ТОЛЕРАНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И МОЗГ

Э. ЗИМАН и О. БЬЮНЕМАН
(Варвикский университет)

Введение. Толерантное пространство — это математическое понятие, которым удобно пользоваться при описании мозга. Сначала мы покажем, как такие пространства возникают при создании модели мозга, а в конце статьи приведем некоторые точные определения и характеристики.

Для любого мозга характерно создание внутренних образов внешнего мира. Допустим, что внешнее раздражение x вызывает появление в мозгу состояния y. Обозначим некоторое множество внешних раздражений через X, а соответствующее множество состоянии мозга через Y; тогда получим отображение (функцию)

$$f : X \to Y$$

Разумеется, между раздражением x и соответствующим состоянием у может не быть абсолютно никакого сходства; например, x может представлять собой картину, а y — тип волн, возникающих в коре головного мозга. Тем не менее если в мозгу происходит осмысливание всех поступающих сигналов, то способы организации и взаимосвязи различных раздражений друг с другом должны в известной степени отражаться в характере связей между соответствующими состояниями мозга.

Выражаясь математически, следует сказать, что множества X и Y обладают некоторой структурой, и отображение f должно сохранять эту структуру. Немедленно возникают два вопроса:

1. Что это за структура?
2. Что такое «состояния» мозга?

Что такое множество раздражений, понять легче — нас бы удовлетворила теория, в которую укладываются такие понятия, как зрительные образы, осязательные образы, звуки, цвета или запахи.

Математическая структура. Существует много типов математических структур, например симметрия зрительных образов или музыкальный ритм, но структура, которую мы хотим исследовать, выражена гораздо слабее и носит более общий характер; назовем ее *толерантностью*. Это понятие соответствует «наименьшему воспринимаемому различию» (дифференциальному порогу) в психологии. Предположим, что X — это множество раздражений. Если два раздражения x_1 и x_2 в X настолько близки, что не поддаются различению, то мы говорим, что они связаны *отношением толерантности*, или *находятся в пределах толерантности*, и пишем $x_1 \sim x_2$. Если же, напротив, x_1 и x_2 различимы, то мы говорим, что они *не толерантны между собой*. Толерантность ξ есть по определению множество пар (x_1, x_2), таких , что $x_1 \sim x_2$. Множество X с заданной толерантностью ξ называется *толерантным пространством*.

Например, если X — поле зрения, занимающее около четверти сферы, то две точки, находящиеся вблизи центра этого поля, неотличимы друг от друга, т. е. толерантны между собой, если они разделены расстоянием менее 1 угловой минуты, тогда как к периферии поля зрения острота зрения падает и там уже неразличимы точки, находящиеся на расстоянии до 1 углового градуса друг от друга.

Интуитивная идея, лежащая в основе математической теории толерантных пространств, заключается в том, что мы можем перемещаться в пределах толерантности, не замечая никаких различий: если мы должны доказать совпадение двух объектов, то нужно лишь доказать, что они совпадают в пределах толерантности, или, если мы хотим исследовать структурную устойчивость некоторого дифференциального уравнения, это можно сделать лишь в пределах толерантности и т. д. На первый взгляд это кажется серьезным препятствием, но после некоторого размышления подобная идея оказывается весьма гибкой. Другое интригующее обстоятельство состоит в том, что толерантность, подобно топологии, вносит в множество X некоторое понятие близости элементов. Возможно, что представление о близости точек — это несколько неточная аналогия, потому что толерантность в общем не транзитивна, т. е. из $x_1 \sim x_2$ и $x_2 \sim x_3$ не следует, что $x_1 \sim x_3$. Очень важно, чтобы толерантность не была транзитивной, поскольку при приближении к дифференциальному порогу мы всегда приходим к нетранзитивности.

С другой стороны, представление о том, что толерантность вносит в множество X некоторое понятие близости, интуитивно весьма важно. Например, если X — это множество всевозможных спектров излучения (представляющих собой с точки зрения физики бесконечномерное функциональное пространство), а ξ — толерантность, обусловленная характером цветового зрения человека, то ξ преобразует множество X в обычную двумерную цветовую диаграмму, дополненную шкалой интенсивностей.

