1}{3}\big[|\xi_+|^2 + 2|\xi_0|^2 + \sqrt{2}(\bar{\xi}_+\xi_0 + \xi_+\bar{\xi}_0)\big],\\
&B = \sqrt{\frac{2}{3}}(\bar{\xi}_-)^2(\bar{\xi}_+ + \sqrt{2}\bar{\xi}_0), && C = \bar{B},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + ip_j), \qquad j \in \{+, -, 0\}.$$

Функции (3.1) – это символы операторов “действие” $\hat{S}_0 = S_0(\overset{1}{\hat{\xi}}, \overset{2}{\hat{\xi}^*})$, $\hat{S}_1 = S_1(\overset{1}{\hat{\xi}}, \overset{2}{\hat{\xi}^*})$ и образующих $\hat{A}_0 = A_0(\overset{1}{\hat{\xi}}, \overset{2}{\hat{\xi}^*})$, $\hat{A}_- = A_-(\overset{1}{\hat{\xi}}, \overset{2}{\hat{\xi}^*})$, $\hat{B} = B(\overset{1}{\hat{\xi}}, \overset{2}{\hat{\xi}^*})$, $\hat{C} = \hat{B}^*$ резонансной алгебры (2.12).

Поскольку операторы “действие” $\hat{S}_0$ и $\hat{S}_1$ коммутируют друг с другом и с операторами (2.3), (2.7), то соответствующие символы находятся в инволюции:

$$\begin{aligned}
&\{S_0, S_1\} = 0,\\
&\{S_0, A_0\} = \{S_0, A_-\} = \{S_0, B\} = \{S_0, C\} = 0,\\
&\{S_1, A_0\} = \{S_1, A_-\} = \{S_1, B\} = \{S_1, C\} = 0,
\end{aligned}$$

т.е. A_0, A_-, B, C являются совместными симметриями двух действий S_0 и S_1. Переходя в (2.12) к квазиклассическому пределу (при $h \to 0$), вместо коммутационных соотношений для операторов, получим скобки Пуассона их символов.

Теорема 3.1. *Скобки Пуассона между образующими алгебры совместных симметрий действий S_0 и S_1 имеют вид*

$$\{A_0, A_-\} = 0, \quad \{A_0, B\} = 2iB, \quad \{A_-, B\} = iB, \quad \{C, B\} = 2iA_0(A_0 + 4A_-). \tag{3.2}$$

3.2 Симплектические листы

Теорема 3.2. *Симплектические листы Ω алгебры (3.2) лежат на поверхностях уровня двух функций Казимира:*

$$D = 2A_- - A_0, \qquad K = BC - 2A_0^2 A_-.$$

В реализации (3.1) вторая функция Казимира равна нулю:

$$K = 0,$$

и выполнены неравенства

$$A_0 > 0, \qquad A_0 + D \geq 0.$$

Замыкание листа задается формулой

$$\bar{\Omega} = \{\mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Y}_2^2 = A_0^2(A_0 + d),\ 2A_- = A_0 + d,\ A_0 > 0,\ A_0 \geq -d\}. \tag{3.3}$$

Здесь введены обозначения $B = \mathcal{Y}_1 + i\mathcal{Y}_2$, $C = \mathcal{Y}_1 - i\mathcal{Y}_2$; $d \in \mathbb{R}$ – параметр, нумерующий листы.

Если $d < 0$, то лист Ω диффеоморфен двумерной плоскости.

Если $d \geq 0$, то двумерный лист Ω диффеоморфен цилиндру и получается из замыкания (3.3) путем выкидывания точки

$$(A_0, A_-, B, C) = (0, \frac{d}{2}, 0, 0).$$

(В общем случае существуют и другие симплектические листы алгебры (3.2). Но в реализации (3.1) они отсекаются неравенством $A_0 > 0$.)

Далее, для определенности, мы остановимся на случае $d < 0$.

На листах Ω введем следующую комплексную координату:

$$z = \frac{C}{A_0}. \tag{3.4}$$

Образующие $A_0|_\Omega$, $A_-|_\Omega$, $B|_\Omega$, $C|_\Omega$ выражаются через z, $\bar{z}$ по формулам:

$$A_0 = |z|^2 - d, \qquad A_- = \frac{|z|^2}{2}, \qquad B = \bar{z}(|z|^2 - d), \qquad C = z(|z|^2 - d). \tag{3.5}$$

Симплектическая структура на листах Ω, соответствующая пуассоновой алгебре (3.2), имеет вид

$$\omega_0 = \frac{i}{2} d\bar{z} \wedge dz = \partial_{\bar{z}} \theta_0, \qquad \theta_0 = \frac{i}{2} \bar{z}\, dz. \tag{3.6}$$

Кэлеров потенциал равен

$$F_0 = \frac{|z|^2}{2}.$$

4 Неприводимые антиголоморфные представления квантовой резонансной алгебры

4.1 Гильбертово пространство

Пусть n, m – целые, причем

$$m \geq 0, \qquad 2m > n. \tag{4.1}$$

Обозначим $\Delta_{n,m} \stackrel{def}{=} m - \left[\frac{n}{2}\right]$. Тогда $\Delta_{n,m} \geq 1$.

Рассмотрим функцию

$$\ell_{n,m}(r) = \frac{\Gamma(\Delta_{n,m}+\frac{1}{2})}{2\Gamma(\Delta_{n,m}+\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2})}\, e^{-\frac{r}{2h}} \left(\frac{r}{2h}\right)^{\Delta_{n,m}-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2}} \Psi\Big(\Delta_{n,m}-\frac{1}{2}, \Delta_{n,m}+\frac{1+(-1)^n}{2}; \frac{r}{2h}\Big). \tag{4.2}$$

где функция

$$\Psi(a,c;x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}\, dt \qquad (\operatorname{Re} a > 0)$$

– это решение вырожденного гипергеометрического уравнения $xy''(x) + (c-x)y'(x) - ay = 0$ в полуплоскости $\operatorname{Re} x > 0$ [17]. Поэтому функция $\ell_{n,m}(r)$ является решением следующей задачи для вырожденного гипергеометрического уравнения:

$$2hr\ell''(r) + \Big[h\Big(3-(-1)^n - 2\Delta_{n,m}\Big) + r\Big]\ell'(r) + \Big(\frac{3}{2} - \Delta_{n,m}\Big)\ell(r) = 0,$$
$$\int_0^\infty \ell(r)\, dr = h, \qquad \ell(r) > 0.$$

