# КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ХАРТРИ ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ, СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ ВБЛИЗИ ОКРУЖНОСТИ

А.В. Перескоков

*НИУ МЭИ, МИЭМ НИУ ВШЭ*

pereskokov62@mail.ru

Поступила 05.08.2014

Рассматривается задача на собственные значения для оператора Хартри с кулоновским взаимодействием, который содержит малый параметр перед нелинейностью. Найдены асимптотические собственные значения и асимптотические собственные функции вблизи верхних границ спектральных кластеров. Вблизи окружности, где сосредоточено решение, главный член разложения является решением задачи о двумерном осцилляторе. Ключевые слова: самосогласованное поле, двумерный осциллятор, спектральный кластер, асимптотические собственные значения и собственные функции, логарифмическая особенность.

УДК 517.958 + УДК 517.928

## 1 Введение

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора Хартри с кулоновским взаимодействием в $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$(-\Delta_q - \frac{1}{\mid q \mid} + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mid \psi(q') \mid^2}{\mid q - q' \mid} dq')\psi = \lambda\psi, \tag{1}$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1, \tag{2}$$

где $\Delta_q$ — оператор Лапласа, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Уравнение самосогласованного поля во внешнем поле, содержащее интегральную нелинейность типа Хартри, играет фундаментальную роль в квантовой теории и нелинейной оптике. В частности, такие уравнения возникают в теории полярона, который можно рассматривать как простейший пример частицы, взаимодействующей с квантовым полем [1,2], в теории конденсата Бозе–Эйнштейна [3], при нахождении электронных орбиталей в многоэлектронных атомах [4], а также при рассмотрении сред с пространственной дисперсией [5].

Хорошо известно [6], что при $\varepsilon = 0$ собственные значения $\lambda = \lambda_n(\varepsilon)$ задачи (1), (2) равны

$$\lambda_n(0) = -\frac{1}{4n^2}.$$

Здесь $n = 1, 2, \dots$ — главное квантовое число. Для задачи (1), (2) имеются теоремы существования, в частности, для нижней точки спектра, отвечающему основному состоянию [7, 8]. В работе [9] при $n = 2$ доказано существование состояний, не обладающих сферической симметрией, а также найдено пять ветвей собственных значений, выходящих из невозмущенной точки спектра.

В данной работе будет рассмотрен случай, когда квантовое число $n$, задающее невозмущенное собственное значение, велико (для определенности будем считать, что $\lambda$ имеет порядок $\varepsilon$). Вопрос о существовании состояний, отличных от основного, является исходным при исследовании процессов, связанных с возбуждением электронов в поляронных средах [10]. В настоящее время, помимо чисто теоретического интереса, проблема возбужденных поляронных состояний приобретает интерес в связи с проблемой электронного переноса возбуждений в самых различных конденсированных средах. В частности, проблема электронного переноса на большие расстояния является одной из центральных в молекулярной биологии при описании коллективных возбуждений в молекулярных цепочках и в молекулах ДНК [11].

Пусть $p = n - m - 1$, где $m$ — магнитное квантовое число. В данной работе для каждого $p = 0, 1, 2, \dots$ будут найдены асимптотические собственные значения

$$\lambda^{(p)}_{n,i}(\varepsilon) = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon\left(\frac{\ln n}{4\pi n^2} + \frac{E^{(p)}_{1,i}}{n^2}\right) + O\left(\frac{\varepsilon \ln n}{n^{5/2}}\right), \quad n \to \infty, \tag{3}$$

где $i = 0, \dots, I_p$, которые расположены вблизи верхних границ спектральных кластеров, образующихся вокруг уровней энергии невозмущенного оператора (при $\varepsilon = 0$). В частности, при $p = 0, 1, 2$ числа $E^{(p)}_{1,i}$ представимы в виде

$$E^{(p)}_{1,i} = \frac{1}{4\pi}\left(5\ln 2 + \gamma - \frac{\sigma^{(p)}_i}{128}\right). \tag{4}$$

Здесь $\gamma \approx 0.57$ — постоянная Эйлера. При $p = 0$ существует одно значение

$$\sigma^{(0)}_0 = 0, \tag{5}$$

при $p = 1$ — два значения

$$\sigma^{(1)}_0 = 80, \quad \sigma^{(1)}_1 = 96, \tag{6}$$

при $p = 2$ — шесть значений

$$\sigma^{(2)}_0 = 123 + \frac{19}{39},\ \sigma^{(2)}_1 = 142,\ \sigma^{(2)}_2 = 144,$$

$$\sigma^{(2)}_3 = 145 - \frac{1}{33},\ \sigma^{(2)}_4 = 145 - \frac{1}{81},\ \sigma^{(2)}_5 = 147 + \frac{5}{9}.$$

Соответствующие (3) асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружности $\Gamma$ в $\mathbb{R}^3$, на которой кулоновское ядро самодействия в (1) имеет логарифмическую особенность. Поэтому поправка в формуле (3) содержит $\ln n$, а числа $\lambda_{n,i}^{(p)}(\varepsilon)$ расположены вблизи верхних границ кластеров. Отметим, что на нижней границе кластера

$$\lambda_n(\varepsilon) \sim -\frac{1}{4n^2} + \frac{\varepsilon E_{min}}{n^2}, \quad n \to \infty,$$

где число $E_{min}$ удовлетворяет неравенству

$$E_{min} \leq \frac{1}{2\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi K\left(\frac{\sqrt{\sin\theta \sin\theta'}}{\sin((\theta+\theta')/2)}\right) \frac{d\theta' d\theta}{\sin\left((\theta+\theta')/2\right)}.$$

Здесь $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл 1 рода [12].

Асимптотическим решениям уравнений типа Хартри, локализованным вблизи маломерных инвариантных подмногообразий в фазовом пространстве, посвящено большое число работ (см., например, [13–19]). В данной работе главный член асимптотического разложения вблизи окружности, где локализовано решение, оказывается решением другой классической задачи квантовой механики — задачи о двумерном осцилляторе:

$$\mathbf{L} g_{0,i}^{(p)}(\tau, s) = 0, \quad \|g_{0,i}^{(p)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1. \tag{7}$$

Здесь оператор

$$\mathbf{L} = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + [s^2 + \tau^2 - 2(p+1)]. \tag{8}$$

В результате, функция $g_{0,i}^{(p)}$ представима в виде линейной комбинации базисных собственных функций задачи (7), отвечающих собственному значению $p+1$. Коэффициенты этого разложения находятся из системы нелинейных уравнений одновременно с нахождением чисел $E_{1,i}^{(p)}$. Отметим, что данная система выводится из условий разрешимости уравнений для следующих приближений.

Аналогичная (1), (2) задача на собственные значения в $L^2(\mathbb{R}^2)$ для возмущенного двумерного резонансного осциллятора, возбуждающий потенциал которого задается интегральной нелинейностью типа Хартри с гладким потенциалом самодействия, рассматривалась ранее в [20,21]. Она имеет вид

$$(\mathbf{H}_0 + \hbar^2 \int_{\mathbb{R}^2} W(|q-q'|^2) \mid \psi(q') \mid^2 dq')\psi = \lambda\psi,$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1,$$

где

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\right) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}$$

— двумерный осциллятор, $\hbar > 0$ — малый параметр, $W(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2$ — произвольный многочлен 2 степени с вещественными коэффициентами, причем $w_2 > 0$. В работах [20,21] были найдены асимптотические собственные значения и асимптотические собственные функции вблизи верхних границ спектральных кластеров, которые образуются вокруг собственных значений $\hbar(\ell+1)$ невозмущенного оператора $\mathbf{H}_0$. Если $\ell$ имеет порядок $\hbar^{-1}$, то асимптотические собственные значения имеют вид

$$\lambda = \lambda_{k,\ell} = \ell\hbar + \hbar + (w_0 + 2\ell\hbar w_1 + 9\ell^2\hbar^2 w_2)\hbar^2 + (2w_1 + \\ +2\ell\hbar w_2(9 - 2\sqrt{6}(k+1/2)))\hbar^3 + O(\hbar^{7/2}), \quad k = 0,1,2,\dots, \quad \hbar \to 0. \tag{9}$$

Если сравнить эту серию с (3), то она не содержит логарифмических поправок, а расщепление спектра в (9) происходит в следующем приближении.

Метод построения квазиклассических асимптотик в гладком случае основан на алгебраическом усреднении возмущения, последующем переходе на алгебру симметрий и когерентном преобразовании от исходного представления этой алгебры к ее неприводимому представлению в пространстве функций над лагранжевым подмногообразием в симплектическом листе [22]. Кроме того, при построении асимптотики вблизи верхних границ спектральных кластеров используется новое интегральное представление для решения.

План дальнейшего изложения следующий. В разделе 2 найдена асимптотика собственных функций невозмущенной задачи. В разделе 3 построены асимптотические решения спектральной задачи для уравнения Хартри. В разделах 4, 5, 6 приведены примеры решения спектральной задачи на подпространствах $\mathcal{H}_p$. Они состоят из собственных функций двумерного осциллятора, отвечающих собственному значению $p+1$. В 4 разделе рассмотрены случаи, когда $p = 0, 1$, а в 5 и 6 разделах — случай $p = 2$. Отметим, что в 5 разделе ищутся вещественные, а в 6 разделе — комплексные решения задачи. Наконец, дополнение к статье содержит доказательство теоремы из раздела 2.