Многое из того, что относится к топологическим пространствам, можно перенести и в теорию толерантных пространств; поэтому мы заимствуем термины и обозначения из топологии. В частности, мы можем использовать эффективные глобальные топологические инварианты и в то же время пренебречь локальными свойствами, так как последние все находятся в пределах толерантности. Поэтому толерантное пространство напоминает «размазанное» топологическое пространство. Но это и есть та самая математика, которая должна быть полезной при изучении мозга, поскольку в основе любой модели мозга должна лежать детально изученная нейрофизиологическая структура; и все же, построив модель, мы, как правило, ограничиваемся исследованием ее глобальных свойств для изучения мышления и памяти, пренебрегая локальными деталями, неразличимыми в пределах толерантности.

Динамические состояния мозга. Говоря о состоянии мозга в некое данное время, можно иметь в виду две разные вещи. Во-первых, это *динамическое* состояние, которое зависит от химического равновесия и от частоты разрядов всех нейронов в данный момент времени. Экспериментально установлено, что динамическое состояние связано с мыслями или ощущениями, и поэтому можно в общем виде допустить, что динамическое состояние мозга определяет мышление.

Во-вторых, это *статическое* состояние, определяемое наличием сети из 10^{14} нейронов и 10^{15} синапсов и, возможно, многого другого. Следует думать, что память связана со статическим состоянием (речь идет о потенциальной памяти, ибо реализованная память включается в динамическое состояние). Например, во время сна ритм импульсации нейронов и, следовательно, динамическое состояние мозга изменяются, однако статическое состояние будет по-прежнему хранить всю память.

Обозначим множество динамических состояний мозга через Y. Следует ожидать, что достаточно близкие состояния y_1 и y_2 будут определять одну и ту же мысль; записав это в виде $y_1 \sim y_2$, мы тем самым констатируем наличие в Y некоторой внутренне присущей ему толерантности η. Следовательно, эти динамические состояния образуют толерантное пространство (Y, η). Читатель может возразить, что мы еще не дали точного определения динамического состояния мозга, но, на наш взгляд, это не имеет особого значения, поскольку если у нас есть два толерантных пространства (Y, η) и (Y', η'), предназначенных для описания динамических состояний мозга, то между ними имеется толерантный гомеоморфизм (см. определение в конце статьи)

$$g : Y \to Y'.$$

Иными словами, эти два представления будут идентичны с точностью до толерантности. Поэтому понятие толерантного пространства позволяет нам без ущерба выбрать наиболее удобную форму представления с одним лишь условием: она должна быть достаточно детальной.

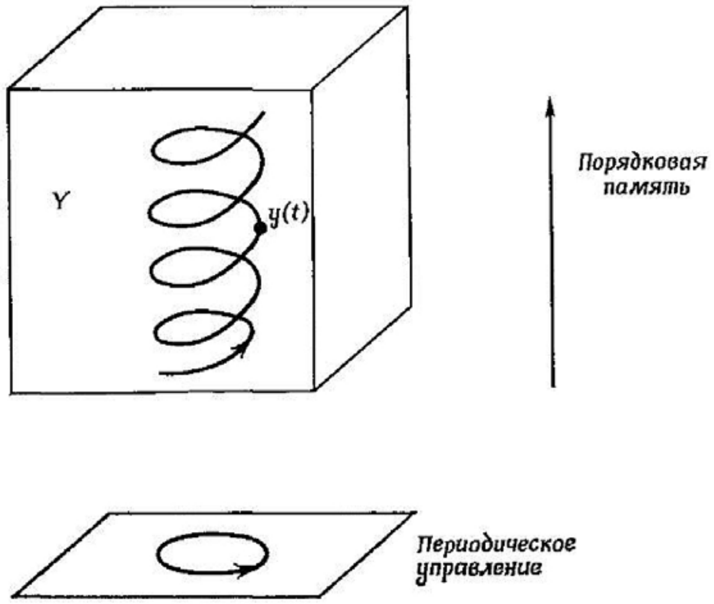
Введенное нами множество Y можно представить как единичный куб размерности 10^{14}. Каждая точка y из множества Y имеет координаты y_i, представляющие собой соответствующим образом параметрированные уровни возбуждения по всем 10^{14} нейронам. Следовательно, каждое состояние Y определяется уровнями возбуждения всех нейронов. Доказательством того, что такое описание достаточно детализировано, служит нормальная работа мозга (и, по-видимому, мышления) при утрате нескольких тысяч нейронов. Иными словами, хотя длина ребра куба равна единице, толерантность в данном случае, по-видимому, сравнительно велика — скажем, любые две точки, находящиеся на расстоянии менее 100, толерантны между собой (диагональ куба составляет 10^7).

