

# КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ

А.В. Перескоков

*НИУ МЭИ, МИЭМ НИУ ВШЭ*

pereskokov62@mail.ru

Поступила 15.04.2014

Рассматривается задача на собственные значения для возмущенного двумерного резонансного осциллятора. Возбуждающий потенциал задается нелокальной нелинейностью типа Хартри с гладким потенциалом самодействия. Каждому представлению алгебры вращений соответствует спектральный кластер вокруг уровня энергии невозмущенного оператора. Найдены асимптотические собственные значения и асимптотические собственные функции вблизи верхних границ спектральных кластеров. Для их вычисления использованы асимптотические формулы для квантовых средних.

УДК 517.958 + УДК 517.928

## 1. Введение

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора типа Хартри в  $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(\mathbf{H}_0 + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} W(|q - q'|^2) |\psi(q')|^2 dq') \psi = \lambda \psi, \quad (1)$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}$$

— двумерный осциллятор,  $W(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2$  — произвольный многочлен степени 2 с вещественными коэффициентами,  $\hbar > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  — малые параметры, причем  $\varepsilon \ll \hbar$ . Для определенности рассмотрим случай, когда  $\varepsilon = \hbar^2$ , а  $w_2 > 0$ .

Уравнение самосогласованного поля во внешнем поле, содержащее интегральную нелинейность типа Хартри с гладким или негладким потенциалом самодействия, играет фундаментальную роль в квантовой теории и нелинейной оптике. В частности, такие уравнения возникают в теории полярона, который можно рассматривать как простейший пример частицы, взаимодействующей с квантовым полем [1], в теории конденсата Бозе-Эйнштейна [2], при нахождении электронных орбиталей в многоэлектронных атомах [3], а также при рассмотрении сред с пространственной дисперсией [4].

В течение длительного времени центральной проблемой в теории полярона было исследование свойств основного состояния [5]. Вопрос о существовании состояний, отличных от основного, является исходным при исследовании процессов, связанных с возбуждением электронов в поляронных средах [6]. В настоящее время, помимо чисто теоретического интереса, проблема возбужденных поляронных состояний приобретает интерес в связи с проблемой электронного переноса возбуждений в самых различных конденсированных средах. В частности, проблема электронного переноса на большие расстояния является одной из центральных в молекулярной биологии при описании коллективных возбуждений в молекулярных цепочках и в молекулах ДНК [7].

Асимптотическим решениям уравнений типа Хартри, локализованным вблизи маломерных инвариантных подмногообразий в фазовом пространстве, посвящено большое число работ (см., например, [8–17]). Особенностью задачи (1), (2) является то, что она относится к классу резонансных: обе частоты двумерного осциллятора  $\mathbf{H}_0$  равны 1. Но тогда лучевой метод [18] и общая теория комплексного роста Маслова [8], которые позволяют строить асимптотические при  $\hbar \rightarrow 0$  решения, локализованные вблизи точек, траекторий, торов и иных маломерных подмногообразий, неприменимы [19].

Метод построения квазиклассических асимптотик для уравнений с частотными резонансами был разработан в серии работ М. В. Карасева [20–22]. Он основан на алгебраическом усреднении возмущения, последующем переходе на алгебру симметрий и когерентном преобразовании от исходного представления этой алгебры к ее неприводимому представлению в пространстве функций над лагранжевым подмногообразием в симплектическом листе.

Особый интерес представляют решения уравнений типа (1), отвечающие границам спектральных кластеров вблизи собственных значений невозмущенного уравнения (при  $\varepsilon = 0$ ), где упомянутые лагранжевы подмногообразия почти схлопываются и интегральное представление решения над ними становится невозможным. В работах [23, 24] на примере спектральной задачи для двумерного возмущенного осциллятора был предложен метод нахождения серий асимптотических собственных значений вблизи границ спектральных кластеров. Он основан на новом интегральном представлении (см. формулу (41)). Далее в работах [25, 26] этот метод был использован при изучении асимптотики спектра атома водорода в магнитном поле.

В данной работе указанный метод будет применен для нахождения асимптотических собственных значений оператора типа Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров (см. теорему 2). В силу нелинейности оператора собственным значениям будут соответствовать однопараметрические семейства асимптотических собственных функций. Помимо нелинейности имеется еще целый ряд свойств, отличающих задачу (1), (2) от рассмотренных ранее задач. Например, после усреднения и когерентного преобразования в случае уравнения (1) получается уравнение (36), имеющее иррегулярные особые точки. Оно не является уравнением класса Фукса [27], как было в работах [23–26].

Задача, подобная (1), (2), но без резонансов рассматривалась ранее в [10], где для оператора типа Хартри была построена асимптотика серии собственных значений. Эта серия соответствует радиально несимметричным собственным функциям с большим орбитальным числом, произвольным магнитным числом и с небольшим радиальным числом. Отметим также работы [15, 16], где для небольших квантовых чисел была найдена серия асимптотических собственных значений для оператора типа Хартри. Она отвечает точке покоя системы Гамильтона–Эренфеста, ассоциированной с оператором Хартри.

План дальнейшего изложения следующий. Раздел 2 содержит описание квантового метода усреднения и определение когерентного преобразования в случае алгебры вращений. В разделе 3 найдено интегральное представление для асимптотических собственных функций, являющихся антиголоморфными многочленами степени  $\ell$ . В разделе 4 рассмотрена многоточечная спектральная задача. Построено ее асимптотическое решение, а также вычислена поправка в спектральной серии. В разделе 5 изучается поведение асимптотических собственных функций. Наконец, разделы 6 и 7 содержат доказательство итоговой теоремы. Кроме того в разделе 7 получены формулы для квантовых средних.

## 2. Алгебраическое усреднение и когерентное преобразование

Заметим, что оператор в левой части уравнения (1) можно записать в виде  $\mathbf{H}_0 + \hbar^2 V(q_1, q_2)$ , где  $V(q_1, q_2)$  — многочлен 4 степени от  $q_1, q_2$ , коэффициенты которого интегрально зависят от  $|\psi|^2$ . Применим к (1) квантовую версию метода усреднения [19, 28, 29]. Исходная идея метода состоит в том, чтобы найти такой обратимый оператор  $\mathbf{U}$  и такой оператор  $\underline{\mathbf{V}}_0$ , чтобы

$$\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{H}_0 + \hbar^2 V)\mathbf{U} = \mathbf{H}_0 + \hbar^2 \underline{\mathbf{V}}_0 + O(\hbar^4), \quad (3)$$

$$[\underline{\mathbf{V}}_0, \mathbf{H}_0] = 0. \quad (4)$$

Новый возмущающий оператор  $\underline{\mathbf{V}}_0$  коммутирует со старшей частью  $\mathbf{H}_0$ . Поэтому решение спектральной задачи для оператора  $\mathbf{H}_0 + \hbar^2 V$  сводится к решению такой задачи для оператора  $\underline{\mathbf{V}}_0$  на собственном подпространстве оператора  $\mathbf{H}_0$ . Отметим, что реализовать эту идею удастся лишь при достаточно жестких ограничениях на оператор  $\mathbf{H}_0$ . А именно, должно быть выполнено условие

$$\exp \left\{ \frac{2\pi i}{\hbar} \mathbf{H}_0 \right\} = I,$$

где  $I$  — единичный оператор.

Определим

$$\underline{\mathbf{V}}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -\frac{i\tau}{\hbar} \mathbf{H}_0 \right\} V(q_1, q_2) \exp \left\{ \frac{i\tau}{\hbar} \mathbf{H}_0 \right\} d\tau, \quad (5)$$

$$\mathbf{V}^\# = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - \tau) \exp \left\{ -\frac{i\tau}{\hbar} \mathbf{H}_0 \right\} V(q_1, q_2) \exp \left\{ \frac{i\tau}{\hbar} \mathbf{H}_0 \right\} d\tau, \\ \mathbf{U} = \exp \{ -i\hbar \mathbf{V}^\# \}. \quad (6)$$

Справедлива [29]

**Лемма 1.** Операторы (5), (6) удовлетворяют равенствам (3), (4).

В случае задачи (1), (2) оператор  $\underline{\mathbf{V}}_0$  может быть представлен в виде

$$\underline{\mathbf{V}}_0 = 2w_2 f(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3) + b_0, \quad (7)$$

где  $f$  – многочлен 2 степени,  $b_0$  – константа, а  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$  – симметризованные по Вейлю ”швингеровские” образующие алгебры вращений [30], удовлетворяющие циклическим коммутационным соотношениям

$$[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2] = i\hbar \mathbf{S}_3, \quad [\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3] = i\hbar \mathbf{S}_1, \quad [\mathbf{S}_3, \mathbf{S}_1] = i\hbar \mathbf{S}_2.$$

В представлении Швингера  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$  реализуются в виде следующих операторов в  $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2}(q_1 q_2 + p_1 p_2), \quad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}(q_1 p_2 - q_2 p_1), \quad \mathbf{S}_3 = \frac{1}{4}(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{4}(q_2^2 + p_2^2), \quad (8)$$

где  $p_j = -i\hbar \partial / \partial q_j$  ( $j = 1, 2$ ).

На гильбертовом подпространстве  $\mathcal{H}_\ell \subset L^2(\mathbb{R}^2)$  собственных функций  $\mathbf{H}_0$ , отвечающих собственному значению  $\hbar(\ell + 1)$ , где  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ , получаем спектральную задачу

$$f(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3)\varphi = \xi\varphi, \quad (9)$$

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\ell} = 1. \quad (10)$$

Ее собственные значения обозначим  $\xi = \xi_{k,\ell}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) и упорядочим их по убыванию. Рассмотрим число  $\ell$  порядка  $\hbar^{-1}$ . Тогда спектр исходной задачи (1), (2) имеет следующую асимптотику

$$\lambda = \hbar(\ell + 1) + \hbar^2(2w_2 \xi_{k,\ell} + b_0) + O(\hbar^4). \quad (11)$$

Асимптотика соответствующих собственных функций дается формулой

$$\psi = \mathbf{U}\varphi_{k,\ell} + O(\hbar^3), \quad (12)$$

где  $\varphi_{k,\ell}$  – собственная функция задачи (9), (10), отвечающая собственному значению  $\xi_{k,\ell}$ . Оператор  $\mathbf{U}$  имеет вид (6).

Положим  $a = \ell\hbar/2$ . В случае задачи (1), (2) вычисления, аналогичные [24], приводят к следующему результату.