## 2 Асимптотика собственных функций невозмущенной задачи

Пользуясь растяжением $q = x/\varepsilon, \psi = \varepsilon^{3/2}v, \lambda = \varepsilon E$, приведем задачу (1), (2) к стандартному для теории квазиклассических приближений виду

$$\left(-\varepsilon\Delta_x - \frac{1}{|\,x\,|} + \varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\,v(x')\,|^2}{|\,x - x'\,|}dx'\right)v(x) = Ev(x), \tag{10}$$

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1. \tag{11}$$

При построении асимптотических решений (10), (11) нам потребуется асимптотика собственных функций невозмущенной задачи

$$\left(-\varepsilon\Delta_x - \frac{1}{|\,x\,|}\right)v(x) = Ev(x), \quad \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1.$$

Дискретным собственным значениям

$$E_n = -\frac{1}{4\varepsilon n^2}, \quad n = 1,2,\dots,$$

в сферических координатах $(r,\theta,\varphi)$, где

$$0 \le r \le \infty, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

отвечают собственные функции [6]

$$v_{n,k,n_r} = Y_{\ell m}(\theta,\varphi)R_{n\ell}(r). \tag{12}$$

Здесь $\ell, n_r$ — орбитальное и радиальное квантовые числа, $n = \ell + 1 + n_r,\ k = \ell - m$,

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell- \mid m\mid)!}{4\pi(\ell+\mid m\mid)!}} P_\ell^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}, \tag{13}$$

$$R_{n\ell}(r) = \frac{1}{(2\varepsilon n)^{3/2}} \frac{2}{\sqrt{n(n-\ell-1)!(n+\ell)!}} \left(\frac{r}{\varepsilon n}\right)^\ell e^{-r/(2\varepsilon n)} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{r}{\varepsilon n}\right). \tag{14}$$

Функции (13). (14) содержат присоединенный полином Лежандра

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(1-x^2)^\ell,$$

а также обобщенный полином Лагерра

$$L_n^s(x) = e^x x^{-s}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+s}).$$

Пусть

$$a = 2\ell^2\varepsilon. \tag{15}$$

Будем считать, что при $\varepsilon \to 0$ число $\ell$ имеет порядок $\varepsilon^{-1/2}$. Изучим поведение функций $v_{n,k,n_r}$ вблизи окружности

$$\Gamma_a = \{(r,\theta,\varphi) \mid r = a,\ \theta = \pi/2\}$$

в $\mathbb{R}^3$. Введем новые переменные

$$\tau = (\theta - \frac{\pi}{2})\sqrt{\ell}, \quad s = (\frac{r}{a} - 1)\sqrt{\ell}.$$

Справедлива

**Теорема 1.** *При $\ell \to \infty$ и небольших $n_r = 0,1,2,\ldots$ и $k = 0,1,2,\ldots$ функции $v_{n,k,n_r}$ по mod $O(\ell^{-\infty})$ сосредоточены вблизи окружности $\Gamma_a$, где при $s^6 + \tau^4 \ll \ell$ справедлива асимптотика*

$$v_{n,k,n_r} = \frac{(-1)^p\sqrt{\ell}}{a^{3/2}2^{(p+1)/2}\pi\sqrt{n_r!}\sqrt{k!}} e^{im\varphi}e^{-(s^2+\tau^2)/2}H_{n_r}(s)H_k(\tau)\big[1+$$
$$+O\left(\frac{\mid s\mid^3+1}{\sqrt{\ell}}H_{n_r}(s)\right) + O\left(\frac{s^2+1}{\sqrt{\ell}}H'_{n_r}(s)\right)+$$
$$+O\left(\frac{\tau^4+1}{\ell}H_k(\tau)\right) + O\left(\frac{\mid\tau\mid^3+1}{\ell}H'_k(\tau)\right)\big]. \tag{16}$$

*Здесь $H_n$ — полином Эрмита.*

Доказательство теоремы 1 приведено в дополнении к статье.

# 3 Построение асимптотического решения

Переходя в сферическую систему координат, а также делая подстановку

$$v(x) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} g(r, \theta),$$

преобразуем задачу (10), (11) к виду [17]

$$\Big\{ -\varepsilon \Big[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Big( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \Big) \Big] - \frac{1}{r} +$$

$$+\varepsilon \int_0^\pi \int_0^\infty W(r, r', \theta, \theta') \mid g(r', \theta') \mid^2 (r')^2 \sin\theta' dr' d\theta' - E \Big\} g(r, \theta) = 0, \tag{17}$$

$$\int_0^\pi \int_0^\infty \mid g(r, \theta) \mid^2 r^2 \sin\theta dr d\theta = 1, \tag{18}$$

где ядро

$$W(r, r', \theta, \theta') = \frac{2}{\pi\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos(\theta + \theta')}} K\Big( \frac{2\sqrt{rr'\sin\theta\sin\theta'}}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos(\theta + \theta')}} \Big). \tag{19}$$

Для квантовых чисел $\ell, n, m$ порядка $\varepsilon^{-1/2}$, и следовательно, небольших $n_r, k$ и $p = n_r + k$ ниже будут построены асимптотические решения задачи (10), (11) по $mod\, O(\ell^{-1})$ локализованные вблизи окружности $\Gamma_a$. Асимптотические решения задачи (17), (18) будем искать в виде

$$g = a^{-3/2} \left[ \sqrt{\ell} g_0(\tau, s) + g_1(\tau, s) + \frac{g_2(\tau, s)}{\sqrt{\ell}} \right] + O\left( \frac{g_3(\tau, s)}{\ell} \right), \tag{20}$$

$$E = -\frac{1}{2a(1 + (n_r + 1)/\ell)^2} + \frac{E_0 \ln\ell}{\ell^2} + \frac{E_1}{\ell^2} + O\left( \frac{\ln\ell}{\ell^{5/2}} \right). \tag{21}$$

Здесь $\ell \to \infty$, функции $g_j(\tau, s), j = 0, 1, 2, 3$, экспоненциально убывают при $\tau^2 + s^2 \to \infty$; $E_0, E_1$ — некоторые константы. (Для упрощения обозначений индексы $i$ и $p$ у $g_0$ и $E_1$ опущены.)

Разложим входящие в (17), (18) функции с помощью формулы Тейлора по степеням $\tau$ и $s$. Поскольку функция $K(\kappa)$ имеет логарифмическую особенность при $\kappa \to 1$ [12]

$$K(\kappa) = \ln(4/\sqrt{1 - \kappa^2}) + O((1 - \kappa^2)) \ln(1 - \kappa^2)), \tag{22}$$

то непосредственно к $W$ формула Тейлора не применима. Обозначим

$$t = (\tau - \tau')^2 + (s - s')^2.$$

Тогда из (19), (22) вытекает

**Лемма 1.** *При $\ell \to \infty$, $t \ll \ell$ имеет место асимптотика*

$$W(r, r', \theta, \theta') = \frac{1}{\pi a} \ln\frac{8\sqrt{\ell}}{\sqrt{t}} + O\Big( \frac{s + s'}{\sqrt{\ell}} \ln\frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{t}} \Big) + O\Big( \frac{t}{\ell} \ln\frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{t}} \Big). \tag{23}$$

Далее разложим $(1+(n_r+1)/\ell)^{-2}$ по степеням $\ell$ и подставим асимптотики (20), (21) в уравнения (17), (18). В силу (15), (21), (23), (18) для отсутствия в левой части (17) слагаемых порядка $\ell^{-2}\ln\ell$ достаточно положить $E_0 = 1/(4\pi)$. Приравнивая к нулю слагаемые порядка $\ell^{-1}, \ell^{-3/2}$ и $\ell^{-2}$, получаем следующие задачи для определения $g_0, g_1$ и $g_2$:

$$\mathbf{L}g_0 = 0, \tag{24}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mid g_0 \mid^2 \, d\tau ds = 1;$$

$$\mathbf{L}g_1 = F_1, \tag{25}$$

где

$$F_1 = 2\left[\frac{\partial g_0}{\partial s} - s\frac{\partial^2 g_0}{\partial \tau^2} + (s^3 - 2ks + s\tau^2)g_0\right],$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} (g_0\overline{g}_1 + \overline{g}_0 g_1)\, d\tau ds = -2\int_{\mathbb{R}^2} s \mid g_0 \mid^2 \, d\tau ds;$$

$$\mathbf{L}g_2 = F_{2,1} + F_{2,2}, \tag{26}$$

где

$$F_{2,1} = -2s\frac{\partial g_0}{\partial s} + 3s^2\frac{\partial^2 g_0}{\partial \tau^2} - \tau\frac{\partial g_0}{\partial \tau} - \left[\frac{2}{3}\tau^4 - 2k\tau^2 + k^2 - 6ks^2 + 3s^2\tau^2 + \right.$$

$$\left. + 3s^4 + 3(n_r+1)^2\right]g_0 + 2\left[\frac{\partial g_1}{\partial s} - s\frac{\partial^2 g_1}{\partial \tau^2} + (s^3 - 2ks + s\tau^2)g_1\right],$$

$$F_{2,2} = \frac{1}{2\pi}\left(4\pi E_1 - 6\ln 2 + \int_{\mathbb{R}^2} \ln((\tau-\tau')^2 + (s-s')^2) \mid g_0(\tau', s') \mid^2 \, d\tau' ds'\right) g_0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} (g_0\overline{g}_2 + \overline{g}_0 g_2) d\tau ds =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^2} \left[\, \mid g_1 \mid^2 + 2s(g_0\overline{g}_1 + \overline{g}_0 g_1) + (s^2 - \tau^2/2) \mid g_0 \mid^2 \,\right] d\tau ds.$$

Здесь оператор $\mathbf{L}$ задан формулой (8).