В зависимости от значений параметров n, m при $r \to 0$ эта функция либо регулярна, либо имеет логарифмическую особенность:

$$\ell_{n,m}(r) \to \begin{cases} \text{const}, & \text{если } n \text{ – четное или } \Delta_{n,m} > 1, \\ \\ \text{const} \ln \frac{1}{r}, & \text{если } n \text{ – нечетное и } \Delta_{n,m} = 1. \end{cases}$$

На бесконечности (при $r \to \infty$) она экспоненциально убывает:

$$\ell(r) \to \text{const}\; r^{\frac{(-1)^n}{2}} e^{-\frac{r}{2h}}.$$

Обозначим через $\mathcal{P}[n,m]$ пространство антиголоморфных рядов

$$\psi(\bar z) = \sum_{j=0}^\infty \psi_j \bar z^j \qquad (z \in \mathbb{C})$$

со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{n,m} = \int_{\mathbb{C}} \varphi(\bar z) \overline{\psi(\bar z)}\, d\mu_{n,m}(z, \bar z), \qquad d\mu_{n,m}(z,\bar z) = \frac{1}{2\pi h} \ell_{n,m}(|z|^2)\, dz\, d\bar z. \tag{4.3}$$

В пространстве $\mathcal{P}[n,m]$ существует ортонормированный базис, состоящий из следующих мономов:

$$\rho_k^{n,m}(\bar z) = \gamma_k^{n,m} \bar z^k, \qquad \text{где} \quad \gamma_k^{n,m} = \sqrt{\frac{(\Delta_{n,m}+\frac{1}{2})_k}{k!(\Delta_{n,m}+\frac{1+(-1)^n}{2})_k (2h)^k}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.4}$$

4.2 Неприводимые представления

Теорема 4.1. *Пусть* n, m *– целые, причем выполнены условия* (4.1)*. Тогда операторы второго порядка в пространстве* $\mathcal{P}[n,m]$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A}_0 &= h\Big(2m-n+2\bar z\frac{d}{d\bar z}\Big),\\ \overset{\circ}{A}_- &= h\bar z\frac{d}{d\bar z}\\ \overset{\circ}{B} &= 2h\bar z\Big(m-\Big[\frac{n}{2}\Big]+\frac{1}{2}+\bar z\frac{d}{d\bar z}\Big),\\ \overset{\circ}{C} &= 4h^2\Big(m-\Big[\frac{n+1}{2}\Big]+1+\bar z\frac{d}{d\bar z}\Big)\frac{d}{d\bar z} \end{aligned} \tag{4.5}$$

задают неприводимое эрмитово представление резонансной алгебры (2.12), (2.13)*. Это антиголоморфное представление соответствует симплектическому листу* $\Omega=\Omega[n,m]$*, диффеоморфному плоскости, с параметром*

$$d=h(n-2m)<0.$$

4.3 Голоморфные когерентные состояния

Пусть выполнены условия (4.1). Пусть задано произвольное эрмитово представление $\mathbf{R}\overset{def}{=}(\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_-,\mathbf{B},\mathbf{C})$ соотношений (2.12), (2.13) в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $\chi_0^{n,m}\in\mathcal{H}$ - нормированный "вакуумный" вектор, удовлетворяющий условиям

$$\mathbf{C}\chi_0^{n,m}=0,\qquad \mathbf{A}_0\chi_0^{n,m}=h(2m-n)\chi_0^{n,m},\qquad \mathbf{A}_-\chi_0^{n,m}=0. \tag{4.6}$$

Определим в $\mathcal{H}$ семейство векторов

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_z^{n,m} &= \Gamma\Big(m-\Big[\frac{n+1}{2}\Big]\Big)\Big(\frac{\sqrt{z\mathbf{B}}}{2h}\Big)^{[\frac{n+1}{2}]-m} I_{m-[\frac{n+1}{2}]}\Big(\frac{\sqrt{z\mathbf{B}}}{h}\Big)\chi_0^{n,m}=\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m-[\frac{n+1}{2}]+1)}{k!\Gamma(k+m-[\frac{n+1}{2}]+1)}\Big(\frac{z\mathbf{B}}{4h^2}\Big)^k\chi_0^{n,m}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

параметризованное комплексной переменной $z\in\mathbb{C}$. Здесь

$$I_\nu(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}(\frac{y}{2})^{2k+\nu}$$

– функция Бесселя мнимого аргумента.

Обозначим через $\mathcal{H}[n,m]\subset\mathcal{H}$ подпространство в $\mathcal{H}$, на котором реализуется неприводимое представление с вакуумным вектором $\chi_0^{n,m}$. Тогда

$$\mathfrak{H}_z^{n,m}=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\rho_k^{n,m}(\bar z)}\chi_k^{n,m}, \tag{4.8}$$

где $\{\rho_k^{n,m}\}$ – ортонормированный базис (4.4) в пространстве $\mathcal{P}[n,m]$ антиголоморфного представления (4.5), а векторы

$$\{\chi_k^{n,m}\}=\frac{\Gamma(m-[\frac{n+1}{2}]+1)}{k!\,\gamma_k^{n,m}\Gamma(k+m-[\frac{n+1}{2}]+1))}\Big(\frac{\mathbf{B}}{4h^2}\Big)^k\chi_0^{n,m},\qquad k\in\mathbb{Z}_+ \tag{4.9}$$

образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathcal{H}[n,m] \subset \mathcal{H}$ неприводимого представления алгебры (2.12), (2.13). Базис $\{\chi_k^{n,m}\}$ является собственным для коммутирующих операторов $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_-$. Операторы $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_-$ принимают в этом базисе следующие значения:

$$\mathbf{A}_0\chi_k^{n,m} = h(2m-n+2k)\chi_k^{n,m}, \qquad \mathbf{A}_-\chi_k^{n,m} = hk\chi_k^{n,m}.$$

Теорема 4.2. *Семейство векторов* $\{\mathfrak{H}_z^{n,m} \mid z \in \mathbb{C}\}$ *является полным в* $\mathcal{H}[n,m]$, *т.е. для любого* $\Psi \in \mathcal{H}[n,m]$,

$$\Psi = \int_{\mathbb{C}} (\Psi, \mathfrak{H}_z^{n,m})_{\mathcal{H}} \mathfrak{H}_z^{n,m}\, d\mu_{n,m}(z,\bar{z}).$$

Таким образом, (4.7) является семейством когерентных состояний.