**Лемма 2.** *Справедливо равенство*

$$f(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3) = -\mathbf{S}_2^2 + b_1 \mathbf{S}_1 + b_3 \mathbf{S}_3 \quad (13)$$

где константы

$$b_1 = 4(\mathbf{S}_1 \varphi, \varphi)_{\mathcal{H}_\ell}, \quad b_3 = 4(\mathbf{S}_3 \varphi, \varphi)_{\mathcal{H}_\ell}. \quad (14)$$

Кроме того, константа  $b_0$  в (7) имеет вид

$$b_0 = w_0 + 4\sqrt{a(a + \hbar)}w_1 + [28a(a + \hbar) - 2((\mathbf{S}_2)^2 \varphi, \varphi)_{\mathcal{H}_\ell}]w_2. \quad (15)$$

*Доказательство.* Усредненный оператор  $\underline{\mathbf{V}}_0$  равен [24]

$$\underline{\mathbf{V}}_0 = \underline{V}_0 \left( q_1, q_2, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_1}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_2} \right). \quad (16)$$

Его символ вычисляется с помощью сдвигов по траекториям системы Гамильтона  $\mathbf{H}_0$  на время  $-\tau$  и задается формулой

$$\underline{V}_0(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(q_1 \cos \tau - p_1 \sin \tau, q_2 \cos \tau - p_2 \sin \tau) d\tau. \quad (17)$$

Операторы  $q_j, p_j = -i\hbar \partial / \partial q_j$  ( $j = 1, 2$ ) в (16) упорядочены по Вейлю. Разрешая систему (8) относительно  $q_j, p_j$  ( $j = 1, 2$ ) и подставляя получившиеся выражения в (17), имеем:

$$\begin{aligned} \underline{V}_0(S_1, S_2, S_3) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\sqrt{2}\sqrt{S_3 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}} \cos \tau, \\ &\sqrt{2}\sqrt{-S_3 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}} \left( \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \cos \tau - \frac{S_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \sin \tau \right) d\tau. \end{aligned} \quad (18)$$

Из формулы для оператора Казимира вытекает, что  $S_1, S_2, S_3$  связаны соотношением

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = a(a + \hbar). \quad (19)$$

Воспользуемся соотношениями (18), (19). В результате усреднения многочлены вида  $q_1^{j_1} q_2^{j_2}$ , где  $j_1 + j_2$  – нечетное число, обнуляются, а многочлены

$$q_1^2, \quad q_1 q_2, \quad q_2^2, \quad q_1^4, \quad q_1^2 q_2^2, \quad q_2^4$$

оказываются равными, соответственно,

$$\begin{aligned} S_3 + \sqrt{a(a + \hbar)}, \quad S_1, \quad -S_3 + \sqrt{a(a + \hbar)}, \quad \frac{3}{2}S_3^2 + 3S_3\sqrt{a(a + \hbar)} + \frac{3}{2}a(a + \hbar), \\ \frac{3}{2}S_1^2 + \frac{1}{2}S_2^2, \quad \frac{3}{2}S_3^2 - 3S_3\sqrt{a(a + \hbar)} + \frac{3}{2}a(a + \hbar). \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, находим, что

$$\begin{aligned}
V_0(S_1, S_2, S_3) \sim 2w_2 \left\{ -S_2^2 + 4 \int_{\mathbb{R}^2} q'_1 q'_2 |\psi(q')|^2 dq' S_1 + 2 \int_{\mathbb{R}^2} ((q'_1)^2 - (q'_2)^2) |\psi(q')|^2 dq' S_3 \right\} + \\
+w_0 + w_1 \left\{ 2\sqrt{a(a+\hbar)} + \int_{\mathbb{R}^2} ((q'_1)^2 + (q'_2)^2) |\psi(q')|^2 dq' \right\} + w_2 \left\{ 6a(a+\hbar) + \right. \\
\left. + 8\sqrt{a(a+\hbar)} \int_{\mathbb{R}^2} ((q'_1)^2 + (q'_2)^2) |\psi(q')|^2 dq' + \int_{\mathbb{R}^2} ((q'_1)^2 + (q'_2)^2)^2 |\psi(q')|^2 dq' \right\}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Чтобы получить равенство (7), где  $f(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3)$  имеет вид (13), остается заменить в (21) в квантовых средних многочлены на усредненные операторы. Из (20) вытекает, что усреднение

$$q_1 q_2, \quad q_1^2 - q_2^2, \quad q_1^2 + q_2^2, \quad (q_1^2 + q_2^2)^2$$

приводит, соответственно, к

$$S_1, \quad 2S_3, \quad 2\sqrt{a(a+\hbar)}, \quad 6a(a+\hbar) - 2S_2^2.$$

В итоге приходим к равенствам (14),(15). Лемма доказана.

Чтобы решить задачу (9), (10) воспользуемся когерентным преобразованием [31]

$$I_\ell(g) = \frac{\ell+1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} g(\bar{z}) |z\rangle \frac{d\bar{z} dz}{(1+|z|^2)^{\ell+2}}, \quad (22)$$

где

$$|z\rangle = \frac{(1+z^2)^{\ell/2}}{\sqrt{\pi 2^\ell \ell! \hbar}} H_\ell \left( \frac{q_1 + z q_2}{\sqrt{\hbar} \sqrt{1+z^2}} \right) \exp \left( -\frac{q_1^2 + q_2^2}{2\hbar} \right), \quad (23)$$

а  $H_\ell(q)$  – полиномы Эрмита. Оно отображает гильбертово пространство  $\mathcal{P}_\ell$  антиголоморфных многочленов степени не выше  $\ell$  на гильбертово пространство  $\mathcal{H}_\ell$ . Скалярное произведение в  $\mathcal{P}_\ell$  задается следующей формулой [31]

$$(g_1, g_2)_{\mathcal{P}_\ell} = \frac{\ell+1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} g_1(\bar{z}) \overline{g_2(\bar{z})} \frac{d\bar{z} dz}{(1+|z|^2)^{\ell+2}}. \quad (24)$$

Будем искать решение задачи (9),(10) в виде  $\varphi_{k,\ell} = I_\ell(\Phi_{k,\ell}(\bar{z}))$ . Поскольку в результате когерентного преобразования (22)  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$  преобразуются в дифференциальные операторы первого порядка [31]

$$S_1^0 = \frac{\hbar}{2} (\bar{z}\ell + (1-\bar{z}^2) \frac{d}{d\bar{z}}), \quad S_2^0 = \frac{i\hbar}{2} (\bar{z}\ell - (1+\bar{z}^2) \frac{d}{d\bar{z}}), \quad S_3^0 = \hbar \left( \frac{\ell}{2} - \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right), \quad (25)$$

то получаем следующее уравнение для  $\Phi_{k,\ell}(\bar{z})$ :

$$f(S_1^0, S_2^0, S_3^0) \Phi_{k,\ell}(\bar{z}) = \xi_{k,\ell} \Phi_{k,\ell}(\bar{z}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

Здесь функция  $f$  определена формулой (13). Собственными числами уравнения (26) назовем такие значения параметра  $\xi_{k,\ell}$ , при которых это уравнение имеет полиномиальное решение в пространстве  $\mathcal{P}_\ell$ . В силу унитарности когерентного преобразования

$$\|\Phi_{k,\ell}\|_{\mathcal{P}_\ell} = 1. \quad (27)$$

Пусть  $\bar{z} = x_0$  — точка, в малой окрестности которой локализована собственная функция  $\Phi_{k,\ell}(\bar{z})$ . Из предположения о единственности такой точки вытекает, что  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Покажем, как связана эта точка со спектром оператора Хартри.

Рассмотрим сужение функции (13) на сферу  $\Omega_\ell$ , задаваемую соотношением (19). Она является симплектическим листом для алгебры вращений. Введем на  $\Omega_\ell$  кэлерову структуру с помощью комплексной координаты

$$z = \frac{S_1 + iS_2}{\sqrt{a(a + \hbar)} + S_3}. \quad (28)$$

Пусть  $\bar{z}$  — комплексно сопряженная с (28) функция. Тогда в силу (19), (28) [31]

$$S_1 = \sqrt{a(a + \hbar)} \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad S_2 = i\sqrt{a(a + \hbar)} \frac{\bar{z} - z}{1 + |z|^2}, \quad S_3 = \sqrt{a(a + \hbar)} \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}. \quad (29)$$

Далее перейдем в  $f$  от координат  $S_1, S_2, S_3$  к новым координатам  $z, \bar{z}$ . В результате, сужение функции (13) на сферу  $\Omega_\ell$  примет вид

$$f_{\Omega_\ell}(z, \bar{z}) = a(a + \hbar) \frac{(\bar{z} - z)^2}{(1 + |z|^2)^2} + b_1 \sqrt{a(a + \hbar)} \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} + b_3 \sqrt{a(a + \hbar)} \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}. \quad (30)$$

Чтобы вычислить значения коэффициентов  $b_1, b_3$  воспользуемся формулами для средних значений дифференциальных операторов на решениях (1), (2) вблизи границ спектральных кластеров [23, 24]. Поскольку собственные функции  $\varphi_{k,\ell}(z, \bar{z})$  локализованы в малой окрестности точки  $z = \bar{z} = x_0$ , то для вычисления квантовых средних операторов  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_3$  достаточно заменить функции в (29) их значениями в точке  $z = \bar{z} = x_0$ . В результате, в силу формул (14) получаем, что при  $\hbar \rightarrow 0$

$$b_1 \sim 4\sqrt{a(a + \hbar)} \frac{2x_0}{1 + x_0^2}, \quad b_3 \sim 4\sqrt{a(a + \hbar)} \frac{1 - x_0^2}{1 + x_0^2}. \quad (31)$$

Приведенные выше формальные рассуждения будут далее строго обоснованы (см. лемму 16).

Подставляя асимптотики (31) в формулу (30), окончательно получаем, что при  $\hbar \rightarrow 0$

$$f_{\Omega_\ell}(z, \bar{z}) \sim \frac{4a(a + \hbar)}{1 + x_0^2} P(z, \bar{z}),$$

где

$$P(z, \bar{z}) = \frac{(1 + x_0^2)(\bar{z} - z)^2}{4(1 + |z|^2)^2} + \frac{2x_0(z + \bar{z})}{1 + |z|^2} + \frac{(1 - x_0^2)(1 - |z|^2)}{1 + |z|^2}.$$

**Лемма 3.** *Глобальный максимум функции  $4a(a + \hbar)P(z, \bar{z})/(1 + x_0^2)$  достигается в точке  $z = \bar{z} = x_0$  и равен  $4a(a + \hbar)$ .*

*Доказательство.* Перейдем к полярным координатам  $z = \rho e^{i\varphi}$ . Тогда

$$P(\rho, \varphi) = (1 + x_0^2) \left( \frac{\rho \cos \varphi}{1 + \rho^2} \right)^2 + \frac{4x_0 \rho \cos \varphi}{1 + \rho^2} + \frac{(1 - x_0^2)(1 - \rho^4) - \rho^2(1 + x_0^2)}{(1 + \rho^2)^2}.$$

Точки глобального максимума функции  $P$  могут лежать лишь на вещественной оси, так как если  $\cos \varphi \neq \pm 1$ , то  $P(\rho, \varphi) < P(\rho, 0)$  при  $x_0 \geq 0$  и  $P(\rho, \varphi) < P(\rho, \pi)$  при  $x_0 < 0$ .

Положим  $z = x + iy$ . Тогда

$$P(x, y) = -\frac{y^2(1+x_0^2)}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{4x_0x + (1-x_0^2)(1-x^2-y^2)}{1+x^2+y^2}. \quad (32)$$

Дифференцируя (32), находим

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, 0) = -\frac{4(x-x_0)(x_0x+1)}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, 0) = 0.$$

Стационарными являются точки  $x_0$  и  $-1/x_0$  (при  $x_0 \neq 0$ ). Так как

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x_0, 0) = -\frac{4}{1+x_0^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x_0, 0) \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x_0, 0) = \frac{24}{(1+x_0^2)^2} > 0,$$

то точка  $z = \bar{z} = x_0$  является точкой максимума функции  $P$ . Поскольку значения  $P(-1/x_0, 0) = -1 - x_0^2$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} P(x, y) = -1 + x_0^2$  меньше  $P(x_0, 0) = 1 + x_0^2$ , то в точке  $z = \bar{z} = x_0$  достигается глобальный максимум  $P$ . Лемма доказана.

Так как  $4a(a + \hbar) = 4a^2 + O(\hbar)$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ , то число  $4a^2$  определяет верхнюю границу спектрального кластера. Далее в статье будет вычислена поправка к этому числу (см. формулу (149)).