Решениями уравнения (24) из $L^2(\mathbb{R}^2)$ являются собственные функции двумерного осциллятора, отвечающие собственному значению $p+1$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$. Они образуют подпространство $\mathcal{H}_p \subset L^2(\mathbb{R}^2)$, ортонормированный базис в котором состоит из функций $\beta_{j,p-j}(\tau, s)$, $j = 0, \ldots, p$. Здесь

$$\beta_{j,i}(\tau, s) = \theta_{j,i} e^{-(s^2+\tau^2)/2} H_j(s) H_i(\tau),$$

где

$$\theta_{j,i} = \frac{(-1)^{j+i}}{2^{(j+i)/2}\sqrt{\pi}\sqrt{j!}\sqrt{i!}}.$$

Следовательно,

$$g_0 = \sum_{j=0}^{p} c_j \beta_{j,p-j}, \tag{27}$$

где $c_j$ — некоторые константы, удовлетворяющие условию нормировки

$$\sum_{j=0}^{p} \mid c_j \mid^2 = 1.$$

Они находятся из условий разрешимости для следующих приближений. Используя (24), а также известные свойства полиномов Эрмита [23]

$$sH_j(s) = H_{j+1}(s)/2 + jH_{j-1}(s), \quad H'_j(s) = 2jH_{j-1}(s),$$

преобразуем правую часть уравнения (25). Так как

$$\Big[s\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} + 2s(n_r+1)\Big]e^{-s^2/2}H_j(s) = e^{-s^2/2}\big[s(s^2-1)H_j(s) - 4s^2jH_{j-1}(s)+$$

$$+4sj(j-1)H_{j-2}(s) - sH_j(s) + 2jH_{j-1}(s) + 2s(n_r+1)H_j(s)\big] =$$

$$= e^{-s^2/2}\Big\{\frac{1}{8}H_{j+3}(s) + \Big(\frac{3}{4}j + \frac{3}{4}\Big)H_{j+1}(s) + \frac{3}{2}j^2H_{j-1}(s) + j(j-1)(j-2)H_{j-3}(s)+$$

$$+2n_r\Big[\frac{1}{2}H_{j+1}(s) + jH_{j-1}(s)\Big] - 4j\Big[\frac{1}{4}H_{j+1}(s) + \Big(j - \frac{1}{2}\Big)H_{j-1}(s)+$$

$$+(j-1)(j-2)H_{j-3}(s)\Big] + 2jH_{j-1}(s) + 4j(j-1)\Big[\frac{1}{2}H_{j-1}(s) + (j-2)H_{j-3}(s)\Big]\Big\} =$$

$$= e^{-s^2/2}\Big\{\frac{1}{8}H_{j+3}(s) + \Big[-\frac{j}{4} + \frac{3}{4} + n_r\Big]H_{j+1}(s)+$$

$$+j\Big[-\frac{j}{2} + 2n_r + 2\Big]H_{j-1}(s) + j(j-1)(j-2)H_{j-3}(s)\Big\},$$

то $F_1$ принимает вид

$$F_1 = 2\Big[s\frac{\partial^2 g_0}{\partial s^2} + \frac{\partial g_0}{\partial s} + 2s(n_r+1)g_0\Big] =$$

$$= 2\sum_{j=0}^{p} c_j\theta_{j,p-j}e^{-(s^2+\tau^2)/2}H_{p-j}(\tau)\big\{H_{j+3}(s)/8 + ((3-j)/4 + n_r)H_{j+1}(s)+$$

$$+j(-j/2 + 2n_r + 2)H_{j-1}(s) + j(j-1)(j-2)H_{j-3}(s)\big\}. \tag{28}$$

Поскольку (28) не содержит функций из $\mathcal{H}_p$, то уравнение (25) разрешимо. Его решение имеет вид

$$g_1 = -\frac{1}{3}\frac{\partial^3 g_0}{\partial s^3} - 2(n_r+1)\frac{\partial g_0}{\partial s} + \sum_{j=0}^{p} c_j^*\beta_{j,p-j},$$

где $c_j^*$ — некоторые константы.

Аналогично доказывается, что $F_{2,1}$ также не содержит функций из $\mathcal{H}_p$. Поэтому условия разрешимости уравнения (26) принимают вид

$$\int_{\mathbb{R}^2} F_{2,2}\beta_{j,p-j}d\tau ds = 0, \quad j = 0, \dots, p. \tag{29}$$

При выполнении (29) функция $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ может быть представлена в виде суммы следующего ряда [24, 23]

$$g_2 = \sum_{\substack{j,i=0\\ j+i\neq p}}^{\infty} \frac{1}{2(j+i-p)} \int_{\mathbb{R}^2} (F_{2,1}(\tau', s') + aF_{2,2}(\tau', s'))\beta_{j,i}(\tau', s')d\tau' ds' \beta_{j,i}(\tau, s)+$$

$$+\sum_{j=0}^{p} c_j^{**}\beta_{j,p-j}, \tag{30}$$

где $c_j^{**}$ — некоторые константы.

Условие (29) позволяют найти входящие в (27) коэффициенты

$$c_j = \frac{1}{6\ln 2 - 4\pi E_1} \int_{\mathbb{R}^4} \ln((\tau-\tau')^2 + (s-s')^2) \mid g_0(\tau', s') \mid^2 g_0(\tau, s)\beta_{j,p-j}(\tau, s)d\tau' ds' d\tau ds,$$

$j = 0, \ldots, p$. В результате, приходим к следующей не содержащей малых параметров задаче на собственные значения

$$(6\ln 2 - 4\pi E_1)g_0 =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \Omega(\tau, s, \tau'', s'') \int_{\mathbb{R}^2} \ln((\tau'-\tau'')^2 + (s'-s'')^2) \mid g_0(\tau', s') \mid^2 d\tau' ds' g_0(\tau'', s'')d\tau'' ds'', \tag{31}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mid g_0(\tau, s) \mid^2 \, d\tau ds = 1. \tag{32}$$

Здесь функция

$$\Omega(\tau, s, \tau'', s'') = \frac{e^{-(s^2+\tau^2+(s'')^2+(\tau'')^2)/2}}{2^p\pi} \sum_{j=0}^{p} \frac{H_j(s)H_j(s'')H_{p-j}(\tau)H_{p-j}(\tau'')}{j!(p-j)!}.$$

Поскольку в результате преобразования Гаусса [23]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (2ix)^n e^{(ix-y)^2} dx = H_n(y),$$

то для ядра $\Omega$ имеет место интегральное представление

$$\Omega(\tau, s, \tau'', s'') = \frac{(-1)^p 2^p}{p!\pi^3} e^{-(s^2+\tau^2+(s'')^2+(\tau'')^2)/2} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^4} (\tilde{s}\tilde{s}' + \tilde{\tau}\tilde{\tau}')^p e^{(i\tilde{s}-s)^2+(i\tilde{\tau}-\tau)^2+(i\tilde{s}'-s')^2+(i\tilde{\tau}'-\tau')^2} d\tilde{\tau} d\tilde{s} d\tilde{\tau}' d\tilde{s}'.$$

Из (31), (32) следует, что число $E_1$ может быть записано в виде

$$E_1 = \frac{3\ln 2}{2\pi} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Omega(\tau, s, \tau'', s'')g_0(\tau'', s'')\overline{g}_0(\tau, s)d\tau ds \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^2} \ln((\tau'-\tau'')^2 + (s'-s'')^2) \mid g_0(\tau', s') \mid^2 d\tau' ds' d\tau'' ds''. \tag{33}$$

*Замечание* 1. Уравнение (31) является нелинейным интегральным уравнением. Ранее при нахождении серии асимптотических собственных функций для оператора Хартри нелинейное интегральное уравнение на сфере возникало в работе [14].