Эта модель не учитывает, в частности, деятельности других частей мозга, например клеток глии, однако мы считаем, что этими структурами можно пренебречь в силу изложенных выше соображений. Она игнорирует также фазовые различия между разрядами отдельных нейронов. Однако мы опять-таки допускаем, что в пределах толерантности это не имеет значения, так как эффект залпа импульсов в одном нейроне носит прежде всего аддитивный характер [1]. Фазовые различия становятся существенными в области медленных волн: как показывают эксперименты [2],— в области частот порядка 10 *имп/сек* и ниже (тогда как частоты разрядов в отдельном нейроне составляют 50—1000 *имп/сек*). Сходное положение наблюдается в радиовещании, где нас не интересует фаза несущей радиоволны, тогда как фаза модулирующей звуковой волны имеет существенное значение.

В предлагаемой модели медленные волны могут быть обнаружены визуально, так как с течением времени t точка $y(t)$, представляющая определенное состояние мозга, движется по кубу Y. Медленные волны порядка 10 *имп/сек* будут представлены периодическим, или «спиральным», движением точки $y(t)$ (фиг. 1).

В одних координатах (возможно, представляющих управляющую группу нейронов) «спиральное» движение $y(t)$ может быть периодическим, а в других (возможно, представляющих порядковую память, например запоминание мелодии) — поступательным. Экспериментальные данные показывают, что у кошки и человека [3] подобная активность нейронов связана с памятью.

Поля памяти. Что заставляет точку $y(t)$ двигаться в определенном направлении? Дело в том, что на множестве Y имеется векторное поле υ (иными словами, обыкновенное дифференциальное уравнение), и $y(t)$ движется с точностью до толерантности вдоль траекторий этого поля. Поле υ определяется взаимодействием всех нейронов друг с другом, и, таким образом, в этот один символ υ мы вмещаем всю информацию об эффективности синапсов, величине их порогов, сведения о том, являются ли они возбуждающими или тормозными, и о том, как они действуют в совокупности при всех возможных обстоятельствах. Иными словами, υ — это наша потенциальная память.



Фиг. 1.

Пусть V — совокупность векторных полей на множестве Y. Как и прежде, V обладает некоторой внутренне присущей толерантностью, однако стоит отметить, что толерантные между собой поля могут иметь траектории, начинающиеся в пределах толерантности, но быстро выходящие за ее пределы. Это вносит в наше мышление и память элемент непредсказуемости.

Векторное поле υ, входящее в совокупность V, зависит от времени t и от внешнего раздражения x. Поэтому в данный фиксированный момент времени t соответствие $x \to \upsilon(x)$ даст отображение

$$\upsilon : X \to V$$

Это отображение представляет собой потенциальную память о раздражениях и показывает, как мозг будет реагировать на любое данное раздражение независимо от того, на что он реагировал раньше. Иными словами, υ представляет полную память в момент времени t.

Предположим теперь, что мозг находится в некотором исходном состоянии мышления z из множества Y; векторное поле υ переводит его в «следующую» мысль y. Таким образом, каждое векторное поле определяет некоторую мысль, и мы получаем отображение