Неоднозначность в выборе точки  $x_0$ , вблизи которой локализовано решение, связано с неединственностью собственной функции в задаче (1), (2). Действительно, собственные функции инвариантны относительно сдвига полярного угла. Это свойство сохраняется и после усреднения. Поскольку

$$\left(\frac{2x_0}{1+x_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1-x_0^2}{1+x_0^2}\right)^2 = 1,$$

то для каждого  $x_0 \in \mathbb{R}$  существует такой угол  $\varphi_0$ , что

$$\frac{2x_0}{1+x_0^2} = \cos(2\varphi_0), \quad \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} = \sin(2\varphi_0).$$

Таким образом, в силу (13), (31) при  $\hbar \rightarrow 0$

$$f(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3) \sim -\mathbf{S}_2^2 + 4a[\cos(2\varphi_0)\mathbf{S}_1 + \sin(2\varphi_0)\mathbf{S}_3]. \quad (33)$$

Далее, если в образующих алгебры вращений (8) перейти к полярным координатам  $q_1 = \varrho \cos \varphi$ ,  $q_2 = \varrho \sin \varphi$ , то оператор (33) примет вид

$$f(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3) \sim \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a \left\{ -\hbar^2 \left[ \sin(2(\varphi + \varphi_0)) \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} - \frac{\sin(2(\varphi + \varphi_0))}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2 \cos(2(\varphi + \varphi_0))}{\varrho} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \varphi} - \frac{2 \cos(2(\varphi + \varphi_0))}{\varrho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\sin(2(\varphi + \varphi_0))}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \right] + \varrho^2 \sin(2(\varphi + \varphi_0)) \right\},$$

где  $\varphi_0$  задает сдвиг угла  $\varphi$ .

Следовательно, в пространстве  $\mathcal{P}_\ell$  также имеется однопараметрическое семейство собственных функций (многочленов), параметризуемое числом  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Оператор, преобразующий одну собственную функцию в другую, приведен ниже (см. формулу (113)). Отметим, что для многомерных нестационарных уравнений типа Хартри операторы симметрии найдены в [17].

### 3. Интегральное представление для асимптотических собственных функций

Рассмотрим уравнение (9), где функция  $f$  имеет вид (13). В силу (31)  $b_1, b_3$  будем искать в виде

$$b_1 = \frac{8ax_0}{1+x_0^2} + \hbar b_1^{(1)} + O(\hbar^2), \quad b_3 = 4a \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} + \hbar b_3^{(1)} + O(\hbar^2), \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (34)$$

Кроме того, положим

$$\xi_{k,\ell} = 4a^2 + \hbar \xi_{k,\ell}^{(1)} + O(\hbar^2), \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (35)$$

Числа  $b_1^{(1)}, b_3^{(1)}, \xi_{k,\ell}^{(1)}$  будут определены ниже при вычислении поправок в квантовых средних. Учитывая формулы (25), а также отбрасывая в разложениях (34), (35) слагаемые  $O(\hbar^2)$ , приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \hbar^2 R^2(\bar{z}) \frac{d^2 \Phi}{d\bar{z}^2} + R_1(\bar{z}, \hbar) \frac{d\Phi}{d\bar{z}} + \left\{ 4a^2 \left[ \bar{z}^2 + \frac{8x_0(\bar{z} - x_0)}{R(x_0)} \right] + \right. \\ \left. + 2a\hbar \left[ -R(\bar{z}) + 2(b_3^{(1)} - \xi_{k,\ell}^{(1)}/a) + 2b_1^{(1)}\bar{z} \right] \right\} \Phi = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь

$$R(\bar{z}) = \bar{z}^2 + 1, \quad (37)$$

$$R_1(\bar{z}, \hbar) = -4a\hbar \left[ \bar{z}R(\bar{z}) + \frac{4(1-x_0^2)\bar{z} - 4x_0(1-\bar{z}^2)}{R(x_0)} \right] + 2\hbar^2 \left[ \bar{z}R(\bar{z}) - 2b_3^{(1)}\bar{z} + b_1^{(1)}(1-\bar{z}^2) \right].$$

(Для упрощения обозначений индексы  $k, \ell$  у функции  $\Phi(\bar{z})$  будут ниже опущены). Оно имеет две особые точки  $\bar{z}_1 = i, \bar{z}_2 = -i$ , которые являются корнями уравнения  $R(\bar{z}) = 0$ , а также особую точку  $\bar{z}_3 = \infty$ . Точки  $\bar{z}_1, \bar{z}_2$  являются иррегулярными, а точка  $\bar{z}_3$  – регулярной.

Фуксовы уравнения с тремя особыми точками порождают хорошо известные системы классических ортогональных полиномов [32]. Для уравнения (36) подобной теории не существует.

Нам потребуется ряд результатов из теории когерентных преобразований [31]. Наряду с пространством  $\mathcal{P}_\ell$  рассмотрим дуальное ему гильбертово пространство  $\tilde{\mathcal{P}}_\ell$ , состоящее из мероморфных распределений на  $\mathbb{C}/\{0\}$  вида

$$\tilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{\tilde{g}_n}{z^{n+1}}.$$

Двойственность между пространствами  $\tilde{\mathcal{P}}_\ell$  и  $\mathcal{P}_\ell$  задается отображением

$$\mathcal{K} : \tilde{\mathcal{P}}_\ell \rightarrow \mathcal{P}_\ell, \quad (\mathcal{K}\tilde{g})(\bar{w}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} K(\bar{w}, z) \tilde{g}(z) dz,$$

где воспроизводящее ядро

$$K(\bar{w}, z) = (1 + \bar{w}z)^\ell, \quad (38)$$

а  $\gamma$  — цикл вокруг точки  $z = 0$ , ориентированный против часовой стрелки. Обратное отображение имеет вид

$$(\mathcal{K}^{-1}g)(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \tilde{L}(\bar{w}, z)g(\bar{w})d\bar{w},$$

где мероморфное воспроизводящее ядро

$$\tilde{L}(\bar{w}, z) = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{n!(\ell-n)!}{\ell!(\bar{w}z)^{n+1}}. \quad (39)$$

Обозначим через  $G(\bar{u}, \bar{w})$  ядро суперпозиции операторов  $\mathcal{K}^{-1}$  и  $\mathcal{K}$ . Из формул (38), (39) вытекает, что

$$G(\bar{u}, \bar{w}) = \frac{\bar{u}^{\ell+1} - \bar{w}^{\ell+1}}{\bar{u}^{\ell+1}(\bar{u} - \bar{w})}. \quad (40)$$

Ядро (40) в пространстве  $\mathcal{P}_{\ell}$  определяет тождественный оператор, а на множестве  $J$  антиголоморфных в окрестности нуля функций является проектором на пространство  $\mathcal{P}_{\ell}$ .

Будем искать решение уравнения (36) в виде

$$\Phi(\bar{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} G(\bar{u}, \bar{z})p(\bar{u})d\bar{u}, \quad (41)$$

где функция  $p \in J$ , а  $G$  задается формулой (40). Под действием отображения (41) операторы  $\overset{0}{S}_1, \overset{0}{S}_2, \overset{0}{S}_3$  преобразуются в операторы  $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3 : J \rightarrow J$ , а уравнение (36) — в уравнение

$$\left( -\hat{S}_2^2 + \left[ \frac{8ax_0}{1+x_0^2} + \hbar b_1^{(1)} \right] \hat{S}_1 + \left[ 4a \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} + \hbar b_3^{(1)} \right] \hat{S}_3 - 4a^2 - \hbar \xi_{k,\ell}^{(1)} \right) p = 0. \quad (42)$$

Справедлива [24]

**Лемма 4.** Операторы  $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$  имеют вид

$$\hat{S}_1 = \frac{\hbar}{2} \left( \bar{u}\ell + (1 - \bar{u}^2) \frac{d}{d\bar{u}} - \frac{\bar{u}^{\ell}}{\ell!} \frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}} \right), \quad \hat{S}_2 = \frac{i\hbar}{2} \left( \bar{u}\ell - (1 + \bar{u}^2) \frac{d}{d\bar{u}} + \frac{\bar{u}^{\ell}}{\ell!} \frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}} \right),$$

$$\hat{S}_3 = \hbar \left( \frac{\ell}{2} - \bar{u} \frac{d}{d\bar{u}} \right).$$

Пусть  $\Phi^{WKB}$  — ВКБ-приближение для решения уравнения (36) [33]. Тогда аналогично [24] доказывается, что если цикл  $\gamma$  расположен достаточно близко от нуля, то при подстановке  $\Phi^{WKB}$  в (42) дополнительные слагаемые

$$-\frac{\hbar \bar{u}^{\ell}}{2 \ell!} \frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}}, \quad \frac{i\hbar \bar{u}^{\ell}}{2 \ell!} \frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}},$$

вызванные заменой  $\overset{0}{S}_1, \overset{0}{S}_2, \overset{0}{S}_3$  на  $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$ , при  $\ell \rightarrow \infty$  вносят в невязку экспоненциально малый вклад  $O(\ell^{-\infty} \Phi^{WKB})$  по сравнению с невязкой  $O(\ell^{-2} \Phi^{WKB})$  в случае уравнения (36). При этом используются неравенства Коши [34]. Следовательно, вместо асимптотического решения уравнения (42)  $\ell + 2$  порядка в правую часть (41) можно подставить асимптотическое решение уравнения 2 порядка (36).

#### 4. Асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи. Вычисление поправки в спектральной серии

При построении асимптотики существенную роль играет поведение решений уравнения (26) около особых точек. Вблизи иррегулярных точек  $\bar{z}_1 = i$  и  $\bar{z}_2 = -i$  одно решение представимо в виде суммы степенного ряда, а второе линейно независимое решение задается рядом Лорана. Для регулярной точки  $\bar{z}_3 = \infty$  характеристические показатели равны  $-\ell$  и  $-\ell + 1$ , а, значит, оба линейно независимые решения уравнения (26) растут на  $\infty$  не быстрее  $\bar{z}^\ell$ . Поэтому принадлежность решения пространству  $\mathcal{P}_\ell$  не фиксирует его поведение на  $\infty$ .

При  $\xi = \xi_{k,\ell}$  точными решениями спектральной задачи (26),(27) являются многочлены. Наряду с такой задачей рассмотрим многоточечную спектральную задачу. Она состоит в нахождении чисел  $\xi_{k,\ell}$  (собственных значений), при которых у уравнения (26) существуют ненулевые антиголоморфные решения, которые разлагаются в степенные ряды вблизи особых точек  $\bar{z}_1 = i$  и  $\bar{z}_2 = -i$ .

Если число  $\xi_{k,\ell}$  и функция  $p(\bar{z})$  — асимптотическое решение такой многоточечной спектральной задачи, то при подстановке  $p(\bar{u})$  в правую часть формулы (41) получаем многочлен  $\Phi(\bar{z})$  — асимптотическое решение уравнения (26) из пространства  $\mathcal{P}_\ell$ . Условие нормировки (27) для  $\Phi(\bar{z})$  позволяет определить содержащийся в  $p(\bar{u})$  произвольный множитель. Таким образом, число  $\xi_{k,\ell}$  и многочлен  $\Phi(\bar{z})$  являются асимптотическим решением исходной спектральной задачи (26), (27).