Пусть при некотором $p = 0, 1, 2, \ldots$ число $E_1 = E^{(p)}_{1,i}$ и функция $g_0 = g^{(p)}_{0,i}$ являются решением задачи (31), (32). Определим число $\lambda^{(p)}_{n,i}$ по формуле (3), а также функцию

$$\psi^{(p)}_{n,i} = \varepsilon^{3/2} \sum_{j=0}^{p} c_j v_{n,p-j,j}(\varepsilon q),$$

где $v_{n,k,n_r}$ задаются формулой (12), а коэффициенты $c_j$ совпадают с коэффициеттами разложения $g_0$ согласно (27)(см. теорему 1). Справедлива

**Теорема 2.** *При $\varepsilon \to 0$ и $n$ порядка $\varepsilon^{-1/2}$ число $\lambda^{(p)}_{n,i}$ является асимптотическим собственным значением, а функция $\psi^{(p)}_{n,i}$ — главным членом разложения соответствующей асимптотической собственной функции задачи* (1), (2) *в пространстве* $L^2(\mathbb{R}^3)$. *Число $\lambda^{(p)}_{n,i}$ расположено вблизи верхней границы спектрального кластера, отвечающего квантовому числу $n$, а функция $\psi^{(p)}_{n,i}$ по mod $O(n)$ сосредоточена вблизи окружности $\Gamma = \{(r, \theta, \varphi) \ | \ r = 2n^2, \ \theta = \pi/2\}$ в $\mathbb{R}^3$.*

*Замечание* 2. Поправка к $\psi^{(p)}_{n,i}$ строится аналогично (30), однако имеет весьма громоздкий вид.

# 4 Решение спектральной задачи на подпространствах $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$

Найдем решение задачи (31), (32) при $p = 0$. Будем искать $g^{(0)}_{0,0}$ в виде

$$g^{(0)}_{0,0} = c^{(0)}_0 \beta_{0,0} = \frac{c^{(0)}_0}{\sqrt{\pi}} e^{-(s^2+\tau^2)/2}. \tag{34}$$

В силу условия нормировки (32) константа $c^{(0)}_0$ удовлетворяет равенству

$$c^{(0)}_0 = 1. \tag{35}$$

*Замечание* 3. Формулы для асимптотических собственных функций в статье приводятся с точностью до произвольного множителя вида $e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$.

Подставляя (34) в соотношение (33), имеем:

$$E^{(0)}_{1,0} = \frac{3\ln 2}{2\pi} - \frac{1}{4\pi^3} \int_{\mathbb{R}^4} \ln((\tau' - \tau'')^2 + (s' - s'')^2) e^{-s'^2 - \tau'^2 - (s'')^2 - (\tau'')^2} d\tau' ds' d\tau'' ds''. \tag{36}$$

Далее, делая замену переменных

$$\xi = \tau'' - \tau', \quad \eta = s'' - s', \tag{37}$$

а также учитывая при $n=0$ равенство [25]

$$\int_{\mathbb{R}} r^{2n} e^{-2r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{3n}\sqrt{2}n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{38}$$

преобразуем (36) к виду

$$E^{(0)}_{1,0} = \frac{3\ln 2}{2\pi} - \frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(\xi^2+\eta^2) e^{-(\xi^2+\eta^2)/2} d\xi d\eta. \tag{39}$$

Наконец, переходя в правой части (39) к полярным координатам

$$\xi = \rho\cos\varphi, \quad \eta = \rho\sin\varphi$$

и используя интеграл [25]

$$\int_0^\infty e^{-r/2}\ln r dr = -2\gamma + 2\ln 2, \tag{40}$$

где $\gamma$ – постоянная Эйлера, находим, что

$$E^{(0)}_{1,0} = \frac{3\ln 2}{2\pi} - \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \ln\rho^2 e^{-\rho^2/2}\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{3\ln 2}{2\pi} - \frac{1}{8\pi}\int_0^\infty e^{-r/2}\ln r dr = \frac{5\ln 2+\gamma}{4\pi}.$$

При $p=1$ решение будем искать в виде

$$g^{(1)}_{0,i} = c^{(1)}_{0,i}\beta_{0,1} + c^{(1)}_{1,i}\beta_{1,0} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(s^2+\tau^2)/2}(c^{(1)}_{0,i}\tau + c^{(1)}_{1,i}s), \tag{41}$$

где $c^{(1)}_{0,i}, c^{(1)}_{1,i}$ — константы. Подставляя функцию (41) в (31), (32), приходим к системе уравнений

$$(4\pi E^{(1)}_1 - 6\ln 2)c^{(1)}_0 + I(c^{(1)}_0, c^{(1)}_1) = 0, \tag{42}$$

$$(4\pi E^{(1)}_1 - 6\ln 2)c^{(1)}_1 + I(c^{(1)}_1, c^{(1)}_0) = 0, \tag{43}$$

$$|\, c^{(1)}_0 \,|^2 + |\, c^{(1)}_1 \,|^2 = 1, \tag{44}$$

где

$$I(c^{(1)}_0, c^{(1)}_1) = \frac{4}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4} \ln((\tau'-\tau'')^2 + (s'-s'')^2) e^{-((s')^2+(\tau')^2+(s'')^2+(\tau'')^2)}[|\, c^{(1)}_0 \,|^2 (\tau')^2 +$$

$$+ |\, c^{(1)}_1 \,|^2 (s')^2 + (c^{(1)}_0\overline{c}^{(1)}_1 + \overline{c}^{(1)}_0 c^{(1)}_1)s'\tau'][c^{(1)}_0(\tau'')^2 + c^{(1)}_1 s''\tau'']d\tau' ds' d\tau'' ds''.$$

(Индекс $i$ для краткости обозначений опущен.)

Вычислим входящий в $I(c^{(1)}_0, c^{(1)}_1)$ интеграл. Делая замену переменных (37), имеем:

$$I(c^{(1)}_0, c^{(1)}_1) = \frac{4}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(\xi^2+\eta^2) e^{-(\xi^2+\eta^2)/2} I_1(c^{(1)}_0, c^{(1)}_1, \xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{45}$$

Здесь

$$I_1(c_0^{(1)}, c_1^{(1)}, \xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2(s'+\eta/2)^2-2(\tau'+\xi/2)^2}[| c_0^{(1)} |^2 (\tau')^2 + + | c_1^{(1)} |^2 (s')^2+$$

$$+(c_0^{(1)}\overline{c}_1^{(1)} + \overline{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})s'\tau'][c_0^{(1)}(\xi+\tau')^2 + c_1^{(1)}(\xi+\tau')(\eta+s')]d\tau'ds'.$$

Делая далее еще одну замену

$$x = s' + \eta/2, \quad y = \tau' + \xi/2$$

и пользуясь равенствами (38) при $n = 0, 1, 2$ находим, что

$$I_1(c_0^{(1)}, c_1^{(1)}, \xi, \eta) = \frac{\pi}{32}\{3 | c_0^{(1)} |^2 c_0^{(1)} + | c_1^{(1)} |^2 c_0^{(1)} + (c_0^{(1)}\overline{c}_1^{(1)}+$$

$$+\overline{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})c_1^{(1)} + +[| c_0^{(1)} |^2 \xi^2 + | c_1^{(1)} |^2 \eta^2 + (c_0^{(1)}\overline{c}_1^{(1)} + \overline{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})\xi\eta]c_0^{(1)}-$$

$$-[4 | c_0^{(1)} |^2 c_0^{(1)} + (c_0^{(1)}\overline{c}_1^{(1)} + \overline{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})c_1^{(1)}]\xi^2 - 2[(c_0^{(1)}\overline{c}_1^{(1)} + \overline{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})c_0^{(1)}+$$

$$+(| c_0^{(1)} |^2 + | c_1^{(1)} |^2)c_1^{(1)}]\xi\eta - (c_0^{(1)}\overline{c}_1^{(1)} + \overline{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})c_1^{(1)}\eta^2+$$

$$+[| c_0^{(1)} |^2 + | c_1^{(1)} |^2 + | c_0^{(1)} |^2 \xi^2 + | c_1^{(1)} |^2 \eta^2+$$

$$+(c_0^{(1)}\overline{c}_1^{(1)} + \overline{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})\xi\eta](c_0^{(1)}\xi^2 + c_1^{(1)}\xi\eta)\}. \qquad (46)$$

Подставим, наконец, правую часть (46) в (45). Переходя в получившемся интеграле к полярным координатам, а также используя (40) и равенства [25]

$$\int_0^\infty r^n e^{-r/2} \ln r dr = n! 2^{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma + \ln 2\Big), \quad n = 1, 2, \ldots$$

при $n = 1, 2$, приходим к следующей лемме.