4.4 Голоморфные когерентные состояния в $L^2(\mathbb{R}^3)$

Рассмотрим теперь исходное представление $\mathbf{R} = \hat{R} = (\hat{A}_0, \hat{A}_-, \hat{B}, \hat{C})$ (2.3), (2.7) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда базис $\{\chi_k^{n,m}\}$ (4.9),(4.6) имеет вид

$$\chi_k^{n,m}(x_+, x_-, x_0) = c_k^{n,m}(\sqrt{2}\hat{\xi}_+^* - \hat{\xi}_0^*)^m(\hat{\xi}_+^* + \sqrt{2}\hat{\xi}_0^*)^k(\hat{\xi}_-^*)^{2m-n+2k}\chi_0^{0,0}(x_+, x_-, x_0). \qquad (4.10)$$

Здесь

$$\chi_0^{0,0}(x_+, x_-, x_0) = \frac{1}{(\pi h)^{3/4}} \exp\Big\{ -\frac{x_+^2 + x_-^2 + x_0^2}{2h} \Big\} \qquad (4.11)$$

– нормированный вектор, который аннулируется операторами комплексной структуры $\hat{\xi}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + i\hat{p}_j)$:

$$\hat{\xi}_j\chi_0^{0,0} = 0, \qquad j \in \{+,-,0\};$$

$c_k^{n,m}$ - нормировочная константа:

$$c_k^{n,m} = \frac{1}{\sqrt{3^{m+k}h^{3m+3k-n}(2m-n+2k)!m!k!}}. \qquad (4.12)$$

Формулы (4.8), (4.10) – (4.12) задают семейство когерентных состояний в $L^2(\mathbb{R}^3)$.

4.5 Воспроизводящее ядро

Вернемся к произвольному эрмитову представлению $\mathbf{R}$ алгебры (2.12), (2.13) в некотором абстрактном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Скалярное произведение двух когерентных состояний (4.7) обозначим через

$$\mathcal{K}^{n,m}(z', \overline{z''}) \stackrel{def}{=} (\mathfrak{H}_{z'}^{n,m}, \mathfrak{H}_{z''}^{n,m})_{\mathcal{H}}. \qquad (4.13)$$

Тогда из (4.8), (4.4) получим

$$\mathcal{K}^{n,m}(z', \overline{z''}) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\rho_k^{n,m}(\overline{z'})}\, \rho_k^{n,m}(\overline{z''}) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^{n,m}(z'\overline{z''})^k =$$

$$= \Phi\Big(\Delta_{n,m} + \frac{1}{2}, \Delta_{n,m} + \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2}; \frac{z'\overline{z''}}{2h}\Big) \stackrel{def}{=} k^{n,m}(z'\overline{z''}). \qquad (4.14)$$

Здесь использованы обозначения из раздела 4.1; $\Phi(a,c;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!(c)_k} x^k$ – вырожденный гипергеометрический ряд.

Ряд $k_{n,m}(r)$ является единственным решением следующей задачи для вырожденного гипергеометрического уравнения:

$$2hrk''(r) + \Big[2h\Big(\Delta_{n,m} + \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2}\Big) - r\Big]k'(r) - (\Delta_{n,m} + \frac{1}{2})k(r) = 0, \qquad k(0) = 1.$$

Теорема 4.3. *Функция* $\mathcal{K}^{n,m}(z', \overline{z''})$ (4.14) *является воспроизводящим ядром в подпространстве* $\mathcal{P}[n,m]$ *неприводимого антиголоморфного представления* (4.5). *Она удовлетворяет следующему воспроизводящему свойству:*

$$\int \mathcal{K}^{n,m}(z', \bar{z})\, \mathcal{K}^{n,m}(z', \overline{z''})\, d\mu_{n,m}(z, \bar{z}) = \mathcal{K}^{n,m}(z', \overline{z''}), \tag{4.15}$$

где мера $d\mu_{n,m}(z,\bar{z})$ *определена по формулам* (4.3), (4.2). *Таким образом,* $\mathcal{K}^{n,m}$ *является в* $\mathcal{P}[n,m]$ *ядром единичного оператора.*

4.6 Когерентное преобразование пространства антиголоморфного представления

Лемма 4.1. *Когерентные состояния* $\mathfrak{H}_z^{n,m}$ (4.7) *обладают следующим сплетающим свойством:*

$$\mathbf{A}_0 \mathfrak{H}_z^{n,m} = \overline{\mathring{A}}_0 \mathfrak{H}_z^{n,m}, \qquad \mathbf{A}_- \mathfrak{H}_z^{n,m} = \overline{\mathring{A}}_- \mathfrak{H}_z^{n,m},$$
$$\mathbf{B} \mathfrak{H}_z^{n,m} = \overline{\mathring{C}} \mathfrak{H}_z^{n,m}, \qquad \mathbf{C} \mathfrak{H}_z^{n,m} = \overline{\mathring{B}} \mathfrak{H}_z^{n,m}.$$

Операторы $\overline{\mathring{A}}_j$, $\overline{\mathring{B}}$, $\overline{\mathring{C}}$, *стоящие в правых частях этих формул, получаются путем комплексного сопряжения операторов* $\mathring{A}_j$, $\mathring{B}$, $\mathring{C}$ (4.5), *т.е. они действуют по переменной* z.