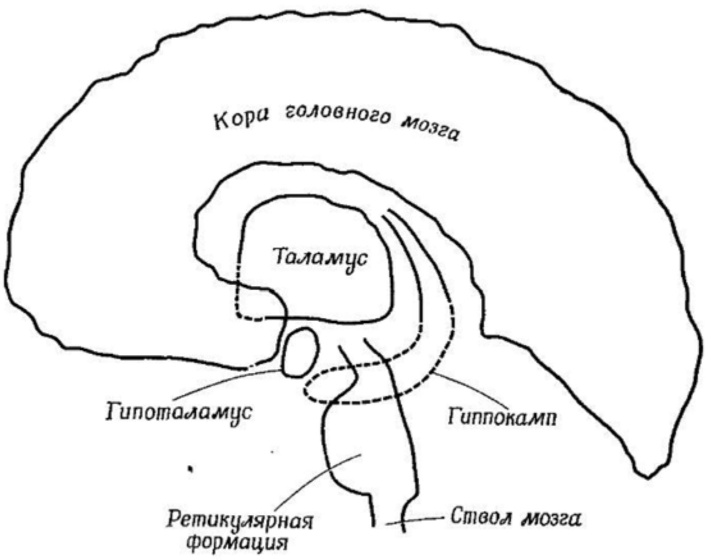
$$\omega_z : V \to Y,$$

представляющее «реализацию» памяти. Мы обозначили отображение через ω_z, потому что оно зависит от исходного состояния z.

Композиция

$$\begin{array}{c} X \xrightarrow{v} V \xrightarrow{w_z} Y, \\ \xrightarrow[f]{\hspace{6em}} \end{array}$$

представляет собой то исходное отображение *f* о котором шла речь вначале. Экспериментальные данные показывают, что и υ и *f* являются *толерантными вложениями* (см. определение в конце статьи, а также [4]). Иными словами, толерантная структура, определенная на множестве раздражений *X*, сохраняется как отображением *f* (мышлением), так и памятью υ.



Фиг. 2.

Разумеется, когда психолог экспериментирует с мозгом, он должен исследовать отображение *f* (мышление). Но *f* зависит от времени и от исходного состояния *z* (которое также зависит от *t*). Поэтому психолог может проводить лишь такие эксперименты, которые по возможности независимы от *z* и *t*. На основании полученных им сведений об *f* он судит о свойствах отображения и (памяти), представляющих значительно больший интерес. В самом деле, υ не только представляет собой толерантное вложение, но, кроме того, соотносит каждому раздражению целую совокупность ассоциаций, потому что поле υ(*x*) прокладывает путь, по которому идет мышление, и почти мгновенно восстанавливает соответствующие ассоциации.

Наличие толерантности в множестве *V* объясняет также, как стирается память об отдаленных событиях. По мере запоминания новых событий поля старой памяти разрушаются и оказываются в пределах толеоантности.

Или, если подходить к этому с противоположной стороны, — возрастает толерантность памяти о старых событиях, что приводит к стиранию подробностей. Так, со временем стираются детские впечатления. Представление о стирании памяти значительно ближе к действительности, чем представление об утрате «битов хранящейся в памяти информации».

Разработка модели. Главная идея состоит в том, чтобы включить в модель различные части мозга (фиг. 2); мы надеемся показать, как представление о толерантных пространствах может облегчить обсуждение этой проблемы. Наша конечная цель (хотя она и не будет достигнута в этой статье) заключается в создании гипотез, поддающихся экспериментальной проверке.

Таламус и другие области среднего мозга отличаются от коры тем, что они содержат множество «паразитирующих» синапсов, которых нет в коре. «Паразитирующим» мы называем описанный Экклсом [1] тип синапса, способного изменять эффективность синапсов, на которых он расположен. Мы предполагаем, что эти синапсы активируются другими частями мозга: гипоталамусом, где расположены центры эмоций и так называемые центры «боли» и «удовольствия», или активирующей системой ретикулярной формации. Векторное поле υ_T, описывающее статическое состояние таламических центров, можно поэтому легко и быстро изменить. Вместе с тем данных, которые бы свидетельствовали о возможности легко изменять эффективность синапсов в коре, нет. Например, Крэгг [5] обнаружил, что, когда у котят прорезываются глаза, для роста синапсов в коре таламуса необходимо действие света в течение нескольких часов.

Для обозначения этих двух типов синапсов мы используем термины «гибкий» и «жесткий». Внезапное болевое ощущение, например, немедленно изменит υ_T «гибкого» таламуса, но не окажет непосредственного воздействия на υ_C «жесткой» коры. Мы предполагаем, что долговременная память связана с изменением «жесткой» коры.