**Лемма 2.** *Справедливо равенство*

$$I(c_0^{(1)}, c_1^{(1)}) = \Big(\ln 2 - \gamma + \frac{5}{8}\Big)(| c_0^{(1)} |^2 + | c_1^{(1)} |^2)c_0^{(1)} + (c_0^{(1)}\overline{c}_1^{(1)} - \overline{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})\frac{c_1^{(1)}}{8}. \qquad (47)$$

С учетом (47) система уравнений (42)–(44) принимает вид

$$\Big(4\pi E_1^{(1)} - 5\ln 2 - \gamma + \frac{5}{8}\Big)c_0^{(1)} + (c_0^{(1)}\overline{c}_1^{(1)} - \overline{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})\frac{c_1^{(1)}}{8} = 0, \qquad (48)$$

$$\Big(4\pi E_1^{(1)} - 5\ln 2 - \gamma + \frac{5}{8}\Big)c_1^{(1)} - (c_0^{(1)}\overline{c}_1^{(1)} - \overline{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})\frac{c_0^{(1)}}{8} = 0, \qquad (49)$$

$$| c_0^{(1)} |^2 + | c_1^{(1)} |^2 = 1. \qquad (50)$$

Система (48)–(50) при

$$E_{1,0}^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\Big(5\ln 2 + \gamma - \frac{5}{8}\Big)$$

имеет однопараметрическое семейство вещественных решений

$$c_{0,0}^{(1)} = \cos\alpha, \quad c_{1,0}^{(1)} = \sin\alpha, \tag{51}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, а при

$$E_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\Big(5\ln 2 + \gamma - \frac{3}{4}\Big)$$

— комплексные решения

$$c_{0,1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_{1,1}^{(1)} = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}. \tag{52}$$

Справедлива

**Теорема 3.** *При* $p = 0, 1$ *собственные значения задачи* (31), (32) *имеют вид* (4)–(6), *а соответствующие собственные функции при* $p = 0$ *определяются равенствами* (34), (35), *а при* $p = 1$ *— равенствами* (41), (51), (52).

# 5 Спектральная задача на подпространстве $\mathcal{H}_2$. Вещественные решения

При $p = 2$ будем искать решение задачи (31), (32) в виде

$$g_{0,i}^{(2)} = c_{0,i}^{(2)}\beta_{0,2} + c_{1,i}^{(2)}\beta_{1,1} + c_{2,i}^{(2)}\beta_{2,0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(s^2+\tau^2)/2}[c_{0,i}^{(2)}(2\tau^2 - 1) + c_{1,i}^{(2)} 2\sqrt{2}\tau s + c_{2,i}^{(2)}(2s^2 - 1)]. \tag{53}$$

Тогда система (31), (32) примет вид

$$(4\pi E_1^{(2)} - 6\ln 2)c_0^{(2)} + I_2(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = 0, \tag{54}$$

$$(4\pi E_1^{(2)} - 6\ln 2)c_1^{(2)} + I_3(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = 0, \tag{55}$$

$$(4\pi E_1^{(2)} - 6\ln 2)c_2^{(2)} + I_2(c_2^{(2)}, c_1^{(2)}, c_0^{(2)}) = 0, \tag{56}$$

$$\mid c_0^{(2)} \mid^2 + \mid c_1^{(2)} \mid^2 + \mid c_2^{(2)} \mid^2 = 1. \tag{57}$$

Здесь

$$I_2(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4} \ln((\tau - \tau')^2 + (s - s')^2) e^{-((s')^2 + (\tau')^2 + s^2 + \tau^2)}\times$$

$$\times I_4(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \tau', s', \tau, s)(2\tau^2 - 1)d\tau' ds' d\tau ds,$$

$$I_3(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4} \ln((\tau - \tau')^2 + (s - s')^2) e^{-((s')^2 + (\tau')^2 + s^2 + \tau^2)}\times$$

$$\times I_4(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \tau', s', \tau, s)\tau s d\tau' ds' d\tau ds,$$

где

$$I_4(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \tau', s', \tau, s) = \{\mid c_0^{(2)} \mid^2 (2(\tau')^2 - 1)^2 + 8 \mid c_1^{(2)} \mid^2 (\tau' s')^2 +$$

$$+ \mid c_2^{(2)} \mid^2 (2(s')^2 - 1)^2 + 2\sqrt{2}(c_0^{(2)}\overline{c}_1^{(2)} + \overline{c}_0^{(2)} c_1^{(2)})\tau' s'(2(\tau')^2 - 1) +$$

$$+2\sqrt{2}(c_2^{(2)}\overline{c}_1^{(2)}+\overline{c}_2^{(2)}c_1^{(2)})\tau's'(2(s')^2-1)+(c_0^{(2)}\overline{c}_2^{(2)}+\overline{c}_0^{(2)}c_2^{(2)})(2(\tau')^2-1)\times$$
$$\times(2(s')^2-1)\}[c_0^{(2)}(2\tau^2-1)+2\sqrt{2}c_1^{(2)}\tau s+c_2^{(2)}(2s^2-1)].$$

(Индекс $i$ снова опущен.)

Вычисления, аналогичные случаям $p=0,1$, но значительно более громоздкие, приводят к следующей лемме.

**Лемма 3.** *Справедливы равенства*

$$I_2(c_0^{(2)},c_1^{(2)},c_2^{(2)})=(\ln 2-\gamma)(\mid c_0^{(2)}\mid^2+\mid c_1^{(2)}\mid^2+\mid c_2^{(2)}\mid^2)+$$
$$+\frac{1}{128}\Big\{\mid c_0^{(2)}\mid^2\left(\frac{247}{2}c_0^{(2)}+\frac{c_2^{(2)}}{2}\right)+\mid c_1^{(2)}\mid^2\left(153c_0^{(2)}-c_2^{(2)}\right)+$$
$$+\mid c_2^{(2)}\mid^2\left(\frac{343}{2}c_0^{(2)}+\frac{c_2^{(2)}}{2}\right)-15\big(c_0^{(2)}\overline{c}_1^{(2)}+\overline{c}_0^{(2)}c_1^{(2)}\big)c_1^{(2)}-9\big(c_2^{(2)}\overline{c}_1^{(2)}+$$
$$+\overline{c}_2^{(2)}c_1^{(2)}\big)c_1^{(2)}+\big(c_0^{(2)}\overline{c}_2^{(2)}+\overline{c}_0^{(2)}c_2^{(2)}\big)\left(\frac{c_0^{(2)}}{2}-\frac{9}{2}c_2^{(2)}\right)\Big\},\tag{58}$$

$$I_3(c_0^{(2)},c_1^{(2)},c_2^{(2)})=(\ln 2-\gamma)(\mid c_0^{(2)}\mid^2+\mid c_1^{(2)}\mid^2+\mid c_2^{(2)}\mid^2)+$$
$$+\frac{1}{128}\{153\mid c_0^{(2)}\mid^2 c_1^{(2)}+142\mid c_1^{(2)}\mid^2 c_1^{(2)}+153\mid c_2^{(2)}\mid^2 c_1^{(2)}-$$
$$-\big(c_0^{(2)}\overline{c}_2^{(2)}+\overline{c}_0^{(2)}c_2^{(2)}\big)c_1^{(2)}-\big(c_0^{(2)}\overline{c}_1^{(2)}+\overline{c}_0^{(2)}c_1^{(2)}\big)\big(15c_0^{(2)}+9c_2^{(2)}\big)-$$
$$-\big(c_2^{(2)}\overline{c}_1^{(2)}+\overline{c}_2^{(2)}c_1^{(2)}\big)\big(9c_0^{(2)}+15c_2^{(2)}\big)\}.\tag{59}$$

С учетом (58), (59) система уравнений (54)–(57) принимает вид

$$-\sigma^{(2)}c_0^{(2)}+\mid c_0^{(2)}\mid^2\left(\frac{247}{2}c_0^{(2)}+\frac{c_2^{(2)}}{2}\right)+\mid c_1^{(2)}\mid^2\left(153c_0^{(2)}-c_2^{(2)}\right)+$$
$$+\mid c_2^{(2)}\mid^2\left(\frac{343}{2}c_0^{(2)}+\frac{c_2^{(2)}}{2}\right)-15\big(c_0^{(2)}\overline{c}_1^{(2)}+\overline{c}_0^{(2)}c_1^{(2)}\big)c_1^{(2)}-$$
$$-9\big(c_2^{(2)}\overline{c}_1^{(2)}+\overline{c}_2^{(2)}c_1^{(2)}\big)c_1^{(2)}+\big(c_0^{(2)}\overline{c}_2^{(2)}+\overline{c}_0^{(2)}c_2^{(2)}\big)\left(\frac{c_0^{(2)}}{2}-\frac{9}{2}c_2^{(2)}\right)=0,\tag{60}$$

$$-\sigma^{(2)}c_1^{(2)}+153\mid c_0^{(2)}\mid^2 c_1^{(2)}+142\mid c_1^{(2)}\mid^2 c_1^{(2)}+153\mid c_2^{(2)}\mid^2 c_1^{(2)}-$$
$$-\big(c_0^{(2)}\overline{c}_2^{(2)}+\overline{c}_0^{(2)}c_2^{(2)}\big)c_1^{(2)}-\big(c_0^{(2)}\overline{c}_1^{(2)}+\overline{c}_0^{(2)}c_1^{(2)}\big)\big(15c_0^{(2)}+9c_2^{(2)}\big)-$$
$$-\big(c_2^{(2)}\overline{c}_1^{(2)}+\overline{c}_2^{(2)}c_1^{(2)}\big)\big(9c_0^{(2)}+15c_2^{(2)}\big)=0,\tag{61}$$

$$-\sigma^{(2)}c_2^{(2)}+\mid c_0^{(2)}\mid^2\left(\frac{c_0^{(2)}}{2}+\frac{343}{2}c_2^{(2)}\right)+\mid c_1^{(2)}\mid^2\left(-c_0^{(2)}+153c_2^{(2)}\right)+$$
$$+\mid c_2^{(2)}\mid^2\left(\frac{c_0^{(2)}}{2}+\frac{247}{2}c_2^{(2)}\right)-9\big(c_0^{(2)}\overline{c}_1^{(2)}+\overline{c}_0^{(2)}c_1^{(2)}\big)c_1^{(2)}-15\big(c_2^{(2)}\overline{c}_1^{(2)}+$$
$$+\overline{c}_2^{(2)}c_1^{(2)}\big)c_1^{(2)}+\big(c_0^{(2)}\overline{c}_2^{(2)}+\overline{c}_0^{(2)}c_2^{(2)}\big)\left(-\frac{9}{2}c_0^{(2)}+\frac{c_2^{(2)}}{2}\right)=0,\tag{62}$$

$$| c_0^{(2)} |^2 + | c_1^{(2)} |^2 + | c_2^{(2)} |^2 = 1. \tag{63}$$

Здесь $\sigma^{(2)} = 128(-4\pi E_1^{(2)} + 5\ln 2 + \gamma)$.