Зададим отображение $\mathfrak{H} : \mathcal{P}[n,m] \to \mathcal{H}[n,m]$:

$$\mathfrak{H}(\varphi) \stackrel{def}{=} \int \varphi(\bar{z})\, \mathfrak{H}_z^{n,m}\, d\mu_{n,m}(z,\bar{z}), \qquad \varphi \in \mathcal{P}[n,m]. \tag{4.16}$$

Теорема 4.4. *Когерентное преобразование* $\mathfrak{H} : \mathcal{P}[n,m] \to \mathcal{H}[n,m]$, *заданное формулой* (4.16), *является унитарным. Обратное преобразование имеет вид*

$$(\mathfrak{H}^{-1}\Psi)(\bar{z}) = (\Psi, \mathfrak{H}_z^{n,m})_{\mathcal{H}} \qquad \forall \Psi \in \mathcal{H}[n,m].$$

При этом для каждого фиксированного $w \in \mathbb{C}$ *преобразование* $\mathfrak{H}$ *переводит вырожденный гипергеометрический ряд* $k_{n,m}(w\bar{z})$ *в когерентное состояние* $\mathfrak{H}_w^{n,m}$. *Выполнены формулы композиции:*

$$\mathbf{R} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \circ \mathring{R}, \quad \text{где} \quad \mathbf{R} = (\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_-, \mathbf{B}, \mathbf{C}), \quad \mathring{R} = (\mathring{A}_0, \mathring{A}_-, \mathring{B}, \mathring{C}),$$

т.е. $\mathfrak{H}$ *сплетает абстрактное представление* $\mathbf{R}$ *резонансной алгебры в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *с неприводимым антиголоморфным представлением* $\mathring{R}$ *этой алгебры в гильбертовом пространстве* $\mathcal{P}[n,m]$.

5 Неприводимое представление резонансной алгебры над кривой в симплектическом листе

5.1 Λ-когерентные состояния и амплитуда перехода

На симплектическом листе $\Omega[n,m]$ (3.3) с параметром $d = h(n-2m) < 0$ рассмотрим одномерную замкнутую кривую Λ:

$$\Lambda = \{z = z(\alpha)\},$$

где z комплексная координата (3.4) на листе $\Omega[n,m]$. Подчиним Λ следующему условию квантования

$$\left(\frac{1}{2\pi h}\int_\Sigma \omega_0 - \frac{1}{4}m(\Sigma)\right) \in \mathbb{Z} \tag{5.1}$$

для любой двумерной пленки $\Sigma \subset \Omega[n,m]$ с границей $\partial\Sigma = \Lambda$. Здесь ω_0 - симплектическая форма (3.6) на $\Omega[n,m]$; $m(\Sigma)$ – индекс пленки (см. [18, 19]).

Λ-когерентные состояния определим по формуле

$$\mathfrak{h}_\alpha^{n,m} \stackrel{der}{=} \sqrt{z'(\alpha)}\exp\left\{\frac{i}{h}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\theta_0\right\}\mathfrak{H}_{z(\alpha)}^{n,m}(x_+,x_-,x_0). \tag{5.2}$$

Здесь $\mathfrak{H}_{z(\alpha)}^{n,m}(x_+,x_-,x_0)$ – голоморфные когерентные состояния (4.8), (4.10) в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$; первообразная θ_0 (3.6) симплектической формы ω_0 интегрируется вдоль кривой Λ; $z'(\alpha) \equiv dz(\alpha)/d\alpha$.

Семейство Λ-когерентных состояний (5.2) на кривой является гладкой функцией от $\alpha \in \Lambda$.

Введем *амплитуду перехода* на Λ:

$$a_\Lambda(\beta|\alpha) = (\mathfrak{h}_\alpha^{n,m}, \mathfrak{h}_\beta^{n,m})_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

В силу (4.15), для амплитуды перехода имеет место формула

$$a_\Lambda(\beta|\alpha) = \sqrt{z'(\alpha)\overline{z'(\beta)}}\exp\left\{\frac{i}{h}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\theta_0 - \frac{i}{h}\int_{\beta_0}^{\beta}\bar{\theta}_0\right\}k^{n,m}(z(\alpha),\overline{z(\beta)}).$$

где $k^{n,m}$ – вырожденный гипергеометрический ряд (4.14).

5.2 Гильбертово пространство представления над кривой

Чтобы определить скалярное произведение в пространстве функций над кривой $\Lambda \subset \Omega[n,m]$, мы используем амплитуду a_Λ (см. [15]). А именно, для $\phi, \phi' \in C^\infty(\Lambda)$ положим

$$(\phi,\phi')_\Lambda = \int_\Lambda d\alpha \int_\Lambda d\beta\, a(\beta|\alpha)\,\phi(\alpha)\,\overline{\phi'(\beta)}. \tag{5.3}$$

Пусть $\mathcal{L}_\Lambda$ – ортогональное дополнение к ядру $\{\phi|(\phi,\phi')_\Lambda = 0\}$ этой билинейной формы. Тогда $\mathcal{L}_\Lambda$ – гильбертово пространство со скалярным произведением (5.3).

Пространство $\mathcal{L}_\Lambda$ можно описать явно. Для этого определим функции $a_j \in C^\infty(\Lambda)$:

$$a_k(\alpha) = \sqrt{\bar{z}'(\alpha)}\exp\left\{-\frac{i}{h}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\theta_0\right\}\rho_k^{n,m}(\bar{z}(\alpha)), \tag{5.4}$$

где $\rho_k^{n,m}$ – мономы (4.4).

Теорема 5.1. [12] Гильбертово пространство $\mathcal{L}_\Lambda$ функций над кривой Λ совпадает с линейной оболочкой функций $\{a_j | j = 0, 1, \dots\}$, заданных формулой (5.4). Отображение $\tau_\Lambda : \mathcal{L}_\Lambda \to \mathcal{P}[n, m]$:

$$\begin{aligned} \tau_\Lambda(\phi)(\bar{z}) &\stackrel{def}{=} \int_\Lambda \phi(\alpha)\sqrt{z'(\alpha)} \exp\left\{\frac{i}{h}\int_{\alpha_0}^{\alpha} \theta_0\right\} k_{n,m}(z(\alpha)\bar{z})\, d\alpha \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^{n,m}(\bar{z}) \int_\Lambda \overline{a_k(\alpha)}\, \phi(\alpha)\, d\alpha. \end{aligned} \tag{5.5}$$

является унитарным изоморфизмом.