Память. Из анатомии мы знаем, что нервные волокна, идущие к коре, проходят через таламические центры. Мы знаем также, что таламус участвует в формировании всех рефлексов, за исключением простейших. Обозначим множество стимулов через X, а динамические состояния коры и таламуса через C и T. Мы можем составить следующую схему толерантных отображений:

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[d, "k"] \\
X \arrow[r, "f"] & T \arrow[ur, "g"] & \\
 & & C \arrow[ul, "h"]
\end{tikzcd}$$

Прежде чем исследовать возможную природу отображений g, h и k, рассмотрим следствия из этой схемы. Отображение k определяется статическим состоянием всех кортикальных синапсов; отметим, что оно не отличает кодирующие синапсы (например, те, которые возбуждают элементы Хьюбеля — Визеля [6]) и синапсы «памяти». Собственно, мы допустим, что единственное функциональное различие между этими синапсами, по-видимому, обусловлено различиями в их относительной жесткости и что «кодирующий» синапс в результате небольших изменений его эффективности может функционировать и как синапс памяти. В этом случае физиологическое или анатомическое подразделение коры на «анализаторы» и «хранилища» представляется довольно искусственным.

На первый взгляд кажется, что X— внешний мир, а C — внутренний мир нашей памяти и что мышление осуществляется в T посредством сопоставления того и другого; однако было бы неверным считать, что, по нашему мнению, мышление протекает только в таламусе. Мы знаем, что простая реакция в ответ, например, на звуковое раздражение может произойти независимо от коры, тогда как реакция на зрительное раздражение подразумевает участие коры. В одном случае таламус реагирует на f, а в другом — на сложное отображение $\mathrm{f} \cdot g \cdot k \cdot h$ (порядок отображений — слева направо). Мы полагаем также, что таламус может взаимодействовать с корой более или менее независимо от раздражения x, и именно это *взаимодействие* мы предположительно называем мышлением.

Какова природа отображений g и h? Ван Геердеп [7] указал на интересную аналогию с голограммой или фотографией, сделанной с помощью лазера.

Преобразование образа P в голограмму H, которая обратным отображением снова переводится в этот образ, можно записать в виде

$$P \underset{h}{\overset{g}{\rightleftarrows}} H.$$

Изящество метода голографии состоит в том, что хранение в H не носит локального характера; удаление части голограммы H приводит лишь к некоторому размазыванию образа P. Аналогичным образом память об отдельных раздражениях, по-видимому, не специфична для тех или иных отделов коры. Более того, система ван Геердена «ассоциативна» в том смысле, что если в памяти хранится образ P, то сложное отображение $g \cdot h$ образа P_{o}, составляющего часть P, даст «теневой образ» всего P. Для системы ван Геердена требуется наличие когерентного источника, который, возможно, соответствует одному из ритмов гиппокампа, например наблюдавшемуся Эди [2, 8]. Однако вряд ли такой ритм мог обусловить высокие пространственные частоты в коре, необходимые для возникновения таламической активности.

Но вернемся к мозгу. Из анатомии мы знаем, что отображение g осуществляется клетками таламуса, имеющими представительство в коре; каждой такой клетке соответствует небольшая зона в коре. Напротив, проекция коры на таламус весьма специфична. В таком случае отображения g и h в отсутствие интерференции могут быть обратными друг другу и, возможно, вызывать появление α-ритма. Разумеется, активация или определенная направленность внимания создают интерференцию, и α-ритм исчезает.

Остается проблема изменения жесткого векторного поля υ_C коры C. Мы допустили, что υ_C определяется активностью кортикальных синапсов и что эти синапсы могут изменяться лишь в результате активности клеток, которые они соединяют. Изменение активности жестких синапсов, по-видимому, произойдет под влиянием коры. Гартсайд и Липпольд [9}, а также другие авторы показали, что если на несколько минут искусственно увеличить частоту разрядов кортикального нейрона, его спонтанная активность в течение значительного периода времени остается на высоком уровне.