Перейдем к решению системы (60)-(63). (Для упрощения обозначений индекс 2 сверху у $c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \sigma^{(2)}$ будем ниже опускать.) Вначале найдем вещественные решения. Если $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, то система (60)-(63) принимает вид

$$\begin{gathered}
-\sigma c_0 + c_0^2\Big(\frac{247}{2}c_0 + \frac{3}{2}c_2\Big) + c_1^2\big(123c_0 - 19c_2\big) + c_2^2\Big(\frac{325}{2}c_0 + \frac{c_2}{2}\Big) = 0, \\
c_1(-\sigma + 123c_0^2 + 142c_1^2 + 123c_2^2 - 38c_0c_2) = 0, \\
-\sigma c_2 + c_0^2\Big(\frac{c_0}{2} + \frac{325}{2}c_2\Big) + c_1^2\big(-19c_0 + 123c_2\big) + c_2^2\Big(\frac{3}{2}c_0 + \frac{247}{2}c_2\Big) = 0, \\
c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1.
\end{gathered} \tag{64}$$

Учитывая (64), при $c_1 = 0$ получаем систему

$$\Big(-\sigma + 123 + \frac{c_0^2}{2} + \frac{79}{2}c_2^2\Big)c_0 + \Big(-19 + \frac{41}{2}c_0^2 + \frac{39}{2}c_2^2\Big)c_2 = 0, \tag{65}$$

$$\Big(-19 + \frac{39}{2}c_0^2 + \frac{41}{2}c_2^2\Big)c_0 + \Big(-\sigma + 123 + \frac{79}{2}c_0^2 + \frac{c_2^2}{2}\Big)c_2 = 0, \tag{66}$$

$$c_0^2 + c_2^2 = 1, \tag{67}$$

а при $c_1 \neq 0$ приходим к уравнениям (65), (66),

$$-\sigma + 142 - 19(c_0 + c_2)^2 = 0, \tag{68}$$

$$c_1^2 = 1 - c_0^2 - c_2^2. \tag{69}$$

Рассмотрим случай, когда $c_1 = 0$. Обозначим $x = c_2^2$. Тогда, исключая $c_0$ из (65)-(67), имеем:

$$\sigma^2 - 286\sigma - 1520x^2 + 1520x + 20068 = 0, \tag{70}$$

$$\sigma^2(x-1) - \sigma(x-1)(78x+247) + \Big(1522x^3 + 8109x^2 + \frac{11243}{2}x - \frac{61009}{4}\Big) = 0. \tag{71}$$

Из уравнений (70), (71) вытекает, что

$$\Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(-78(x-1)\sigma + 3042x^2 + 6590x - \frac{19263}{2}\Big) = 0. \tag{72}$$

Если $x = 1/2$, то из уравнения (70) находим

$$\sigma_1^{(2)} = 142,\ \ \sigma_2^{(2)} = 144. \tag{73}$$

Соответствующие коэффициенты в формуле (53) имеют вид

$$\begin{gathered}
c_{0,1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_{1,1}^{(2)} = 0, \quad c_{2,1}^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\
c_{0,2}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_{1,2}^{(2)} = 0, \quad c_{2,2}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{gathered} \tag{74}$$

Если же $x \neq 1/2$, то выражая $\sigma$ из (72) и подставляя его в (70), получаем уравнение

$$x^4 - 4x^3 + \frac{15971}{3042}x^2 - \frac{1141}{507}x + \frac{1}{2704} = 0.$$

Оно сводится к двум квадратным уравнениям:

$$(x - 3/2)^2 = 0 \tag{75}$$

и

$$x^2 - x + \frac{1}{6084} = 0. \tag{76}$$

Так как $x \in [0, 1]$, то уравнение (75) решений не имеет. В случае уравнения (76) находим корни

$$x_1 = \frac{1}{78(39 + 4\sqrt{95})}, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{78(39 + 4\sqrt{95})}.$$

Они отвечают значению

$$\sigma_0^{(2)} = 123 + \frac{19}{39}. \tag{77}$$

Доказана

**Лемма 4.** *Система* (65)–(67) *разрешима лишь в случае, когда* $\sigma$ *имеет вид* (73) *или* (77).

Перейдем к изучению уравнений (65), (66), (68), (69), которые возникают при $c_1 \neq 0$. Исключая из этой системы $\sigma$ и $c_1^2$, находим, что

$$\Big(-19 + \frac{39}{2}c_0^2 + 38c_0c_2 + \frac{117}{2}c_2^2\Big)c_0 + \Big(-19 + \frac{41}{2}c_0^2 + \frac{39}{2}c_2^2\Big)c_2 = 0, \tag{78}$$

$$\Big(-19 + \frac{39}{2}c_0^2 + \frac{41}{2}c_2^2\Big)c_0 + \Big(-19 + \frac{117}{2}c_0^2 + 38c_0c_2 + \frac{39}{2}c_2^2\Big)c_2 = 0. \tag{79}$$

Если $c_0 = c_2 = 0$, то из (68), (69) следует, что $c_1 = 1$, а $\sigma = 142$. Если же $c_0c_2 \neq 0$, то условием разрешимости (78), (79) будет равенство

$$\Big(-19 + \frac{39}{2}c_0^2 + 38c_0c_2 + \frac{117}{2}c_2^2\Big)\Big(-19 + \frac{117}{2}c_0^2 + 38c_0c_2 + \frac{39}{2}c_2^2\Big) -$$

$$-\Big(-19 + \frac{39}{2}c_0^2 + \frac{41}{2}c_2^2\Big)\Big(-19 + \frac{41}{2}c_0^2 + \frac{39}{2}c_2^2\Big) = 0.$$

Вследствие симметрии уравнений (78), (79) оно может быть записано в виде

$$(c_0 + c_2)^2[38 - 39(c_0 + c_2)^2] = 0.$$

Пусть $c_0 + c_2 = 0$. Тогда из соотношения (68) находим, что $\sigma_1^{(2)} = 142$. Этому значению $\sigma$ соотвествует однопараметрическое семейство решений (53), коэффициенты которого имеют вид

$$c_{0,1}^{(2)} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}, \quad c_{1,1}^{(2)} = \cos\alpha, \quad c_{2,1}^{(2)} = -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}. \tag{80}$$

Здесь $\alpha \in \mathbb{R}$.

В случае, если

$$(c_0 + c_2)^2 = \frac{38}{39},$$

для $\sigma$ снова получаем значение (77). Ему соотвествует однопараметрическое семейство решений (53), коэффициенты которого имеют вид

$$c_{0,0}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{39}}\Big(\frac{\sqrt{38}}{2} + \sqrt{10}\cos\alpha\Big), \quad c_{1,0}^{(2)} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{39}}\sin\alpha, \quad c_{2,0}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{39}}\Big(\frac{\sqrt{38}}{2} - \sqrt{10}\cos\alpha\Big). \tag{81}$$

Здесь $\alpha \in \mathbb{R}$. Отметим, что если $\sigma = \sigma_0^{(2)}$ и $\sigma = \sigma_1^{(2)}$, то построенные выше при $c_1 = 0$ решения системы (65)–(67) содержатся в однопараметрических семействах (81), (80).

Доказана

**Теорема 4.** *При $p = 2$ собственные значения задачи* (31), (32), *отвечающие вещественным собственным функциям, имеют вид* (4), (77), (73). *Соответствующие собственные функции определяются равенствами* (53), (81), (80), (74).