Перейдем к нахождению асимптотических решений уравнения (36). Чтобы преобразовать (36) к виду, не содержащему первую производную, выполним подстановку [33]

$$\Phi(\bar{z}) = E(\bar{z})Y(\bar{z}). \quad (43)$$

Поскольку

$$\int \frac{\bar{z}}{R(\bar{z})} d\bar{z} = \frac{1}{2} \ln R(\bar{z}) + C, \quad \int \frac{\bar{z}}{R^2(\bar{z})} d\bar{z} = -\frac{1}{2R(\bar{z})} + C, \quad \int \frac{1 - \bar{z}^2}{R^2(\bar{z})} d\bar{z} = \frac{\bar{z}}{R(\bar{z})} + C,$$

то

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{R_1(\bar{z}, \hbar)}{\hbar^2 R^2(\bar{z})} d\bar{z}\right) = \exp\left(\left(\frac{a}{\hbar} - \frac{1}{2}\right) \ln R(\bar{z}) - \left(\frac{4a(1 - x_0^2)}{\hbar R(x_0)} + b_3^{(1)}\right) \frac{1}{R(\bar{z})} - \left(\frac{8ax_0}{\hbar R(x_0)} + b_1^{(1)}\right) \frac{\bar{z}}{R(\bar{z})} + C\right),$$

где  $C$  — произвольная константа. Следовательно,

$$E(\bar{z}) = (R(\bar{z}))^{a/\hbar - 1/2} \exp\left(-\frac{4a(1 - x_0^2 + 2x_0\bar{z})}{\hbar R(x_0)R(\bar{z})} - \frac{b_3^{(1)} + b_1^{(1)}\bar{z}}{R(\bar{z})}\right). \quad (44)$$

В результате подстановки (43) уравнение (36) преобразуется к виду

$$\hbar^2 \frac{d^2 Y}{d\bar{z}^2} - \left(Q_0(\bar{z}) + \hbar Q_1(\bar{z}) + O(\hbar^2) + O\left(\frac{\hbar^2}{R^4(\bar{z})}\right)\right) Y = 0. \quad (45)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
Q_0(\bar{z}) &= 32a^2(\bar{z} - x_0)^2 \Lambda(\bar{z}) R^{-4}(\bar{z}) R^{-2}(x_0), \\
Q_1(\bar{z}) &= 4a \left\{ [2 - 2x_0^2 + 4x_0 b_1^{(1)} + R(x_0) b_3^{(1)} + R(x_0) \xi_{k,\ell}^{(1)}/a] \bar{z}^4 + \right. \\
&+ [-8x_0 + 2(1 - 3x_0^2) b_1^{(1)} + 8x_0 b_3^{(1)}] \bar{z}^3 + [-8x_0 b_1^{(1)} + 8(1 - x_0^2) b_3^{(1)} + \\
&+ 2R(x_0) \xi_{k,\ell}^{(1)}/a] \bar{z}^2 + [-8x_0 + 2(x_0^2 - 3) b_1^{(1)} - 8x_0 b_3^{(1)}] \bar{z} - 2 + 2x_0^2 + \\
&\left. + 4x_0 b_1^{(1)} - R(x_0) b_3^{(1)} + R(x_0) \xi_{k,\ell}^{(1)}/a \right\} R^{-4}(\bar{z}) R^{-1}(x_0),
\end{aligned}$$

где

$$\Lambda(\bar{z}) = (3x_0^2 + 1)\bar{z}^2 + 4x_0\bar{z} + x_0^2 + 3, \quad (46)$$

а многочлен  $R(\bar{z})$  задан формулой (37).

Приравнивая  $Q_0(\bar{z})$  к нулю, находим, что уравнение (45) имеет точку поворота  $\bar{z} = x_0$  кратности 2, а также простые точки поворота

$$\bar{z}_{\pm} = \frac{-2x_0 \pm i\sqrt{3}(1 + x_0^2)}{1 + 3x_0^2}.$$

Точки  $\bar{z}_{\pm}$  лежат на окружностях радиуса  $1/\sqrt{3}$  с центрами в точках  $\pm 2i/\sqrt{3}$  соответственно. При движении  $x_0$  по вещественной оси от  $-\infty$  до  $+\infty$  точки  $\bar{z}_{\pm}$  совершают полные обороты по указанным окружностям (см. рис. 1)

Построим ВКБ-приближения для решений уравнения (45). Они справедливы вне малых окрестностей точек поворота и имеют вид

$$\begin{aligned}
Y_{\pm}^{WKB} &= \frac{\tilde{c}_{\pm}}{\sqrt[4]{Q_0(\bar{z})}} \exp \left( \pm \frac{1}{\hbar} \int \sqrt{Q_0(\bar{z})} d\bar{z} \pm \int \frac{Q_1(\bar{z})}{2\sqrt{Q_0(\bar{z})}} d\bar{z} \right) \left( 1 + O(\hbar) + \right. \\
&\left. + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - x_0)^2}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_{+})^{3/2}}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}_{-} - \bar{z})^{3/2}}\right) \right), \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (47)
\end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{c}_{\pm}$  — константы, в степенных функциях берутся главные значения. Разрез между точками поворота  $\bar{z}_{-}, \bar{z}_{+}$  проведен либо вдоль дуги окружности  $\smile_{\bar{z}_{-}, \bar{z}_{+}}$ , проходящей через точки  $\bar{z}_{-}, \bar{z}_{+}, -1/x_0$ , если  $x_0 \neq 0$ , либо вдоль лежащих на мнимой оси лучей  $(\infty, -i\sqrt{3}]$  и  $[i\sqrt{3}, \infty)$ , если  $x_0 = 0$ . Отметим, что эти кривые являются линиями Стокса [33] (см. равенство (58)). На рис. 2 (при  $x_0 \neq 0$ ) и рис. 3 (при  $x_0 = 0$ ) помимо особых точек и точек поворота изображены линии Стокса.

Вычислим возникающие в (47) интегралы. Введем функции

$$r_0(\bar{z}) = \sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{2}(x_0\bar{z} + 1), \quad (48)$$

$$r_1(\bar{z}) = \sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{3}(x_0\bar{z} + 1), \quad (49)$$

$$r_2(\bar{z}) = 2 \left( \sqrt{(1 + 3x_0^2)\Lambda(\bar{z})} + (1 + 3x_0^2)\bar{z} + 2x_0 \right),$$

$$r_3(\bar{z}) = 2 \left( \sqrt{2}(1 - ix_0)\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + (2x_0 - i(1 + 3x_0^2))\bar{z} + 3 + x_0^2 - 2x_0i \right),$$

$$r_4(\bar{z}) = 2 \left( \sqrt{2}(1 + ix_0)\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + (2x_0 + i(1 + 3x_0^2))\bar{z} + 3 + x_0^2 + 2x_0i \right).$$

Справедлива

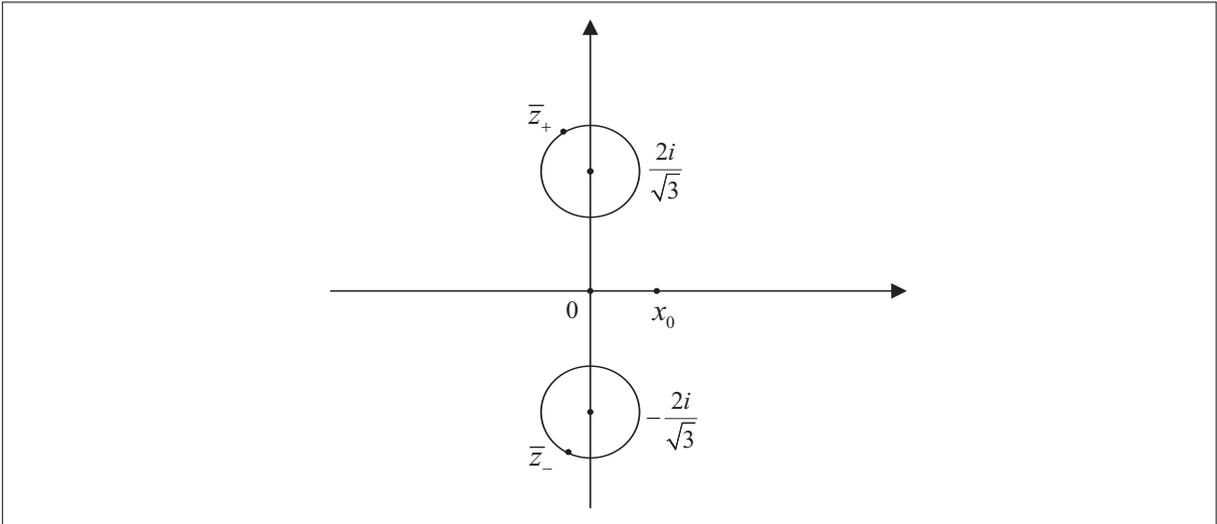


Рис. 1

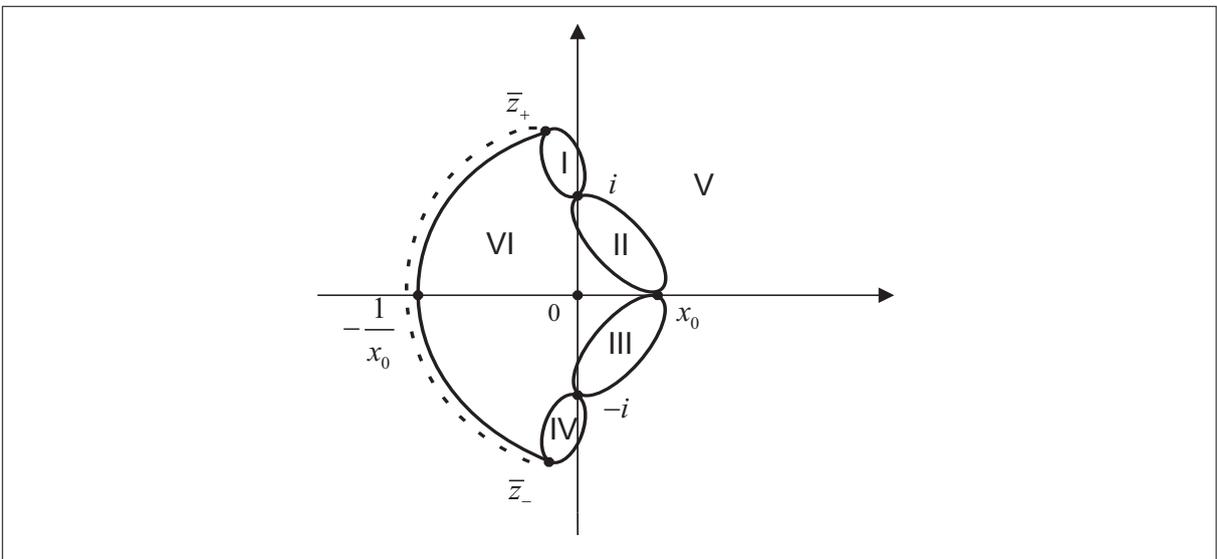


Рис. 2

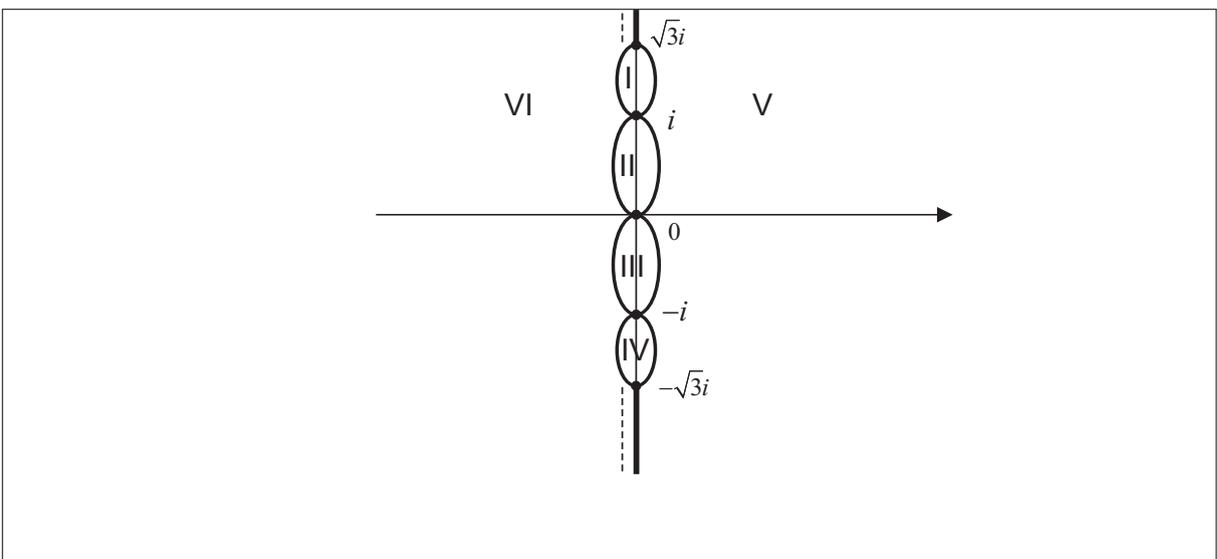


Рис. 3

**Лемма 5.** ВКБ-приближения  $Y_{\pm}^{WKB}$  представимы в виде

$$Y_{\pm}^{WKB} = \frac{c_{\pm} R(\bar{z})}{\sqrt{\bar{z} - x_0} \sqrt[4]{\Lambda(\bar{z})}} \left( \frac{r_0(\bar{z})}{\sqrt{R(\bar{z})}} \right)^{\mp(2a/\hbar+1)} \left( \frac{r_1(\bar{z})}{\bar{z} - x_0} \right)^{\pm\zeta_{k,\ell}^{(1)}} \times \\ \times \exp \left( \mp \frac{2\sqrt{2}a(x_0\bar{z} + 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{\hbar R(x_0)R(\bar{z})} \mp \frac{[(b_1^{(1)} - b_3^{(1)}x_0)\bar{z} + b_3^{(1)} + b_1^{(1)}x_0]\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{\sqrt{2}R(x_0)R(\bar{z})} \right) \times \\ \times \left( 1 + O(\hbar) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - x_0)^2}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}_- - \bar{z})^{3/2}}\right) \right), \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (50)$$