5.3 Операторы неприводимого представления над кривой

Используя изоморфизм τ_Λ (5.5), мы переведем неприводимое представление резонансной алгебры (2.12), (2.13), заданное в (4.5), из пространства антиголоморфных функций $\mathcal{P}[n, m]$ в пространство $\mathcal{L}_\Lambda$ функций над кривой Λ.

Теорема 5.2. *Пусть n, m целые, удовлетворяющие условиям* (4.1). *Предположим, что замкнутая кривая $\Lambda \subset \Omega[n, m]$ удовлетворяет условию квантования* (5.1). *Тогда имеют место следующие утверждения.*

(a) *Операторы второго порядка*

$$\begin{aligned} \check{A}_0 &= |z|^2 + h(2m - n - 1) - 2hD[z], \\ \check{A}_- &= \frac{|z|^2}{2} - \frac{h}{2} - hD[z], \\ \check{B} &= \frac{2}{z}(\check{A}_- + h)\Big(\check{A}_0 + \frac{h(3 + (-1)^n)}{2}\Big) = \bar{z}\Big(|z|^2 + h\Big(2m - 2\Big[\frac{n+1}{1}\Big]\Big)\Big) - \\ &\quad - 4hD\Big[|z|^2 + h\Big(m - \Big[\frac{n+1}{1}\Big]\Big)\Big] + 2h^2(D[1]D[z] + D[z]D[1]), \\ \check{C} &= z\Big(\check{A}_0 - \frac{h(1 + (-1)^n)}{2}\Big) = z\Big(|z|^2 + h\Big(2m - n - \frac{1 + (-1)^n}{2}\Big)\Big) - 2hD[z^2] \end{aligned} \tag{5.6}$$

задают неприводимое эрмитово представление резонансной алгебры (2.12), (2.13) *в пространстве $\mathcal{L}_\Lambda$ функций на кривой. Здесь через $D[f]$ для каждой гладкой функции $f(z, \bar{z})$ обозначен дифференциальный оператор первого порядка, заданный на пространстве гладких функций на симплектическом листе $\Omega[n, m]$:*

$$D[f] = \frac{f(z(\alpha), \bar{z}(\alpha))}{z'(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} + \frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\Big(\frac{f(z(\alpha), \bar{z}(\alpha))}{z'(\alpha)}\Big).$$

(b) *Λ-когерентные состояния $\mathfrak{h}_\alpha$* (5.2) *сплетают представление* (2.3), (2.7) *резонансной алгебры* (2.12), (2.13) *с неприводимым представлением* (5.6) *в пространстве $\mathcal{L}_\Lambda$. А именно, интегральное преобразование*

$$\mathfrak{h} : \mathcal{L}_\Lambda \to L^2(\mathbb{R}^3), \qquad \mathfrak{h}(\phi) \stackrel{def}{=} \int_\Lambda \phi(\alpha)\, \mathfrak{h}_\alpha^{n,m}\, d\alpha \tag{5.7}$$

переводит представление $\check{R} = (\check{A}_0, \check{A}_-, \check{B}, \check{C})$ над кривой в представление $\hat{R} = (\hat{A}_0, \hat{A}_-, \hat{B}, \hat{C})$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$\hat{R} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \check{R}.$$

Преобразование $\mathfrak{h}$ является унитарным изоморфизмом из $\mathcal{L}_\Lambda$ в подпространство $L[n, m]$ неприводимого представления резонансной алгебры в $L^2(\mathbb{R}^3)$.

6 Когерентное преобразование спектральной задачи

6.1 Спектральная задача в различных представлениях резонансной алгебры

С помощью теоремы 5.2 спектральная задача в любом представлении резонансной алгебры (2.12), (2.13) может быть переформулирована в терминах дифференциального уравнения либо в голоморфной карте на $\Omega[n,m]$, либо глобально на кривой $\Lambda \subset \Omega[n,m]$. В частности, это можно сделать для спектральной задачи в представлении (2.3), (2.7), заданном в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Более подробно, пусть задано некоторое представление $\mathbf{R} = (\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_-, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ соотношений (2.12), (2.13) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Предположим, что исходная спектральная задача в этом представлении имеет вид

$$g(\mathbf{R})\Phi = \lambda\Phi, \qquad \Phi \in \mathcal{H}, \tag{6.1}$$

где g – функция четырех переменных. Тогда интегральное преобразование (4.16)

$$\Phi = \mathfrak{H}(\varphi) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(\bar{z})\mathfrak{H}_z^{n,m}\, d\mu_{n,m}(z,\bar{z}) \tag{6.2}$$

преобразует задачу (6.1) к задаче

$$g(\mathring{R})\varphi = \lambda\varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{P}[n,m]. \tag{6.3}$$

в неприводимом эрмитовом представлении $\mathring{R}$ (4.5) соотношений (2.12), (2.13) над $\Omega[n,m]$.

Решением задачи (6.3) является некоторый ряд

$$\varphi(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j \rho_j^{n,m}(\bar{z}), \tag{6.4}$$

где $\{\rho_j^{n,m}\}$ – ортонормированный базис мономов (4.4) в $\mathcal{P}[n,m]$. Поэтому формула (6.2) принимает вид

$$\Phi = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j \chi_j^{n,m}, \tag{6.5}$$

где $\{\chi_j^{n,m}\}$ – ортонормированный базис (4.9) в подпространстве $\mathcal{H}[n,m] \subset \mathcal{H}$, на котором задано неприводимое представление алгебры (2.12).

Аналогично, с помощью интегрального преобразования (5.7)

$$\Phi = \mathfrak{h}(\phi) = \int_{\Lambda} \phi(\alpha)\mathfrak{h}_\alpha^{n,m}\, d\alpha,$$

задачу (6.1) можно преобразовать к задаче над кривой Λ:

$$g(\check{R})\phi = \lambda\phi, \qquad \phi \in \mathcal{L}_\Lambda \tag{6.6}$$

в неприводимом представлении $\check{R}$ (5.6) соотношений (2.12).