# 6 Спектральная задача на подпространстве $\mathcal{H}_2$. Комплексные решения

Перейдем к построению комплексных решений системы (60)–(63). В силу замечания 3 мы можем считать, что $c_1 \in \mathbb{R}$. Поэтому положим

$$c_0^{(2)} =| c_0 | e^{i\varphi_0}, \quad c_1^{(2)} =| c_1 |, \quad c_2^{(2)} =| c_2 | e^{i\varphi_2}.$$

Поделим далее (60) на $e^{i\varphi_0}$, (62) на $e^{i\varphi_2}$ и приравняем в уравнениях (60)–(62) к нулю вещественные и мнимые части. В результате получаем систему

$$\begin{gathered}
-\sigma \mid c_0 \mid + \frac{247}{2} \mid c_0 \mid^3 + \frac{1}{2} \mid c_0 \mid^2 \mid c_2 \mid \cos(\varphi_2 - \varphi_0) + 153 \mid c_1 \mid^2 \mid c_0 \mid - \\
- \mid c_1 \mid^2 \mid c_2 \mid \cos(\varphi_2 - \varphi_0) + \mid c_2 \mid^2 \left(\frac{343}{2} \mid c_0 \mid + \frac{1}{2} \mid c_2 \mid \cos(\varphi_2 - \varphi_0)\right) - \\
-30 \mid c_0 \mid\mid c_1 \mid^2 \cos^2\varphi_0 - 18 \mid c_2 \mid\mid c_1 \mid^2 \cos\varphi_2 \cos\varphi_0 + \\
+2 \mid c_0 \mid\mid c_2 \mid \cos(\varphi_2 - \varphi_0)\Big(\frac{\mid c_0 \mid}{2} - \frac{9}{2} \mid c_2 \mid \cos(\varphi_2 - \varphi_0)\Big) = 0, \\
\mid c_1 \mid \{-\sigma + 153 \mid c_0 \mid^2 + 142 \mid c_1 \mid^2 + 153 \mid c_2 \mid^2 - \\
-2 \mid c_0 \mid\mid c_2 \mid \cos(\varphi_2 - \varphi_0) - 2 \mid c_0 \mid \cos\varphi_0 (15 \mid c_0 \mid \cos\varphi_0 + 9 \mid c_2 \mid \cos\varphi_2) - \\
-2 \mid c_2 \mid \cos\varphi_2 (9 \mid c_0 \mid \cos\varphi_0 + 15 \mid c_2 \mid \cos\varphi_2)\} = 0, \\
-\sigma \mid c_2 \mid + \mid c_0 \mid^2 \left(\frac{1}{2} \mid c_0 \mid \cos(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{343}{2} \mid c_2 \mid\right) + \\
+ \mid c_1 \mid^2 \left(- \mid c_0 \mid \cos(\varphi_2 - \varphi_0) + 153 \mid c_2 \mid\right) + \mid c_2 \mid^2 \left(\frac{1}{2} \mid c_0 \mid \cos(\varphi_2 - \varphi_0) + \right. \\
\left. + \frac{247}{2} \mid c_2 \mid\right) - 18 \mid c_0 \mid\mid c_1 \mid^2 \cos\varphi_0 \cos\varphi_2 - 30 \mid c_2 \mid\mid c_1 \mid^2 \cos^2\varphi_0 +
\end{gathered} \tag{82}$$

$$+2\mid c_0\mid\mid c_2\mid\cos(\varphi_2-\varphi_0)\Big(-\frac{9}{2}\mid c_0\mid\cos(\varphi_2-\varphi_0)+\frac{\mid c_2\mid}{2}\Big)=0, \tag{83}$$

$$\mid c_0\mid^2+\mid c_1\mid^2+\mid c_2\mid^2=1, \tag{84}$$

$$\mid c_2\mid\sin(\varphi_2-\varphi_0)\Big(\frac{\mid c_0\mid^2}{2}-\mid c_1\mid^2+\frac{\mid c_2\mid^2}{2}-9\mid c_0\mid\mid c_2\mid\cos(\varphi_2-\varphi_0)\Big)+$$
$$+\mid c_1\mid^2\sin\varphi_0(30\mid c_0\mid\cos\varphi_0+18\mid c_2\mid\cos\varphi_2)=0, \tag{85}$$

$$\mid c_0\mid\sin(\varphi_2-\varphi_0)\Big(\frac{\mid c_0\mid^2}{2}-\mid c_1\mid^2+\frac{\mid c_2\mid^2}{2}-9\mid c_0\mid\mid c_2\mid\cos(\varphi_2-\varphi_0)\Big)-$$
$$-\mid c_1\mid^2\sin\varphi_2(18\mid c_0\mid\cos\varphi_0+30\mid c_2\mid\cos\varphi_2)=0, \tag{86}$$

$$\mid c_1\mid\{\mid c_0\mid\sin\varphi_0(5\mid c_0\mid\cos\varphi_0+3\mid c_2\mid\cos\varphi_2)+$$
$$+\mid c_2\mid\sin\varphi_2(3\mid c_0\mid\cos\varphi_0+5\mid c_2\mid\cos\varphi_2)\}=0. \tag{87}$$

Уравнение (87) здесь можно отбросить, так как оно является линейной комбинацией (85), (86).

Анализ уравнений (85), (86) показывает, что комплексные решения спектральной задачи на подпространстве $\mathcal{H}_2$ могут существовать в следующих пяти случаях.

1 случай. $c_1=0$.

2 случай. $\mid c_2\mid=0,\ \mid c_0\mid\neq 0,\ \varphi_0=\pm\pi/2$.

3 случай. $\mid c_0\mid=0,\ \mid c_2\mid\neq 0,\ \varphi_2=\pm\pi/2$.

4 случай. $\varphi_0=\varphi_2=\pm\pi/2$.

5 случай. $\mid c_0\mid=\mid c_2\mid\neq 0,\ \varphi_2=-\varphi_0$.

Рассмотрим случай 1. Пусть $c_1=0$. Тогда из уравнений (84), (85) следует, что

$$\cos(\varphi_2-\varphi_0)=\frac{1}{18\mid c_0\mid\mid c_2\mid}. \tag{88}$$

(При $\sin(\varphi_2-\varphi_0)=0$ снова приходим к вещественным решениям.) Далее подставим правую часть (88) в (82), (83). В результате получаем систему

$$\mid c_0\mid\Big\{-\sigma+\frac{247}{2}+\mid c_2\mid^2\Big(48-\frac{9}{(18\mid c_0\mid\mid c_2\mid)^2}\Big)\Big\}+$$
$$+\mid c_2\mid\Big(\frac{1}{12\mid c_0\mid\mid c_2\mid}-\frac{\mid c_2\mid}{18\mid c_0\mid}\Big)=0,$$
$$\mid c_0\mid\Big(\frac{1}{36\mid c_0\mid\mid c_2\mid}+\frac{\mid c_2\mid}{18\mid c_0\mid}\Big)+\mid c_2\mid\{-\sigma+$$
$$+\frac{343}{2}-\frac{9}{(18\mid c_0\mid\mid c_2\mid)^2}+\mid c_2\mid^2\Big(-48+\frac{9}{(18\mid c_0\mid\mid c_2\mid)^2}\Big)\Big\}=0,$$
$$\mid c_0\mid^2+\mid c_2\mid^2=1,$$

которая сводится к решению следующих уравнений

$$\sigma+48\mid c_2\mid^2=\frac{1}{18}+\frac{343}{2},\quad \sigma-48\mid c_2\mid^2=\frac{1}{18}+\frac{247}{2}. \tag{89}$$

Из (89) находим, что

$$\sigma_5^{(2)}=147+\frac{5}{9}, \tag{90}$$

$$| c_0 |=| c_2 |= \frac{1}{\sqrt{2}},$$

и, следовательно,

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_0) = \frac{1}{9}.$$

Таким образом, соответствующие (90) коэффициенты разложения (53) имеют вид

$$c_{0,5}^{(2)} = \frac{1 \pm 4\sqrt{5}i}{9\sqrt{2}}, \quad c_{1,5}^{(2)} = 0, \quad c_{2,5}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{91}$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Во втором случае находим число

$$\sigma_4^{(2)} = 145 - \frac{1}{81} \tag{92}$$

и коэффициенты

$$c_{0,4}^{(2)} = \pm\frac{\sqrt{22}i}{9}, \quad c_{1,4}^{(2)} = \frac{\sqrt{59}}{9}, \quad c_{2,4}^{(2)} = 0. \tag{93}$$

В третьем случае находим число (92) и коэффициенты

$$c_{0,4}^{(2)} = 0, \quad c_{1,4}^{(2)} = \frac{\sqrt{59}}{9}, \quad c_{2,4}^{(2)} = \pm\frac{\sqrt{22}i}{9}. \tag{94}$$

В четвертом случае находим число

$$\sigma_3^{(2)} = 145 - \frac{1}{33} \tag{95}$$

и коэффициенты

$$c_{0,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} + \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}, \quad c_{1,3}^{(2)} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{66}}, \quad c_{2,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} - \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}; \tag{96}$$

$$c_{0,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} - \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}, \quad c_{1,3}^{(2)} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{66}}, \quad c_{2,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} + \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}. \tag{97}$$

Наконец, в пятом случае находим два числа (90), (95), а также коэффициенты

$$c_{0,5}^{(2)} = \pm\frac{\sqrt{5}i}{3\sqrt{2}}, \quad c_{1,5}^{(2)} = \frac{2}{3}, \quad c_{2,5}^{(2)} = \pm\frac{\sqrt{5}i}{3\sqrt{2}}. \tag{98}$$

и

$$c_{0,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} + \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}, \quad c_{1,3}^{(2)} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{66}}, \quad c_{2,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} - \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}; \tag{99}$$

$$c_{0,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} - \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}, \quad c_{1,3}^{(2)} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{66}}, \quad c_{2,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} + \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}. \tag{100}$$

Справедлива

**Теорема 5.** *При* $p = 2$ *собственные значения задачи* (31), (32)*, отвечающие комплексным собственным функциям, имеют вид* (4), (95), (92), (90)*. Соответствующие собственные функции определяются равенствами* (53), (99), (100), (96), (97)*;* (93), (94)*;* (91), (98).