Здесь  $c_{\pm}$  — константы,

$$\zeta_{k,\ell}^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[ -\frac{\xi_{k,\ell}^{(1)}}{a} + 2 + \frac{1 - x_0^2}{1 + x_0^2} b_3^{(1)} + \frac{2x_0}{1 + x_0^2} b_1^{(1)} \right]. \quad (51)$$

*Доказательство.* Воспользуемся следующими интегралами [35]:

$$\int \frac{d\bar{z}}{\bar{z}\sqrt{X(\bar{z})}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left( \frac{2\sqrt{cX(\bar{z})}}{\bar{z}} + \frac{2c}{\bar{z}} + b \right) + C, \quad (52)$$

$$\int \frac{\sqrt{X(\bar{z})}}{\bar{z}} d\bar{z} = \sqrt{X(\bar{z})} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \ln(2\sqrt{aX(\bar{z})} + 2a\bar{z} + b) + c \int \frac{d\bar{z}}{\bar{z}\sqrt{X(\bar{z})}}, \quad (53)$$

$$\int \frac{\sqrt{X(\bar{z})}}{\bar{z}^2} d\bar{z} = -\frac{\sqrt{X(\bar{z})}}{\bar{z}} + \sqrt{a} \ln(2\sqrt{aX(\bar{z})} + 2a\bar{z} + b) + \frac{b}{2} \int \frac{d\bar{z}}{\bar{z}\sqrt{X(\bar{z})}}, \quad (54)$$

$$\int \frac{d\bar{z}}{\bar{z}^2 \sqrt{X(\bar{z})}} = -\frac{\sqrt{X(\bar{z})}}{c\bar{z}} - \frac{b}{2c} \int \frac{d\bar{z}}{\bar{z}\sqrt{X(\bar{z})}}, \quad (55)$$

где многочлен  $X(\bar{z}) = a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c$ ,  $C$  — произвольная константа. Поскольку

$$\frac{\bar{z} - x_0}{R^2(\bar{z})} = \frac{1}{4} \left( -\frac{ix_0}{\bar{z} + i} + \frac{ix_0}{\bar{z} - i} + \frac{x_0 + i}{(\bar{z} + i)^2} + \frac{x_0 - i}{(\bar{z} - i)^2} \right),$$

то в силу (52)–(54)

$$\int \sqrt{Q_0(\bar{z})} d\bar{z} = \\ = \frac{\sqrt{2}a}{R(x_0)} \left\{ -ix_0 \left[ \sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \frac{2x_0 - i(1 + 3x_0^2)}{\sqrt{1 + 3x_0^2}} \ln r_2(\bar{z}) - \sqrt{2}(1 - ix_0) \ln \left( \frac{r_3(\bar{z})}{\bar{z} + i} \right) \right] + \right. \\ \left. + ix_0 \left[ \sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \frac{2x_0 + i(1 + 3x_0^2)}{\sqrt{1 + 3x_0^2}} \ln r_2(\bar{z}) - \sqrt{2}(1 + ix_0) \ln \left( \frac{r_4(\bar{z})}{\bar{z} - i} \right) \right] + \right. \\ \left. + (x_0 + i) \left[ -\frac{\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{\bar{z} + i} + \sqrt{1 + 3x_0^2} \ln r_2(\bar{z}) - \frac{2x_0 - i(1 + 3x_0^2)}{\sqrt{2}(1 - ix_0)} \ln \left( \frac{r_3(\bar{z})}{\bar{z} + i} \right) \right] + \right. \\ \left. + (x_0 - i) \left[ -\frac{\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{\bar{z} - i} + \sqrt{1 + 3x_0^2} \ln r_2(\bar{z}) - \frac{2x_0 - i(1 + 3x_0^2)}{\sqrt{2}(1 + ix_0)} \ln \left( \frac{r_4(\bar{z})}{\bar{z} - i} \right) \right] \right\} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{R(x_0)} \left\{ -\frac{2(x_0\bar{z} + 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{R(\bar{z})} - \frac{R(x_0)}{\sqrt{2}} \ln \left( \frac{r_3(\bar{z})r_4(\bar{z})}{R(\bar{z})} \right) \right\} + C.$$

Так как справедливо соотношение

$$r_3(\bar{z})r_4(\bar{z}) = 12R(x_0)r_0^2(\bar{z}),$$

то

$$\int \sqrt{Q_0(\bar{z})}d\bar{z} = -\frac{2\sqrt{2}a(x_0\bar{z} + 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{R(x_0)R(\bar{z})} - 2a \ln \left( \frac{r_0(\bar{z})}{\sqrt{R(\bar{z})}} \right) + C. \quad (56)$$

Аналогично, разлагая дроби на простейшие и используя (52), (55), находим, что

$$\begin{aligned} \int \frac{Q_1(\bar{z})}{2\sqrt{Q_0(\bar{z})}}d\bar{z} &= -\frac{[(b_1^{(1)} - b_3^{(1)}x_0)\bar{z} + b_3^{(1)} + b_1^{(1)}x_0]\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{\sqrt{2}R(x_0)R(\bar{z})} + \\ &+ \zeta_{k,\ell}^{(1)} \ln \left( \frac{r_1(\bar{z})}{\bar{z} - x_0} \right) - \ln \left( \frac{r_0(\bar{z})}{\sqrt{R(\bar{z})}} \right) + C. \end{aligned} \quad (57)$$

Из (56), (57) вытекает формула (50). Лемма доказана.

Далее покажем, что при  $x_0 \neq 0$  проходящая через точки  $\bar{z}_-, \bar{z}_+, -1/x_0$  дуга окружности  $\smile_{\bar{z}_-, \bar{z}_+}$ , а также лежащие на мнимой оси лучи  $(\infty, -i\sqrt{3}]$ ,  $[i\sqrt{3}, \infty)$  (в случае  $x_0 = 0$ ) являются линиями Стокса. Для этого докажем, что на указанных кривых выполняется равенство

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\sqrt{2}(x_0\bar{z} + 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{(1 + x_0^2)(1 + \bar{z}^2)} + \ln \left( \frac{\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{2}(x_0\bar{z} + 1)}{\sqrt{1 + \bar{z}^2}} \right) \right] = \ln \sqrt{1 + x_0^2}. \quad (58)$$

Для определенности рассмотрим случай, когда  $x_0 > 0$ . Тогда окружность, проходящая через точки  $\bar{z}_-, \bar{z}_+, -1/x_0$ , определяется уравнением  $|\bar{z} - x_*| = R_*$ , где

$$x_* = \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{1}{x_0} \right), \quad R_* = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{1}{x_0} \right).$$

Следовательно дуга  $\smile_{\bar{z}_-, \bar{z}_+}$  может быть задана параметрически:

$$\bar{z} = x_* - R_*e^{-i\varphi}, \quad \varphi \in [\varphi_-, \varphi_+]. \quad (59)$$

Здесь

$$\varphi_{\pm} = \pm \arccos \left( \frac{3x_0^2 - 1}{3x_0^2 + 1} \right). \quad (60)$$

Так как при  $\bar{z} \in \smile_{\bar{z}_-, \bar{z}_+}$  имеют место соотношения

$$x_0\bar{z} + 1 = i(1 + x_0^2)e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$\sqrt{\Lambda(\bar{z})} = \sqrt{2}R_*e^{-i\varphi/2} \sqrt{\frac{1 - 3x_0^2}{1 + 3x_0^2} + \cos \varphi} = 2R_*e^{-i\varphi/2} \sqrt{1 - (3x_0^2 + 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$1 + \bar{z}^2 = R_*e^{-i\varphi} [1 - x_0^2 + (x_0^2 + 1) \cos \varphi] / x_0, \quad (61)$$

то

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\sqrt{2}(x_0\bar{z} + 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{(1+x_0^2)(1+\bar{z}^2)} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{i2\sqrt{2}x_0 \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - (3x_0^2 + 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{1 - x_0^2 + (x_0^2 + 1) \cos \varphi} \right) = 0.$$

Учитывая также, что

$$\left| \frac{\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{2}(x_0\bar{z} + 1)}{\sqrt{1 + \bar{z}^2}} \right| = \frac{\sqrt{1 + x_0^2} \left| \sqrt{1 - (3x_0^2 + 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2}} + i\sqrt{2}x_0 \sin \frac{\varphi}{2} \right|}{\sqrt{-x_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} = \sqrt{x_0^2 + 1},$$

приходим к равенству (58).

В случае  $x_0 = 0$  при  $\bar{z} = iy$ , где  $|y| \geq \sqrt{3}$ , равенство (58) также имеет место, поскольку

$$\operatorname{Re} \left( \pm \frac{\sqrt{2}i\sqrt{y^2 - 3}}{1 - y^2} \right) + \ln \left| \frac{\pm i\sqrt{y^2 - 3} + \sqrt{2}}{\sqrt{y^2 - 1}} \right| = 0.$$

Изучим поведение ВКБ-приближений  $Y_{\pm}^{WKB}$  вблизи точек поворота. Разлагая входящие в (50) функции по формуле Тейлора, получаем

**Лемма 6.** *Справедливы следующие асимптотические разложения:*

$$\begin{aligned} Y_{\pm}^{WKB} &= \frac{c_{\pm}^{(+)}}{\sqrt[4]{i\bar{z} - i\bar{z}_+}} \exp \left( \pm \frac{2}{3} \frac{\gamma_+^{3/2}}{\hbar} (i\bar{z} - i\bar{z}_+)^{3/2} \right) \left( 1 + O \left( \frac{(\bar{z} - \bar{z}_+)^{5/2}}{\hbar} \right) + \right. \\ &\quad \left. + O \left( \sqrt{\bar{z} - \bar{z}_+} \right) + O \left( \frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (62)$$

при  $\bar{z} \rightarrow \bar{z}_+$ ,  $|\arg(i\gamma_+(\bar{z} - \bar{z}_+))| < \pi$ ;

$$\begin{aligned} Y_{\pm}^{WKB} &= \frac{c_{\pm}^{(-)}}{\sqrt[4]{-i\bar{z} + i\bar{z}_-}} \exp \left( \pm \frac{2}{3} \frac{\gamma_-^{3/2}}{\hbar} (-i\bar{z} + i\bar{z}_-)^{3/2} \right) \left( 1 + O \left( \frac{(\bar{z}_- - \bar{z})^{5/2}}{\hbar} \right) + \right. \\ &\quad \left. + O \left( \sqrt{\bar{z}_- - \bar{z}} \right) + O \left( \frac{\hbar}{(\bar{z}_- - \bar{z})^{3/2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (63)$$