Эта поддерживаемая активность дает способ превращения некоего динамического состояния коры в новое статическое состояние ее векторного поля. Мы можем предположить, что в этом начальном повышении активности участвует гиппокамп (см. [2]), который изменяет υ_T в таламусе таким образом, что υ_T и υ_C «резонируют» до тех пор, пока не возникнет это повышение. Для этого не требуется значительных изменений отдельных синапсов: хотя каждое локальное изменение невелико, изменение результирующего глобального поля выходит за пределы толерантности.

В абстрактном плане взаимодействие (coupling) жесткого кортикального поля υ_C и гибкого поля таламуса υ_T должно привести к возникновению множества периодических явлений. Форма этих явлений будет изменяться вместе с любым изменением υ_T, так, любое изменение активности гипоталамуса или ретикулярной формации немедленно отражается на электрической активности коры. Чтобы выяснить природу этого взаимодействия полей υ_T и υ_C, нам необходимо развить представление об обобщенных трансформациях и взаимодействующих дифференциальных уравнениях в толерантных пространствах. Необходимо понять, каким образом это взаимодействие нарушает резонанс между двумя полями, одновременно изгибая жесткое поле (переход от кратковременной к долговременной памяти); эта ситуация аналогична передаче энергии между взаимодействующими динамическими системами, хотя, разумеется, речь здесь идет не об энергии. Нам надо также представить себе непрерывное наложение таких изменений, чтобы объяснить, как может осуществляться непрерывное превращение непрерывно действующих раздражений в долговременную память.

Язык. Мы хотели бы подчеркнуть спекулятивный характер рассуждений, изложенных в предыдущих разделах. Цель этих рассуждений состояла в том, чтобы показать, как представление о толерантных пространствах может послужить основой для построения общей теории мышления и памяти, в целом достаточно содержательной, чтобы охватить всю деятельность мозга, и достаточно гибкой, чтобы допустить почти любое биохимическое объяснение. Единственный недостаток нашей модели заключается в том, что она еще недостаточно специфична для разработки поддающихся экспериментальной проверке гипотез и, следовательно, ее познавательная ценность невелика. Быть может, ее главная роль состоит в том, чтобы указать подход к этой проблеме с общей точки зрения.

Прежде чем покончить со спекуляциями, мы покажем, как можно использовать представление о толерантных пространствах при обсуждении языка. Мысли иногда искажаются, если облечь их в слова, и этот процесс подразумевает наличие толерантности в множестве мыслей. Передача мыслей от одного человека к другому по схеме

$$\text{Мысли} \to \text{Слова} \to \text{Мысли}$$

должна быть неточной в пределах произведения двух толерантностей. Чем сильнее различаются условия, в которых выросли и живут люди, тем больше это произведение и тем менее точна передача информации от одного из них к другому. Если люди знакомы друг с другом, то соответствующая толерантность значительно уменьшается в результате дополнения языка обертонами в виде оттенков голоса и мимики, и таким образом повышается точность передачи сообщения. Различным языкам соответствует разная толерантность, и поэтому знание двух языков уменьшает соответствующую толерантность, обостряя восприятие. В то же время перевод с языка на язык различными людьми, скажем с английского на русский, по схеме

$$\begin{tikzcd} & \text{Мысли} \arrow[r] & \text{Французский язык} \\ \text{Английский язык} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & \text{Мысли} \arrow[r] & \text{Французский язык} \end{tikzcd}$$

неточен в пределах толерантности, по крайней мере вдвое превышающей обычную. Следовательно, перевод, сделанный одним человеком, всегда будет неточен для другого, как бы старательно он ни был выполнен.

Толерантные пространства. В заключение приведем некоторые определения и перечислим элементарные свойства толерантных пространств.

Определения. Толерантность ξ в множестве X является рефлексивным симметричным отношением. Термин «рефлексивное» означает, что $x \sim x$ для всех x из X, а «симметричное» означает, что из $x_1 \sim x_2$ следует $x_2 \sim x_1$. Отметим, что ξ нетранзитивно. *Толерантное пространство* (X, ξ) — это множество X с заданной в нем толерантностью ξ.

Пример 1. X — множество точек на этом листе бумаги, а ξ — толерантность, определяемая следующим образом: $x_1 \sim x_2$, если расстояние между x_1 и x_2 меньше 1 мм.