Решения задач (6.3) и (6.6) связаны соотношением

$$\varphi = \tau_\Lambda(\phi),$$

где τ_Λ – оператор (5.5). Поскольку применяемые здесь интегральные преобразования унитарны, то

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}} = \|\varphi\|_{n,m} = \|\phi\|_\Lambda.$$

6.2 Спектральная задача в антиголоморфном представлении

Теперь рассмотрим дважды усредненную спектральную задачу (2.5) в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$. В силу формул

$$\hat{S}_0\, \mathfrak{H}_z^{n,m} = hn\, \mathfrak{H}_z^{n,m}, \qquad \hat{S}_1\, \mathfrak{H}_z^{n,m} = hm\, \mathfrak{H}_z^{n,m},$$

при любых амплитудах φ интегральное представление $\Phi = \mathfrak{H}(\varphi)$ задает точные решения первых двух уравнений (2.5). В третьем уравнении (2.5) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ используется представление $\mathbf{R} = \hat{R}$ (2.3), (2.7). В силу формулы (2.9), это уравнение имеет вид

$$s\Big(a\hat{A}_0^2 + \hat{b}\hat{A}_0 + \hat{c} - \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})\Big)\Phi = \lambda\Phi,$$

где коэффициенты a, $\hat{b}$, $\hat{c}$ заданы в (2.10). В антиголоморфном представлении ему соответствует уравнение (6.3) для ряда φ. Оно является дифференциальным уравнением второго порядка:

$$s\Big(a\mathring{A}_0^2 + b\mathring{A}_0 + c - \frac{1}{2}(\mathring{B} + \mathring{C})\Big)\varphi(\bar{z}) = \lambda\varphi(\bar{z}), \tag{6.7}$$

или, более подробно,

$$\bar{z}(2a\bar{z} - 1)\frac{d^2\varphi}{d\bar{z}^2} - \Big(\frac{\bar{z}^2}{2h} - \Big(2a(2m - n + 1) + \frac{b}{h}\Big)\bar{z} + \Big(m - \Big[\frac{n+1}{2}\Big] + 1\Big)\Big)\frac{d\varphi}{d\bar{z}} -$$
$$- \Big(\frac{1}{2h}\Big(m - \Big[\frac{n}{2}\Big] + \frac{1}{2}\Big)\bar{z} - \frac{a}{2}(2m-n)^2 - \frac{b}{2h}(2m - n) - \frac{1}{2h^2}\Big(c - \frac{\lambda}{s}\Big)\Big)\varphi(\bar{z}) = 0.$$

Здесь коэффициенты b и c получаются из операторов $\hat{b}$, $\hat{c}$ путем формальной замены $\hat{S}_0$, $\hat{S}_1$ их собственными значениями hn, hm.

Собственные числа и нормированные собственные функции этого уравнения обозначим через $\lambda_k^{n,m}$ и $\varphi_k^{n,m}$ ($k \in \mathbb{Z}_+$), или более кратко λ_k и φ_k. Разложим φ_k по ортонормированному базису в $\mathcal{P}[n,m]$:

$$\varphi_k(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_k^j \rho_j(\bar{z}).$$

Тогда для нормированных собственных функций $\Phi_k \in \mathcal{L}[n,m]$ задачи (2.5) получим представление в виде (6.5), т.е.

$$\Phi_k = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_k^j \chi_j.$$

Используя формулы (2.6), отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Пусть $\varepsilon \ll 1$. Собственные значения и собственные функции гамильтониана* (1.3) *электрона в плоской ловушке Пеннинга имеют вид*

$$E = E_k^{n,m} = \frac{\omega_0 h}{2}\Big(n + \frac{3}{2}\Big) + \frac{\varepsilon h}{4}\Big(6m - n + \frac{3}{2}\Big) + \varepsilon^2\lambda_k + O(\varepsilon^3),$$

$$\Psi = \Psi_k^{n,m} = \int_{\mathbb{C}} \varphi_k(\bar{z})\, U\tilde{U}\mathfrak{H}_z^{n,m}\, d\mu_{n,m}(z,\bar{z}) + O(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_k^j\, U\tilde{U}\chi_k^{n,m} + O(\varepsilon).$$

Здесь λ_k, $\varphi_k(\bar{z})$ – решения уравнения (6.7) *в пространстве антиголоморфных рядов, а U, $\tilde{U}$ – деусредняющие операторы* (2.1), (2.4).

7 Квазиклассическое приближение

7.1 Геометрический смысл операторов представления на кривой

Теперь рассмотрим когерентное преобразование $\mathfrak{h}$ (5.7) в пространстве функций над кривой $\Lambda \subset \Omega[n,m]$. Оно удобно с точки зрения квазиклассического приближения по параметру $h \to 0$. Ключевым моментом является геометрический смысл операторов (5.6).

Напомним, что на симплектических листах $\Omega[n,m]$ координатные функции A_0, A_-, B, C выражаются через z, $\bar z$ (3.4) по формулам (3.5). Далее, из (3.2) следует, что функциям A_0, A_-, B, C соответствуют следующие гамильтоновы поля:

$$\begin{aligned} &ad(A_0) = -2iz\frac{\partial}{\partial z} + 2i\bar z\frac{\partial}{\partial \bar z}, \qquad ad(A_-) = -iz\frac{\partial}{\partial z} + i\bar z\frac{\partial}{\partial \bar z},\\ &ad(B) = -2i(2|z|^2 + h(2m-n))\frac{\partial}{\partial z} + 2i\bar z^2\frac{\partial}{\partial \bar z},\\ &ad(C) = -2iz^2\frac{\partial}{\partial z} + 2i(2|z|^2 + h(2m-n))\frac{\partial}{\partial \bar z}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

Сравнивая формулы (5.6) с (3.5), (7.1), получаем следующее утверждение.