при  $\bar{z} \rightarrow \bar{z}_-$ ,  $|\arg(i\gamma_-(-\bar{z} + \bar{z}_-))| < \pi$ ;

$$\begin{aligned} Y_{\pm}^{WKB} &= c_{\pm}^{(x_0)} (\bar{z} - x_0)^{-1/2 \mp \zeta_{k,\ell}^{(1)}} \exp \left( \pm \frac{2\sqrt{6}a}{\hbar R^2(x_0)} \left[ (\bar{z} - x_0)^2 - \frac{2x_0}{1+x_0^2} (\bar{z} - x_0)^3 \right] \right) \times \\ &\quad \times \left( 1 + O(\bar{z} - x_0) + O \left( \frac{(\bar{z} - x_0)^4}{\hbar} \right) + O \left( \frac{\hbar}{(\bar{z} - x_0)^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (64)$$

при  $\bar{z} \rightarrow x_0$ . Здесь  $c_{\pm}^{(+)}$ ,  $c_{\pm}^{(-)}$ ,  $c_{\pm}^{(x_0)}$  — константы,

$$\gamma_{\pm} = \frac{(2a)^{2/3} \sqrt{3} (1 \mp i\sqrt{3}x_0)^2}{R(x_0)}, \quad (65)$$

Найдем, наконец, ВКБ-приближения для решений уравнения (36). В силу (43), (44), (50), а также соотношений

$$\frac{-2(2x_0\bar{z} + 1 - x_0^2) + \sqrt{2}(x_0\bar{z} + 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{R(\bar{z})} = \frac{\sqrt{2}R(\bar{z})\Lambda_0(\bar{z})}{(x_0\bar{z} + 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{2}(2x_0\bar{z} + 1 - x_0^2)},$$

$$\frac{[(b_1^{(1)} - b_3^{(1)}x_0)\bar{z} + b_3^{(1)} + b_1^{(1)}x_0]\sqrt{\Lambda(\bar{z})} - \sqrt{2}R(x_0)(b_1^{(1)}\bar{z} + b_3^{(1)})}{\sqrt{2}R(x_0)R(\bar{z})} = \frac{\Lambda_1(\bar{z})}{\Lambda_2(\bar{z})},$$

где

$$\Lambda_0(\bar{z}) = x_0^2(1 + 3x_0^2)\bar{z}^2 + 2x_0(1 + 5x_0^2)\bar{z} + 1 + 5x_0^2 - 2x_0^4, \quad (66)$$

$$\Lambda_1(\bar{z}) = (1 + 3x_0^2)(b_1^{(1)} - x_0b_3^{(1)})^2\bar{z}^2 + 2(1 + x_0^2)(b_1^{(1)} - x_0b_3^{(1)})(b_3^{(1)} + 3x_0b_1^{(1)})\bar{z} + (3 + x_0^2)(b_3^{(1)} + x_0b_1^{(1)})^2 - 2(1 + x_0^2)^2(b_3^{(1)})^2, \quad (67)$$

$$\Lambda_2(\bar{z}) = \sqrt{2}(1 + x_0^2)[(b_1^{(1)} - x_0b_3^{(1)})\bar{z} + b_3^{(1)} + x_0b_1^{(1)}]\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{2}(1 + x_0^2)(b_1^{(1)}\bar{z} + b_3^{(1)}), \quad (68)$$

имеем:

$$\Phi_-^{WKB}(\bar{z}) = \frac{c_-}{\sqrt[4]{\Lambda(\bar{z})}}(\bar{z} - x_0)^{-1/2 + \zeta_{k,\ell}^{(1)}}(r_0(\bar{z}))^{2a/h+1}(r_1(\bar{z}))^{-\zeta_{k,\ell}^{(1)}} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{2\sqrt{2}a\Lambda_0(\bar{z})}{\hbar R(x_0)[(x_0\bar{z} + 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{2}(2x_0\bar{z} + 1 - x_0^2)]} + \frac{\Lambda_1(\bar{z})}{\Lambda_2(\bar{z})}\right) \times$$

$$\times \left(1 + O(\hbar) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - x_0)^2}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}_- - \bar{z})^{3/2}}\right)\right), \quad (69)$$

$$\Phi_+^{WKB}(\bar{z}) = \frac{c_+}{\sqrt[4]{\Lambda(\bar{z})}}(R(\bar{z}))^{2a/h}(\bar{z} - x_0)^{-1/2 - \zeta_{k,\ell}^{(1)}}(r_0(\bar{z}))^{-2a/h-1}(r_1(\bar{z}))^{\zeta_{k,\ell}^{(1)}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{a}{\hbar} \left[ \frac{4(2x_0\bar{z} + 1 - x_0^2) + 2\sqrt{2}(x_0\bar{z} + 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{R(x_0)R(\bar{z})} \right] - \frac{b_3^{(1)} + b_1^{(1)}\bar{z}}{R(\bar{z})} - \frac{[(b_1^{(1)} - b_3^{(1)}x_0)\bar{z} + b_3^{(1)} + b_1^{(1)}x_0]\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{\sqrt{2}R(x_0)R(\bar{z})}\right) \times$$

$$\times \left(1 + O(\hbar) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - x_0)^2}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}_- - \bar{z})^{3/2}}\right)\right).$$

Здесь  $r_0(\bar{z}), r_1(\bar{z}), \zeta_{k,\ell}^{(1)}$  заданы формулами (48), (49), (51), а  $c_{\pm}$  — константы.

Перейдем к построению асимптотического решения многоточечной спектральной задачи  $p(\bar{z})$ . Согласно формуле (69)  $\Phi_-^{WKB}(\bar{z})$  разлагается в степенной ряд вблизи особых точек  $\bar{z}_1 = i$  и  $\bar{z}_2 = -i$ . Тем самым определен вид ВКБ-приближения в областях I-VI (см. рис. 2 и 3).

Найдем асимптотические решения около точек поворота. Из уравнения (45) вытекает, что вблизи  $\bar{z}_+$

$$\hbar^2 \frac{d^2 Y}{d\bar{z}^2} + (\gamma_+^3(i\bar{z} - i\bar{z}_+) + O((\bar{z} - \bar{z}_+)^2) + O(\hbar))Y = 0,$$

а вблизи  $\bar{z}_-$

$$\hbar^2 \frac{d^2 Y}{d\bar{z}^2} + (\gamma_-^3 (-i\bar{z} + i\bar{z}_-) + O((\bar{z}_- - \bar{z})^2) + O(\hbar))Y = 0.$$

Следовательно, главные члены асимптотических разложений вблизи  $\bar{z}_\pm$  выражаются через функции Эйри:

$$y_\pm^0 = \alpha_{1,\pm} \text{Ai} \left( \pm \frac{\gamma_\pm (i\bar{z} - i\bar{z}_\pm)}{\hbar^{2/3}} \right) + \alpha_{2,\pm} \text{Bi} \left( \pm \frac{\gamma_\pm (i\bar{z} - i\bar{z}_\pm)}{\hbar^{2/3}} \right).$$

Здесь  $\alpha_{1,\pm}, \alpha_{2,\pm}$  – константы,  $\gamma_\pm$  заданы формулами (65).

В силу известных асимптотик для функций Эйри [36]

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \sqrt[4]{z}} \exp \left( -\frac{2}{3} z^{3/2} \right) \left( 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right), \quad |\arg z| < \pi, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (70)$$

и

$$\text{Bi}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{z}} \exp \left( \frac{2}{3} z^{3/2} \right) \left( 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right), \quad |\arg z| < \frac{\pi}{3}, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

при  $|\arg(i\gamma_+(z - \bar{z}_+))| < \pi/3$ ,  $(z - \bar{z}_+)/\hbar^{2/3} \rightarrow \infty$

$$y_+^0 = \frac{\alpha_{1,+} \hbar^{1/6}}{2\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\gamma_+(i\bar{z} - i\bar{z}_+)}} \exp \left( -\frac{2}{3} \frac{\gamma_+^{3/2} (i\bar{z} - i\bar{z}_+)^{3/2}}{\hbar} \right) \left( 1 + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}}\right) \right) +$$

$$+ \frac{\alpha_{2,+} \hbar^{1/6}}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\gamma_+(i\bar{z} - i\bar{z}_+)}} \exp \left( \frac{2}{3} \frac{\gamma_+^{3/2} (i\bar{z} - i\bar{z}_+)^{3/2}}{\hbar} \right) \left( 1 + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}}\right) \right). \quad (71)$$

В формуле (71) первое слагаемое экспоненциально убывает, а второе – экспоненциально возрастает. Согласуем разложение (71) вблизи  $\bar{z}_+$  (на расстоянии порядка  $\hbar^{1/2}$ ) с ВКБ-приближением  $Y_-^{WKB}$ , которое справедливо в области I. Оно имеет экспоненциально убывающую асимптотику (62). Следовательно,  $\alpha_{2,+} = 0$ , а константа

$$\alpha_{1,+} = c_-^{(+)} 2\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\gamma_+} \hbar^{-1/6}. \quad (72)$$

Аналогично  $y_-^0$  согласуется с ВКБ-приближением  $Y_-^{WKB}$ , которое является асимптотическим решением (45) в области IV и экспоненциально убывает вблизи  $\bar{z}_-$ . В результате получаем, что  $\alpha_{2,-} = 0$ , а константа

$$\alpha_{1,-} = c_-^{(-)} 2\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\gamma_-} \hbar^{-1/6}. \quad (73)$$

Пусть

$$\mu_{1,\pm} = \frac{2\bar{z}_\pm}{R(\bar{z}_\pm)} + \frac{8(1 - x_0 + x_0\bar{z}_\pm(\bar{z}_\pm - x_0))}{R(x_0)R^2(\bar{z}_\pm)}, \quad \mu_{2,\pm} = \frac{2(1 - \bar{z}_\pm^2)}{R^2(\bar{z}_\pm)} + \frac{8(1 - x_0^2 + 2x_0\bar{z}_\pm)}{R(x_0)R^2(\bar{z}_\pm)}.$$

Разлагая в окрестности точки  $\bar{z}_\pm$  функцию (44) по формуле Тейлора, получаем

**Лемма 7.** *Асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи вблизи  $\bar{z}_\pm$  имеет вид*

$$p(\bar{z}) = E(\bar{z}_\pm) \exp \left( \mu_{1,\pm} \frac{a(\bar{z} - \bar{z}_\pm)}{\hbar} + \mu_{2,\pm} \frac{a(\bar{z} - \bar{z}_\pm)^2}{2\hbar} \right) \left( y_\pm^0 + \right.$$

$$+O\left((\bar{z} - \bar{z}_{\pm})y_{\pm}^0\right) + O\left(\frac{(\bar{z} - \bar{z}_{\pm})^3}{\hbar}y_{\pm}^0\right) + O\left(\hbar\frac{dy_{\pm}^0}{d\bar{z}}\right) + O\left((\bar{z} - \bar{z}_{\pm})^2\frac{dy_{\pm}^0}{d\bar{z}}\right), \quad (74)$$

где

$$y_{\pm}^0 = \alpha_{1,\pm} Ai\left(\pm \frac{\gamma_{\pm}(i\bar{z} - i\bar{z}_{\pm})}{\hbar^{2/3}}\right), \quad (75)$$

а константы  $\alpha_{1,\pm}$  заданы формулами (72), (73).

Отметим, что в силу (70), (62), (63) определенные формулой (75) функции  $y_+^0$  и  $y_-^0$  в областях V, VI (см. рис. 2 и 3) около точек  $\bar{z}_{\pm}$  согласуются с  $Y_-^{WKB}$ .