Пример 2. X — множество атомов, из которых состоит этот лист бумаги, а ξ — снова толерантность, связывающая два атома, если расстояние между ними меньше 1 *мм*.

Пример 3. Если (X, ξ) — толерантное пространство, а Y — подмножество множества X, то сужение толерантности ξ на пары точек из Y превращает Y в толерантное пространство (Y, ξ).

Пример 4. Предположим, что (X, ξ) — толерантное пространство. Обозначим совокупность всех подмножеств множества X через 2^X. Введем в 2^X толерантность 2^ξ, положив по определению, что $A \sim B$ в 2^X, если любая точка из A толерантна в смысле ξ-толерантности некоторой точке из B и обратно. Это построение позволяет нам перейти от толерантности в множестве точек поля зрения к толерантности в множестве черно-белых картин в этом поле.

Пример 5. Предположим, что (X, ξ) и (Y, η) — толерантные пространства. Тогда $\xi \times \eta$ определяет толерантность в произведении $X \times Y$.

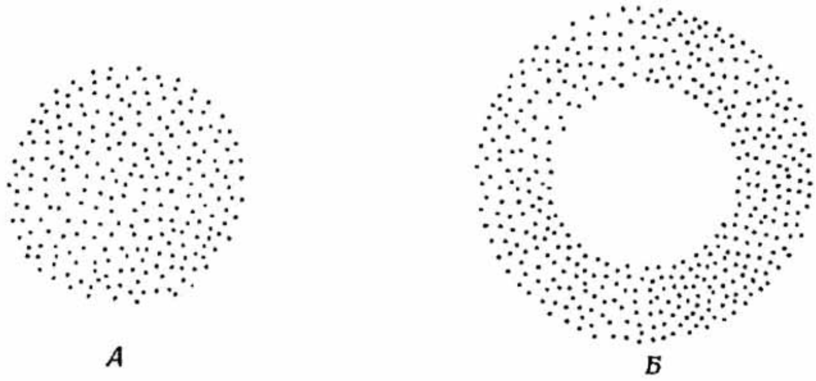
Пример 6. Предположим, что (X, ξ) и (Y, η) — толерантные пространства. Обозначим через Y^X совокупность всех отображений множества X в Y. Определим в Y^X толерантность η^ξ. Полагая, что $f \sim g$, если графики этих отображений в $X \times Y$ толерантны между собой в смысле толерантности $\xi \times \eta$. Это построение позволяет нам перейти от толерантного пространства (X, ξ) полей зрения и толерантного пространства (Y, η) цветов к толерантному пространству (Y^X, η) цветных изображений.

Пример 7. Допустим, что X — множество двумерных проекций трехмерного мира. Пусть ξ — толерантность, определяемая небольшими параллактическими движениями головы. Тогда (X, ξ) представит довольно детальное описание геометрии трехмерного пространства. Это та геометрическая структура, которая имеется у нас на сетчатке и благодаря которой возможно правильное зрительное восприятие трехмерного мира.

Пример 8. Допустим, что $f : \mathrm{X} \to Y$ — некоторое отображение, а (Y, η) — толерантное пространство. Определим в X толерантность ξ, полагая $x_1 \sim x_2$, если $fx_1 \sim fx_2$ в смысле толерантности η. Назовем ξ *прообразом толерантности* η и запишем $\xi = f^{-1}\eta$. Толерантность остроты зрения в поле зрения представляет собой прообраз толерантности в сетчатке, определяемой рецепторными полями ганглиев сетчатки.

Определения. Допустим, что $f : \mathrm{X} \to Y$ — отображение, связывающее два толерантных пространства (X, ξ) и (Y, η). Мы говорим, что f — *толерант-*

ное отображение, если из $x_1 \sim x_2$ в смысле толерантности ξ следует $fx_1 \sim fx_2$ в смысле толерантности η. Если справедливо и обратное, т. е. из $fx_1 \sim fx_2$ следует $x_1 \sim x_2$, то f называется *толерантным вложением*. Если же, далее, каждая точка y из Y толерантна некоторой точке fx, где x принадлежит X, то мы называем f *толерантным гомеоморфизмом*.



Фиг. 3.