Теорема 7.1. A. *При $h \to 0$ для операторов $\breve A_0, \breve A_-, \breve B, \breve C$ (5.6) выполнены следующие асимптотические формулы:*

$$\begin{aligned} \breve A_0 &= A_0|_\Lambda - h - ih\Big(\breve w_{A_0} + \frac{1}{2}\operatorname{div}\breve w_{A_0}\Big) + O(h^2),\\ \breve A_- &= A_-|_\Lambda - \frac{h}{2} - ih\Big(\breve w_{A_-} + \frac{1}{2}\operatorname{div}\breve w_{A_-}\Big) + O(h^2),\\ \breve B &= B|_\Lambda - \frac{h(1-(-1)^n)}{2}\bar z - ih\Big(\breve w_B + \frac{1}{2}\operatorname{div}\breve w_B\Big) + O(h^2),\\ \breve C &= C|_\Lambda - \frac{h(1+(-1)^n)}{2} z - ih\Big(\breve w_C + \frac{1}{2}\operatorname{div}\breve w_C\Big) + O(h^2). \end{aligned}$$

Здесь A_0, A_-, B, C – координатные функции (3.5) на $\mathbb{R}^4 \supset \Omega[n,m]$, $\breve w_{A_0}, \breve w_{A_-}, \breve w_B, \breve w_C$ – проекции гамильтоновых полей $\mathrm{ad}(A_0), \mathrm{ad}(A_-), \mathrm{ad}(B), \mathrm{ad}(C)$ на кривую $\Lambda \subset \Omega[n,m]$ вдоль $\partial/\partial\bar z$, а через $\operatorname{div}\breve w$ обозначена дивергенция векторного поля $\breve w$ на Λ относительно меры $d\alpha$.

B. *В частности, для квадратичной функции*

$$g(A_0, B, C) = aA_0^2 + bA_0 + c - \frac{1}{2}(B + C)$$

имеет место асимптотика

$$g(\breve A_0, \breve B, \breve C) = g(A_0,B,C)|_\Lambda - ih\Big(\breve w_{g(A_0,B,C)} + \frac{1}{2}\operatorname{div}\breve w_{g(A_0,B,C)}\Big) + hr(A_0,B,C)|_\Lambda + O(h^2),$$

где $\breve w_{g(A_0,B,C)}$ – проекция поля $\mathrm{ad}(g(A_0,B,C))$ на Λ вдоль $\partial/\partial\bar z$, а функция r задается формулой

$$r(A_0,B,C) = -2aA_0 - b + \frac{C+B}{4A_0} + \frac{(-1)^n(C-B)}{4A_0}. \tag{7.2}$$

C. *Пусть кривая* Λ *- это траектория поля* $\mathrm{ad}(g(A_0, B, C))$, *т.е.* $g(A_0, B, C)|_\Lambda =$ *const. Выберем в качестве координаты* α *на* Λ *гамильтоново время* t *на траектории. Тогда выполнена следующая асимптотика:*

$$g(\check{A}_0, \check{B}, \check{C}) = const - ih\frac{d}{dt} + hr(A_0, B, C)|_\Lambda + O(h^2).$$

С помощью Теоремы 7.1(C) получим квазиклассическую асимптотику собственных функций сначала дважды усредненной спектральной задачи (2.5), а затем и исходной спектральной задачи (1.4).

7.2 Выбор кривой Λ

В качестве кривых Λ будем брать линии уровня дважды усредненной функции Гамильтона

$$H_{200} = s\big(aA_0^2 + bA_0 + c - \frac{1}{2}(B + C)\big) = s\, g(A_0, B, C)$$

на $\Omega[n, m]$. Здесь коэффициенты a, b, c – это значения операторов (2.10) на подпространстве, где $\hat{S}_0 = hn$, $\hat{S}_1 = hm$.

Укажем достаточные условия, при которых линии уровня

$$\Lambda(\mu) = \{H_{200} = s\,\mu\} = \{g(A_0, B, C) = \mu\} \tag{7.3}$$

являются замкнутыми кривыми. Для этого рассмотрим кубическое уравнение

$$y^3 + Py + Q = 0,$$

где

$$P = 2ab - 4a^2d - \frac{3}{4}, \qquad Q = ab - \frac{1}{4}, \qquad d = h(n - 2m).$$

Если дискриминант

$$D = \Big(\frac{P}{3}\Big)^3 + \Big(\frac{Q}{3}\Big)^2$$

этого уравнения больше нуля, то оно имеет единственный вещественный корень

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{D}},$$

причем $y_1 > -1/2$. Пусть

$$\mu^* = \frac{1}{16a^3}\Big(y_1 + \frac{1}{2}\Big)^4 - \frac{1}{8a^3}\Big(y_1 + \frac{1}{2}\Big)^3 + \Big(\frac{b}{4a^2} - \frac{d}{2a}\Big)\Big(y_1 + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{d}{2a}(y_1 + \frac{1}{2}) + ad^2 - bd + c.$$

Тогда в случае $\mu < \mu^*$ симплектический лист $\Omega[n, m]$ не пересекается с поверхностью уровня $\{g(A_0, B, C) = \mu\}$. В случае $\mu = \mu^*$ эта поверхность касается листа $\Omega[n, m]$ в одной точке. А при $\mu > \mu^*$ их пересечением является замкнутая кривая. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Лемма 7.1. *Пусть выполнены условия* (4.1), *а также неравенства*

$$D > 0, \qquad \mu > \mu^*.$$

Тогда кривая (7.3) *на симплектическом листе* $\Omega[n, m]$ *диффеоморфна окружности.*

Предположим, что для кривой $\Lambda(\mu)$ выполнено условие квантования (5.1). Оно имеет вид:

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\Sigma_{\Lambda(\mu)}}\omega_0 = k+\frac{1}{2}, \qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{7.4}$$

где ω_0 – симплектическая форма (3.6) на листе $\Omega[n,m]$, а Σ_Λ – двумерная пленка на $\Omega[n,m]$ с границей Λ.

Площадь пленки $S(\mu)=\int_{\Sigma_{\Lambda(\mu)}}\omega_0$ можно выразить через эллиптические интегралы, зависящие от энергии μ. Рассматривая (7.4) как уравнение относительно μ, и решая его, получим квантованные уровни энергии

$$\mu=\mu_k \overset{def}{=} S^{-1}\big((2k+1)\pi h\big).$$

и соответствующие им квантованные кривые Λ: $\Lambda_k=\Lambda(\mu_k)$. Период на кривой Λ обозначим через T_k.