Построим, наконец, решение многоточечной спектральной задачи вблизи точки поворота  $\bar{z} = x_0$ , а также определим числа  $\zeta_{k,\ell}^{(1)}$ . Разложим в уравнении (45) функции  $Q_0(\bar{z})$  и  $R(\bar{z})$  по формуле Тейлора в окрестности  $\bar{z} = x_0$ . В результате, после замены

$$\bar{u} = \frac{\bar{z} - x_0}{\sqrt{\hbar}\beta}, \quad (76)$$

где

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{2}(1 + x_0^2)}{4\sqrt[4]{3}\sqrt{a}},$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{d\bar{u}^2} + \left\{ -\frac{\bar{u}^2}{4} + \nu + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\hbar}\sqrt[4]{2}}{4\sqrt[4]{3}\sqrt{a}} \left[ \frac{3x_0}{2}\bar{u}^3 - (4x_0\zeta_{k,\ell}^{(1)} + B(x_0))\bar{u} \right] + \right. \\ \left. + O(\hbar) + O(\hbar\bar{u}^4) \right\} Y = 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Здесь

$$\nu = \zeta_{k,\ell}^{(1)} - \frac{1}{2}, \quad (78)$$

$$B(x_0) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{2x_0}{1 + x_0^2} b_3^{(1)} - \frac{1 - x_0^2}{1 + x_0^2} b_1^{(1)} \right). \quad (79)$$

Будем искать асимптотическое решение (77) в виде

$$Y = y_0(\bar{u}) + \sqrt{\hbar}y_1(\bar{u}) + O(\hbar y_0) + O(\hbar\bar{u}^6 y_0) + O\left(\hbar\bar{u}\frac{dy_0}{d\bar{u}}\right) + O\left(\hbar\bar{u}^3\frac{dy_0}{d\bar{u}}\right). \quad (80)$$

Тогда главный член асимптотики удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 y_0}{d\bar{u}^2} + \left( -\frac{\bar{u}^2}{4} + \nu + \frac{1}{2} \right) y_0 = 0,$$

общее решение которого представимо в виде линейной комбинации функций параболического цилиндра

$$y_0 = \alpha_1 D_{\nu}(\bar{u}) + \alpha_2 D_{-\nu-1}(i\bar{u}). \quad (81)$$

Здесь  $\alpha_1, \alpha_2$  — константы.

Воспользуемся асимптотическими разложениями для функций параболического цилиндра [32]. При  $|z| \rightarrow \infty$  имеем:

$$D_{\nu}(z) = z^{\nu} e^{-z^2/4} (1 + O(z^{-2})), \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4}; \quad (82)$$

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-z^2/4} (1 + O(z^{-2})) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\nu\pi i} z^{-\nu-1} e^{z^2/4} (1 + O(z^{-2})), \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}, \quad (83)$$

где  $\Gamma(\nu)$  — гамма функция. Следовательно, при  $|\bar{u}| \rightarrow \infty$ ,  $|\arg \bar{u}| < \pi/4$

$$y_0 = \alpha_1 \left( \frac{\bar{z} - x_0}{\sqrt{\hbar}\beta} \right)^\nu \exp \left( - \frac{2\sqrt{6}a(\bar{z} - x_0)^2}{R^2(x_0)\hbar} \right) \left( 1 + O \left( \frac{\hbar}{(\bar{z} - x_0)^2} \right) \right) + \alpha_2 \left( \frac{i(\bar{z} - x_0)}{\sqrt{\hbar}\beta} \right)^{-\nu-1} \exp \left( \frac{2\sqrt{6}a(\bar{z} - x_0)^2}{R^2(x_0)\hbar} \right) \left( 1 + O \left( \frac{\hbar}{(\bar{z} - x_0)^2} \right) \right). \quad (84)$$

Первое слагаемое в (84) экспоненциально убывает, а второе — экспоненциально растет. В области V вблизи  $\bar{z} = x_0$  (на расстоянии порядка  $\hbar^{3/8}$ ) при  $|\arg \bar{u}| < \pi/4$  функция  $y_0$  должна согласовываться с  $Y_-^{WKB}$ , имеющим разложение (64). Поскольку члены этого разложения экспоненциально убывают при  $|\arg \bar{u}| < \pi/4$ , то константа  $\alpha_2 = 0$ .

Далее в силу (83) при  $|\bar{u}| \rightarrow \infty$ ,  $3\pi/4 < \arg \bar{u} < 5\pi/4$

$$y_0 = \alpha_1 \left[ \left( \frac{\bar{z} - x_0}{\sqrt{\hbar}\beta} \right)^\nu \exp \left( - \frac{2\sqrt{6}a(\bar{z} - x_0)^2}{R^2(x_0)\hbar} \right) \left( 1 + O \left( \frac{\hbar}{(\bar{z} - x_0)^2} \right) \right) - \frac{\sqrt{2\pi} \exp(\nu\pi i)}{\Gamma(-\nu)} \left( \frac{\bar{z} - x_0}{\sqrt{\hbar}\beta} \right)^{-\nu-1} \exp \left( \frac{2\sqrt{6}a(\bar{z} - x_0)^2}{R^2(x_0)\hbar} \right) \left( 1 + O \left( \frac{\hbar}{(\bar{z} - x_0)^2} \right) \right) \right].$$

Здесь первое слагаемое экспоненциально убывает, а второе — экспоненциально растет. В области VI вблизи  $\bar{z} = x_0$  при  $3\pi/4 < \arg \bar{u} < 5\pi/4$  функция  $y_0$  также должна согласовываться с  $Y_-^{WKB}$ , имеющим разложение (64). Поскольку члены этого разложения экспоненциально убывают при  $3\pi/4 < \arg \bar{u} < 5\pi/4$ , то приходим к условию

$$\frac{1}{\Gamma(-\nu)} = 0.$$

Как известно [36], гамма функция  $\Gamma(-\nu)$  имеет полюса лишь при

$$\nu = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (85)$$

Так как  $\nu$  и  $\xi_{k,\ell}^{(1)}$  связаны равенствами (51), (78), то поправка в спектральной серии найдена. Доказана

**Лемма 8.** Числа  $\xi_{k,\ell}^{(1)}$  в формуле (35) имеют вид

$$\xi_{k,\ell}^{(1)} = a \left( 2 + \frac{1 - x_0^2}{1 + x_0^2} b_3^{(1)} + \frac{2x_0}{1 + x_0^2} b_1^{(1)} - 2\sqrt{6} \left( k + \frac{1}{2} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (86)$$

Из равенств (81), (85) вытекает, что

$$y_0 = \alpha_1 D_k(\bar{u}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (87)$$

где  $\alpha_1 = c_-^{(x_0)} \hbar^{k/2} \beta^k$ . Функции в правой части (87) выражаются через полиномы Эрмита:

$$y_0 = \frac{\alpha_1}{2^{k/2}} H_k \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) e^{-\bar{u}^2/4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (88)$$

В силу (64), (82)  $y_0$  согласуется в областях II, III с ВКБ-приближением  $Y_-^{WKB}$ .

Найдем следующий член в разложении (80). Из (77), (78), (85) вытекает, что  $y_1$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 y_1}{d\bar{u}^2} + \left(-\frac{\bar{u}^2}{4} + k + \frac{1}{2}\right) y_1 = \frac{\sqrt[4]{2}}{4\sqrt[4]{3}\sqrt{a}} \left\{ -\frac{3x_0}{2}\bar{u}^3 + \left[4x_0\left(k + \frac{1}{2}\right) + B(x_0)\right]\bar{u} \right\} \alpha_1 D_k(\bar{u}), \quad (89)$$

где  $B(x_0)$  определено формулой (79). Непосредственным дифференцированием доказывается, что общее решение уравнения (89) имеет вид

$$y_1 = \frac{\alpha_1 \sqrt[4]{2}}{4\sqrt[4]{3}\sqrt{a}} \left[ (2B(x_0) - x_0 \bar{u}^2) D'_k(\bar{u}) + x_0 \bar{u} D_k(\bar{u}) \right] + \alpha_{1,1} D_k(\bar{u}) + \alpha_{1,2} D_{-k-1}(i\bar{u}).$$

Здесь  $\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$  — константы. Из условия согласования  $y_1$  с ВКБ-приближением вытекает, что  $\alpha_{1,2} = 0$ . Положим, кроме того,  $\alpha_{1,1} = 0$ , считая при этом, что в  $\alpha_1$  содержится поправка порядка  $\sqrt{\hbar}$ . Функция  $y_1$  также выражается через полиномы Эрмита:

$$y_1 = \frac{\alpha_1 \sqrt[4]{2}}{4\sqrt[4]{3}\sqrt{a} 2^{(k-1)/2}} \left\{ \left[ x_0 \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right)^3 + (x_0 - B(x_0)) \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right] H_k \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) + \left[ -x_0 \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right)^2 + B(x_0) \right] H'_k \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) \right\} e^{-\bar{u}^2/4}. \quad (90)$$

Так как справедливо равенство (43), то для нахождения асимптотического решения многоточечной спектральной задачи вблизи  $\bar{z} = x_0$  остается разложить функцию  $E(\bar{z})$  по степеням  $\bar{z} - x_0$ . Делая замену (76), получаем:

$$E(\bar{z}) = \mu \exp \left( \frac{2ax_0\beta\bar{u}}{\sqrt{\hbar}R(x_0)} + \frac{a\beta^2(5-x_0^2)\bar{u}^2}{R^2(x_0)} \right) \left\{ 1 + \sqrt{\hbar} \left[ -\frac{2a\beta^3 x_0(15-x_0^2)\bar{u}^3}{3R^3(x_0)} - \frac{x_0\beta\bar{u}}{R(x_0)} + \frac{2^{3/4}B(x_0)\bar{u}}{4\sqrt{a}3^{3/4}} \right] + O(\hbar) + O(\hbar\bar{u}^6) \right\}. \quad (91)$$

Здесь

$$\mu = (R(x_0))^{a/\hbar-1/2} \exp \left( -\frac{4a}{\hbar R(x_0)} - \frac{b_3^{(1)} + x_0 b_1^{(1)}}{R(x_0)} \right). \quad (92)$$

Далее перемножим (91) и (80). Поскольку  $y_0, y_1$  определены соотношениями (88), (90), то приходим к разложению

$$p(\bar{z}) = p_0(\bar{u}) + \sqrt{\hbar} p_1(\bar{u}) + O(\hbar p_0) + O(\hbar\bar{u}^6 p_0) + \exp \left( \frac{2ax_0\beta\bar{u}}{\sqrt{\hbar}R(x_0)} + \frac{a\beta^2(5-x_0^2)\bar{u}^2}{R^2(x_0)} \right) \left( O\left(\hbar\bar{u} \frac{dy_0}{d\bar{u}}\right) + O\left(\hbar\bar{u}^5 \frac{dy_0}{d\bar{u}}\right) \right), \quad (93)$$

где

$$p_0 = \frac{\alpha_1 \mu}{2^{k/2}} \exp \left( \frac{\sqrt{a}x_0\bar{u}}{\sqrt{\hbar}2^{3/4}\sqrt[4]{3}} + \frac{(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - \sqrt{2}x_0^2)\bar{u}^2}{16\sqrt{3}} \right) H_k \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right), \quad (94)$$

$$p_1 = \frac{\alpha_1 \mu}{2^{k/2+1}6^{3/4}\sqrt{a}} \exp \left( \frac{\sqrt{a}x_0\bar{u}}{\sqrt{\hbar}2^{3/4}\sqrt[4]{3}} + \frac{(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - \sqrt{2}x_0^2)\bar{u}^2}{16\sqrt{3}} \right) \times$$

$$\times \left\{ \left[ \frac{x_0(3(-5 + 2\sqrt{6}) + x_0^2)}{6} \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right)^3 + (2 - \sqrt{6})B(x_0) \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right] H_k \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{6} \left[ -x_0 \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right)^2 + B(x_0) \right] H'_k \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Доказана

**Лемма 9.** Асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи вблизи точки поворота  $\bar{z} = x_0$  имеет вид (93).