Пример 9. Допустим, что (X, ξ), как и в примере 2,— атомы, составляющие этот лист бумаги, а (Y, η), как в примере 1, — точки на нем. Предположим, что отображение $f : X \to Y$ ставит в соответствие каждому атому точку, в которой он находится. Тогда f представляет собой толерантный гомеоморфизм. Этот пример хорошо иллюстрирует совпадение с точностью до толерантности реального и теоретического листов бумаги.

Пример 10. Вводя, как это было сделано в примере 8, прообраз η толерантности, мы превращаем введенное там же отображение f в толерантное вложение. В силу этого зрительный опыт с точностью до толерантности вкладывается в опыт сетчатки.

Пример 11. Если $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ — толерантное вложение, то $(X, \xi) \to (fX, \eta)$ представляет собой толерантный гомеоморфизм. При толерантном гомеоморфизме сохраняются все глобальные свойства толерантного пространства.

Пример 12. Композиция двух толерантных отображений или вложений будет отображением того же типа. Однако композиция двух толерантных гомеоморфизмов, вообще говоря, не будет таковым; чтобы превратить эту композицию в толерантный гомеоморфизм, надо «удвоить» толерантность. С методической точки зрения этот пример хорошо иллюстрирует характер нетранзитивности, возникающей в теории толерантных пространств. С точки зрения приложений мы не заинтересованы специально в локальных явлениях, и тогда с точностью до «удвоенной» толерантности ξ^2 между ξ и ξ^2 никакой разницы нет.

Пример 13. Мы полагаем, что все отображения, встречавшиеся нам выше, представляют собой толерантные вложения. Доводы в пользу такого предположения см. [4] и [10].

Легко видеть, что если считать толерантными между собой точки, находящиеся друг от друга на расстоянии менее 1 см, то изображенное на фиг. 3 толерантное пространство будет состоять из двух связных частей, одна из которых имеет отверстие. Это типичные глобальные свойства толерантного пространства, и для того, чтобы охватить их все сразу, лучше всего применить теорию гомологий. Если дано толерантное пространство (X, ξ), то мы можем построить симплициальный комплекс, состоящий из всех симплексов, где симплекс — это такое конечное ориентированное подмножество множества X, все точки которого толерантны между собой. Группой гомологий $H(X, \xi)$ будет тогда по определению группа гомологий этого комплекса. Хотелось бы иметь следующую теорему:

Теорема: толерантный гомеоморфизм индуцирует изоморфизмы соответствующих групп гомологий.

Однако это не вполне верно; необходимо сделать некоторые технические уточнения (см. [11]). Все же из правильной формулировки этой теоремы можно сделать вывод о том, что такие свойства, как связность, число отверстий и размерность, сохраняются при толерантном гомеоморфизме. В результате довольно тонкая трехмерная структура (пример 7) сохраняется, например, в полях памяти коры головного мозга. Теорию гомологий следует использовать также при обсуждении взаимодействия и резонанса для дифференциальных уравнений, связанных с гиппокампом и корой головного мозга.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eccles J. C.*, Physiology of synapses, Springer, 1964. (Дж. Экклс, Физиология синапсов, изд-во «Мир», М., 1966).
2. *Adey W. R., Dunlop C. W., Hendrix C. E.,* Arch. Neurol., 3, 74—90, 1960.
3. *Penfields W., Roberts L.*, Speech and brain mechanisms, Princeton, 1959.
4. *Zeeman E. C.*, in: Topology of 3 manifolds, K. Fort, ed., Prentice Hall, pp. 240— 256, 1962.
5. *Cragg B. G.* (в печати).
6. *Hubei D. H., Wiesel T. N., J. Physiol.*, 160, 106—154, 1962.
7. *Heerden P. J.* van, Applied optics, 2, 387—400, 1963.
8. *Green J. D.*, Physiol. Rev., 44, 561—608, 1964.
9. *Gartside B., Lippold O. C. J., J. Physiol.*, 189, 475—487, 1967.
10. *Zeeman E. C.,* in: Mathematics and computer science in biology and medicine, M. R. C,, pp. 240—256, 1965.
11. *Zeeman E. C.,* Homology of tolerance spaces (в печати).