Таким образом, в данной работе найдены асимптотические собственные значения и асимптотические собственные функции для оператора Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров. Отметим, что использованные в работе методы носят общий характер. Они применимы не только в случае оператора Хартри, но и при изучении более сложных нелинейных уравнений с сингулярными ядрами.

# Дополнение

Данное дополнение содержит доказательство теоремы 1, относящейся к теории специальных функций. Начнем с асимптотики полинома Лежандра. Поскольку полином Эрмита имеет вид [23]

$$H_k(\tau)=\sum_{j=0}^{[k/2]}\frac{(-1)^j k!}{j!(k-2j)!}(2\tau)^{k-2j},$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа $\alpha$, то заменяя в равенстве

$$\frac{d^{2\ell-k}}{dx^{2\ell-k}}(1-x^2)^\ell=(-1)^\ell\sum_{j=0}^{[k/2]}\frac{(-1)^j\ell!(2\ell-2j)!}{(\ell-j)!j!(k-2j)!}x^{k-2j}$$

факториалы по формуле Стирлинга, а также разлагая функцию $(1-x^2)^{(\ell-k)/2}$ с помощью формулы Тейлора, имеем:

$$P_\ell^{\ell-k}(\cos\theta)=\frac{(-1)^k\ell^{\ell-k/2}2^{\ell-k+1/2}e^{-\ell}}{k!}e^{-\tau^2/2}\Big\{H_k(\tau)+$$

$$+O\Big(\frac{\tau^4+1}{\ell}H_k(\tau)\Big)+O\Big(\frac{|\,\tau\,|^3+1}{\ell}H_k'(\tau)\Big)\Big\}.$$

Здесь $\tau^4\ll\ell$.

Чтобы найти асимптотику полинома Лагерра, воспользуемся интегральными представлениями [23]:

$$L_n^s(x)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|\omega|=\rho}\frac{e^{-x\omega/(1-\omega)}}{(1-\omega)^{s+1}\omega^{n+1}}d\omega, \tag{101}$$

$$H_n(x)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=R}e^{2xz-z^2}dz.$$

Здесь $\rho<1$, контуры интегрирования ориентированы против часовой стрелки. Делая в интеграле (101) замену $\omega=z/\sqrt{\ell}$ и разлагая далее функции по формуле Тейлора, имеем:

$$L_{n_r}^{2\ell+1}\left(\frac{r}{\varepsilon n}\right)=\frac{n_r!}{2\pi i}\oint_{|\omega|=\rho}\frac{e^{-[2(\ell-n_r-1)+2\sqrt{\ell}s+O(s/\sqrt{\ell})+O(1/\ell)]\omega/(1-\omega)}}{(1-\omega)^{2\ell+2}\omega^{n_r+1}}d\omega=$$

$$=\frac{\ell^{n_r/2}n_r!}{2\pi i}\oint_{|z|=\sqrt{\ell}\rho}\frac{e^{-2sz-z^2}}{z^{n_r+1}}\left[1+O\left(\frac{(2n_r+4)z-2sz^2-4z^3/3}{\sqrt{\ell}}\right)\right]dz=$$

$$=\ell^{n_r/2}(-1)^{n_r}\left[H_{n_r}(s)+O\left(\frac{|\,s\,|^3+1}{\sqrt{\ell}}H_{n_r}(s)\right)+O\left(\frac{s^2+1}{\sqrt{\ell}}H_{n_r}'(s)\right)\right].$$

Здесь $s^6\ll\ell$.

Чтобы получить формулу (16), остается разложить функцию $r^\ell e^{-r/(2\varepsilon n)}$ вблизи точки $r=a$ и применить к входящим в (13), (14) факториалам формулу Стирлинга. Теорема доказана.

Автор благодарен М.В.Карасеву за привлечение внимания к данной задаче, а также за ценные вопросы и замечания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00627) и при частичной финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2081.2014.1).

## Список литературы

[1] Боголюбов Н. Н. Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем // УМЖ, 1950, **2** (2), 3–24.

[2] Пекар С. И. Исследования по электронной теории кристаллов // Гостехиздат, М., 1951, 258 стр.

[3] Питаевский Л. П. Конденсация Бозе-Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию // УФН, 1998, **168** (6), 641–653.

[4] Хартри Д. Р. Расчеты атомных структур // ИЛ, М., 1960, 271 стр.

[5] Achmanov S. A., Hocklov R. V., Suchorukov A. P. Self-fokusing, self-defokusing and self-modulation in nonlinear medium // Laserhandbuch, Holland-press, 1972, **2**, 5–108.

[6] Шифф Л. Квантовая механика // ИЛ, М., 1957, 473 стр.

[7] Lieb E. H., Simon B. The Hartree-Fock theory for Coulomb systems // Commun. Math. Phys., 1977, **53** (3), 185–194.

[8] Lions P. L. Solutions of Hartree-Fock equations for Coulomb systems // Commun. Math. Phys., 1987, **109** (1), 33–97.

[9] Карасев М. В., Осипов Ю. В. Собственные функции уравнения Хартри-Фока, не обладающие сферической симметрией // ТМФ, 1982, **52** (2), 263–269.

[10] Лахно В. Д. (ред.) Возбужденные поляронные состояния в конденсированных средах // ОНТИ НЦБИ АН СССР, Пущино, 1990, 144 стр.

[11] Давыдов А. С. Солитоны в молекулярных системах // Наукова думка, Киев, 1984, 288 стр.

[12] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции // Наука, М., Т. 3, 1967, 300 стр.

[13] Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях // Наука, М., 1977, 384 стр.

[14] Карасев М. В. Квантовая редукция на орбиты алгебр симметрий и задача Эренфеста // Препринт ИТФ-87-157Р, ИТФ АН УССР, Киев, 1987, 38 стр.

[15] Вакуленко С. А., Маслов В. П., Молотков И. А., Шафаревич И. А. Асимптотические решения уравнения Хартри, сосредоточенные при $\hbar \to 0$ в малой окрестности кривой // Доклады РАН, 1995, **345** (6), 743–745.

[16] Карасев М. В.,Перескоков А. В. Асимптотические решения уравнений Хартри, сосредоточенные вблизи маломерных подмногообразий. I. Модель с логарифмической особенностью // Изв. РАН, Сер. матем., 2001, **65** (5), 33–72.

[17] Карасев М. В., Перескоков А. В. Асимптотические решения уравнений Хартри, сосредоточенные вблизи маломерных подмногообразий. II. Локализация в плоских дисках // Изв. РАН, Сер. матем., 2001, **65** (6), 57–98.

[18] Перескоков А. В. Асимптотические решения двумерных уравнений Хартри, локализованные вблизи отрезков // ТМФ, 2002, **131** (3), 389–406.

[19] Белов В. В., Литвинец Ф. Н., Трифонов А. Ю. Квазиклассические спектральные серии оператора типа Хартри, отвечающие точке покоя классической системы Гамильтона-Эренфеста // ТМФ, 2007, **150** (1), 26–40.

[20] Перескоков А. В. Квазиклассическая асимптотика спектра оператора типа Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров // ТМФ, 2014, **178** (1), 88–106.

[21] Перескоков А. В. Квазиклассическая асимптотика спектра вблизи верхних границ спектральных кластеров для оператора типа Хартри // НМФМ, 2014, **10** (1), 77–112.

[22] Karasev M. V. Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances. I. // In book: Karasev M. (ed), Quantum Algebras and Poisson Geometry in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, Providence, RI, 2005, **216** , 1–18 ; II. // Adv. Stud. Contemp. Math., 2005, **11** (1), 33–56; III. // Russ. J. Math. Phis., 2006, **13** (2), 131–150.

[23] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции // Наука, М., Т. 2, 1974, 296 стр.

[24] Сеге Г. Ортогональные многочлены // Физматлит, М., 1962, 500 стр.

[25] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции // Наука, М., 1981, 800 стр.

# SEMICLASSICAL ASYMPTOTICS OF THE HARTREE OPERATOR SPECTRUM NEAR THE UPPER BOUNDARIES OF SPECTRUM CLUSTERS. ASYMPTOTIC SOLUTIONS CONCENTRATED NEAR CIRCLE

A.V. Pereskokov

*NRU "Moscow Power Engineering Institute", MIEM NRU "Higher School of Economics"*

pereskokov62@mail.ru

Received 05.08.2014

The eigenvalue problem for the Hartree operator with Coulomb interaction and with a small parameter at the nonlinearity is considered. The asymptotic eigenvalues and eigenfunctions near the upper boundaries of the spectral clusters are calculated. The leading term of expansion is a solution of the two-dimensional oscillator problem near the circle, where the solution is concentrated.