7.3 Квазиклассическая асимптотика

Из теоремы 7.1 следует, что гамильтониан $\check{H}_{200}$ над квантованной кривой Λ_k будет иметь вид дифференциального оператора первого порядка:

$$\check{H}_{200}=s\Big(\mu_k-ih\frac{d}{dt}+hr(A_0,B,C)|_{\Lambda_k}+O(h^2)\Big),$$

где r – функция (7.2), число s задано в (2.10). Очевидно,

$$\phi_k(t)=\exp\Big\{\frac{i}{T_k}\int_0^{T_k}r(A_0,B,C)|_{\Lambda_k}dt-i\int_0^t r(A_0,B,C)|_{\Lambda_k}dt\Big\} \qquad (\mathrm{mod}O(h)), \tag{7.5}$$

является его собственной функцией, отвечающей собственному значению

$$\lambda_k=s\Big(\mu_k+\frac{h}{T_k}\int_0^{T_k}r(A_0,B,C)|_{\Lambda_k}dt+O(h^2)\Big).$$

Теорема 7.2. *Пусть $\varepsilon=O(h)$, $h\ll 1$. Асимптотика собственных значений гамильтониана* (1.3) *электрона в планарной ловушке Пеннинга имеет вид*

$$E=E_k^{n,m}=\frac{\omega_0 h}{2}\Big(n+\frac{3}{2}\Big)+\frac{\varepsilon h}{4}\Big(6m-n+\frac{3}{2}\Big)+\varepsilon^2\Big(s\mu_k+\frac{hs}{T_k}\int_0^{T_k}r(A_0,B,C)|_{\Lambda_k}dt\Big)+O(h^2),$$

где μ_k - решения уравнения (7.4)*. Соответствующие собственные функции задаются формулой*

$$\Psi=\Psi_k^{n,m}=\frac{1}{T_k}\int_0^{T_k}\phi_k(t)\,U\,\tilde{U}\,\mathfrak{h}_t^{n,m}\,dt+O(h).$$

Здесь $\mathfrak{h}_t^{n,m}$ – Λ-когерентные состояния (5.2)*, ϕ_k – функции* (7.5)*, T_k – период на траекториях* (7.3)*, а U, $\tilde{U}$ – деусредняющие операторы* (2.1), (2.4).

Благодарности.

Эта статья продолжает цикл совместных работ [8-11] с М.В. Карасевым и опирается на методы, изложенные в работах [12] – [14], также написанных в соавторстве с М.В. Карасевым. Автор выражает большую благодарность М.В. Карасеву за полезные обсуждения.

Работа поддержана РФФИ (грант № $15-01-08751-a$).

Список литературы

[1] Blaum K. and Herfurth F. (eds.) Trapped Charged Particles and Fundamental Interactions // Springer-Verlag, 2008.

[2] Ghosh P.K. Ion Traps // Callendon Press, Oxford, 1995.

[3] Major F.G., Gheorghe V., and Werth G. Charged Particle Traps // Springer, 2002.

[4] Segal D. and Shapiro M. Nanoscale Paul Trapping of a Single Electron // Nanoletters, 2006, 6 (8), 1622–1626.

[5] Kretzschmar M. Single particle motion in a Penning trap: description in the classical cnnonical formalism // Physica Scripta, 1992, 46, 544–554.

[6] Stahl S., Galve F., Alonso J., Djekic S., Quint W., Valenzuela T., Verdu J., Vogev M., Werth G. A planar Penning trap // Eur. Phys. J. D, 2005, 32, 139–145.

[7] Goldman J., Gabrielse G. Optimized planar Penning traps for quantum information studies // Hyperfine Interact, 2011, 199, 279–289.

[8] Karasev M.V., Novikova E.M. Secondary Resonances in Penning Traps. Non-Lie Symmetry Algebras and Quantum States // Russian Journal of Mathematical Physics, 2013, 20 (3), 283–294.

[9] Karasev M.V., Novikova E.M. Inserted Perturbations Generating Asymptotical Integrability // Mathematical Notes, 2014, 96 (6), 965–970.

[10] Karasev M.V., Novikova E.M. Planar Penning Trap with Combined Resonance and Top Dynamics on Quadratic Algebra // Russian Journal of Mathematical Physics, 2015, 22, 463-468.

[11] Карасев М.В., Новикова Е.М. Устойчивые двумерные торы в ловушке Пеннинга при комбинированном частотном резонансе // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2015, 13(2), 55–92.

[12] Карасев М.В., Новикова Е.М. Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле // Теоретическая и математическая физика, 1996, 108 (3), 339–387.

[13] Karasev M.V. and Novikova E.M. Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding // in Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, 187: Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998), 1–202.

[14] Карасев М.В., Новикова Е.М. Алгебра и квантовая геометрия многочастотного резонанса // Известия РАН, серия математическая, 2010, 74 (6), 55–106.

[15] Karasev M.V. Integrals over Membranes, Transition Amplitudes and Quantization // Russ. J. Math. Phys., 1993, 1 (4), 523–526.

[16] Karasev M.V. Quantization and coherent states over Lagrangian submanifolds // Russ. J. Math. Phys., 1995, 3(3), 393–400.

[17] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1 // Наука, 1965.

[18] Карасев М.В. Асимптотика спектра смешанных состояний для уравнений самосогласованного поля // Теоретическая и математическая физика, 1984, 61(1), 118–127.

[19] Карасев М.В. Пуассоновские алгебры симметрии и асимптотика спектральных серий // Функц. Анализ и его прилож., 1986, 20(1), 21–32.

SPECTRAL CLASTERS IN PLANAR PENNING TRAP WITH RESONANCE BREAKING OF AXIAL SYMMETRY

E.M. Novikova

National Research University Higher School of Economics

emnovikova@hse.ru

Received 15.11.2015

The spectral characteristics of a planar Penning trap with ring electrode and magnetic field deviated from the axial direction are described. The relations between physical parameters are found under which there arises a combined frequency resonance in the harmonic (quadratic) part of the Hamiltonian near the trap center. The averaged anharmonic part of the Hamiltonian is represented as a second order ordinary differential operator with polynomial coefficients. The asymptotics of its eigenvalues and eigenfunctions is obtained. The formula for the asymptotics of eigenstates of the original trap Hamiltonian is found in spectral clasters near th eigenvalues of its harmonic part.