Формула (86) для  $\xi_{k,\ell}^{(1)}$  позволяет записать в окончательной форме выражение (69) для  $\Phi_-^{WKB}(\bar{z})$ :

$$\Phi_-^{WKB}(\bar{z}) = \Phi_{-,0}^{WKB}(\bar{z}) \left( 1 + O(\hbar) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - x_0)^2}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}_- - \bar{z})^{3/2}}\right) \right), \quad (95)$$

где

$$\Phi_{-,0}^{WKB}(\bar{z}) = \frac{c_- (\bar{z} - x_0)^k (r_0(\bar{z}))^{\ell+1}}{\sqrt[4]{\Lambda(\bar{z})} (r_1(\bar{z}))^{k+1/2}} \times \exp \left( \frac{\sqrt{2}\ell\Lambda_0(\bar{z})}{R(x_0)[(x_0\bar{z} + 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{2}(2x_0\bar{z} + 1 - x_0^2)]} + \frac{\Lambda_1(\bar{z})}{\Lambda_2(\bar{z})} \right), \quad (96)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $c_-$  — константа,  $x_0 \geq 0$ ,  $\Lambda_j(\bar{z})$  ( $j = 0, 1, 2$ ) определены равенствами (66)–(68). Формула для ВКБ-приближения в случае  $x_0 < 0$  получается в результате замены в правой части (96)  $\bar{z}, x_0, b_1^{(1)}$  на  $-\bar{z}, -x_0, -b_1^{(1)}$  соответственно.

Таким образом, асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи построено (константы  $b_1^{(1)}, b_3^{(1)}$  будут вычислены ниже). Числа  $\xi_{k,\ell}$  задаются формулами (35), (86), а антиголоморфная функция  $p(\bar{z})$  получается в результате согласования асимптотик. А именно,  $p(\bar{z}) = \Phi_-^{WKB}(\bar{z})$  является асимптотическим решением уравнения (36) на всей комплексной плоскости за исключением малых окрестностей точек поворота  $\bar{z}_+, \bar{z}_-, x_0$ , а также дуги  $\cup \bar{z}_-, \bar{z}_+$  (либо лучей  $(\infty, -i\sqrt{3}]$ ,  $[i\sqrt{3}, \infty)$  при  $x_0 = 0$ ). Вблизи точек поворота  $\bar{z}_+, \bar{z}_-, x_0$  функция  $p(\bar{z})$  задается формулами (74), (93). Асимптотики согласуются между собой на расстояниях порядка  $\hbar^{1/2}$  от точек  $\bar{z}_\pm$  и порядка  $\hbar^{3/8}$  от точки  $x_0$ .

Наконец, вблизи дуги  $\cup \bar{z}_-, \bar{z}_+$  (либо лучей  $(\infty, -i\sqrt{3}]$ ,  $[i\sqrt{3}, \infty)$  при  $x_0 = 0$ ) исконая асимптотика представима в виде суммы двух функций  $\Phi_-^{WKB}(\bar{z})$ , причем в первой функции берется ветвь, отвечающая обходу точек  $\bar{z}_\pm$  против часовой стрелки, а во второй — по часовой стрелке. Такое представление для  $p(\bar{z})$  вытекает из известного разложения функции Эйри [36]

$$\text{Ai}(-z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{z}} \sin \left( \frac{2}{3} z^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + O \left( \frac{1}{z^{7/4}} \right), \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3}, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

## 5. Асимптотика многочленов $\Phi(\bar{z})$

Подставим асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи  $p(\bar{z})$  в правую часть формулы (41) и вычислим асимптотику возникающего интеграла. Пусть

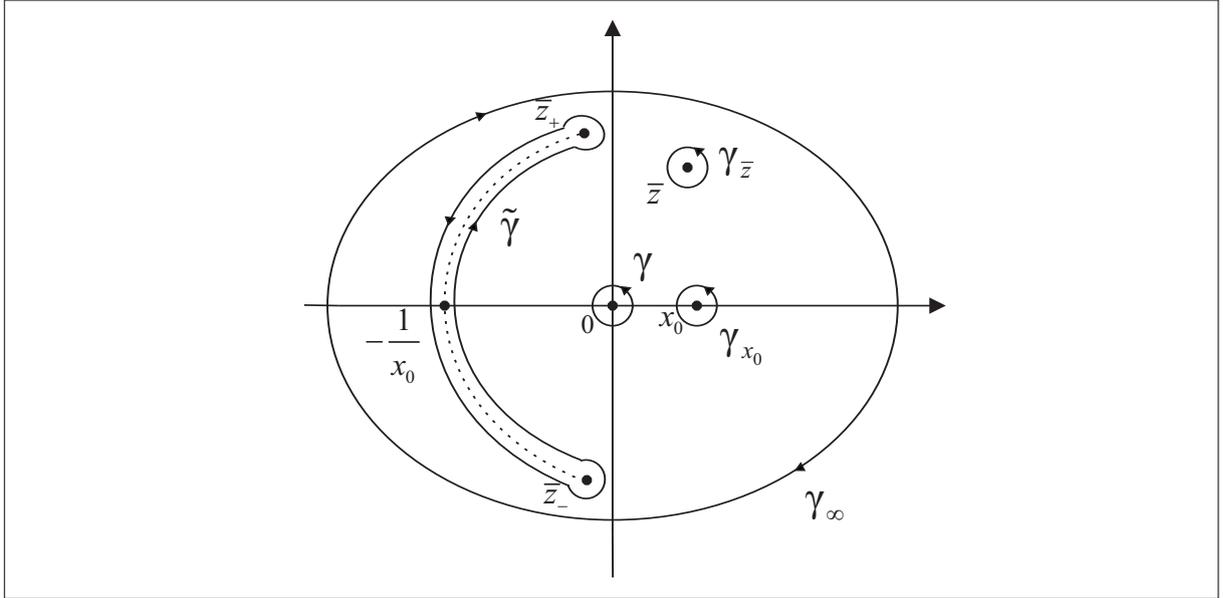


Рис. 4

для определенности  $x_0 \neq 0$ . Подынтегральная функция в (41) не имеет точек перевала. Поэтому воспользуемся интегральной теоремой Коши, согласно которой сумма интегралов по контурам  $\gamma, \gamma_{\bar{z}}, \tilde{\gamma}, \gamma_{x_0}$  и  $\gamma_\infty$  равна нулю (см. рис. 4).

Так как в силу антиголоморфности подынтегральной функции и теоремы о вычетах интегралы по  $\gamma_{x_0}$  и  $\gamma_\infty$  равны нулю, а интеграл по  $\gamma_{\bar{z}}$  вычисляется с помощью интегральной формулы Коши, то при  $\bar{z}$ , не лежащих на дуге  $\cup \bar{z}_-, \bar{z}_+$  и таких, что  $|\bar{z} - x_0| \gtrsim \hbar^{3/8}$ ,  $|\bar{z} - \bar{z}_\pm| \gtrsim \hbar^{1/2}$  многочлен  $\Phi(\bar{z})$  представим в виде

$$\Phi(\bar{z}) = \Phi_-^{WKB}(\bar{z}) + N(\bar{z}), \quad (97)$$

где

$$N(\bar{z}) = -\frac{\bar{z}^{\ell+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma_{+,-}} \frac{\Phi_-^{WKB}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{\ell+1}(\bar{u} - \bar{z})}. \quad (98)$$

Здесь замкнутый контур  $\gamma_{+,-}$  является дугой окружности  $\cup \bar{z}_-, \bar{z}_+$ , проходимой дважды по берегам разреза, соединяющего точки  $\bar{z}_-, \bar{z}_+$ . Он ориентирован против часовой стрелки. Равенство, аналогичное (97), справедливо и вблизи точки  $\bar{z} = x_0$ . Оно имеет вид

$$\Phi(\bar{z}) = p(\bar{z}) + N(\bar{z}), \quad (99)$$

где  $p(\bar{z}), N(\bar{z})$  определены формулами (93),(98).

Оценим входящий в (98) интеграл. Имеем:

$$|N(\bar{z})| \leq \frac{|\bar{z}|^{\ell+1}}{2\pi} \oint_{\gamma_{+,-}} \frac{|\Phi_-^{WKB}(\bar{u})| |d\bar{u}|}{|\bar{u}|^{\ell+1} |\bar{u} - \bar{z}|}. \quad (100)$$

Так как  $\cup \bar{z}_-, \bar{z}_+$  — линия Стокса, то на ней в силу (44)

$$\frac{|\Phi_-^{WKB}(\bar{u})|}{|\bar{u}|^{\ell+1}} = \frac{(1 + x_0^2)^{\ell/2} \exp(\ell\Psi(\bar{u})/2) \vartheta(\bar{u})}{\sqrt[4]{|\Lambda(\bar{u})|}},$$

где

$$\Psi(\bar{u}) = \ln |1 + \bar{u}^2| - \frac{4(1 - x_0^2 + 2x_0\bar{u})}{(1 + x_0^2)(1 + \bar{u}^2)} - 2 \ln |\bar{u}|, \quad (101)$$

а  $\vartheta(\bar{u})$  — непрерывная ограниченная функция.

Пусть  $x^\sharp = \sqrt{2e^2 - 3}$ . Справедлива

**Лемма 10.** При  $0 < |x_0| < x^\sharp$

$$\max_{\bar{u} \in \bar{z}_-, \bar{z}_+} \Psi(\bar{u}) = \ln \left( \frac{2(1+x_0^2)}{3+x_0^2} \right) + \frac{2(1+3x_0^2)}{1+x_0^2}$$

и достигается в точках поворота  $\bar{z}_\pm$ , а при  $|x_0| \geq x^\sharp$

$$\max_{\bar{u} \in \bar{z}_-, \bar{z}_+} \Psi(\bar{u}) = \ln(1+x_0^2) + \frac{4x_0^2}{1+x_0^2}$$

и достигается в точке  $-1/x_0$ , если  $|x_0| > x^\sharp$ , и в точках  $\bar{z}_-, \bar{z}_+, -1/x_0$ , если  $|x_0| = x^\sharp$ .

*Доказательство.* Рассмотрим для определенности случай  $x_0 > 0$ . Поскольку в силу (59), (61) имеют место равенства

$$\begin{aligned} \ln |\bar{z}| &= -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{x_0^4 + 1 + (1 - x_0^4) \cos \varphi}{2x_0^2} \right), \\ -\frac{4(1 - x_0^2 + 2x_0\bar{z})}{(1+x_0^2)(1+\bar{z}^2)} &= \frac{8x_0^2}{(1+x_0^2)^2(\cos \varphi + (1-x_0^2)/(1+x_0^2))}, \\ \ln |1 + \bar{z}^2| &= \ln \left( \frac{(1+x_0^2)^2}{2x_0^2} \left| \cos \varphi + \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} \right| \right), \end{aligned}$$

то при  $\bar{z} \in \bar{z}_-, \bar{z}_+$  функция (101) принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi) &= \ln \left| \cos \varphi + \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} \right| - \ln(x_0^4 + 1 + (1-x_0^4) \cos \varphi) + \\ &+ \frac{8x_0^2}{(1+x_0^2)^2(\cos \varphi + (1-x_0^2)/(1+x_0^2))} + 2 \ln(1+x_0^2). \end{aligned} \quad (102)$$

Дифференцируя (102), находим, что

$$\Psi'(\varphi) = -\frac{2x_0^2 \sin \varphi [(1+x_0^2)(5x_0^2-3) \cos \varphi - 5x_0^4 - 3]}{[(1+x_0^2) \cos \varphi + 1 - x_0^2]^2 [1+x_0^4 + (1-x_0^4) \cos \varphi]}. \quad (103)$$

Далее воспользуемся тем, что уравнение

$$\cos \varphi = \frac{5x_0^4 + 3}{(1+x_0^2)(5x_0^2 - 3)}$$

разрешимо лишь при  $x_0 \geq \sqrt{3}$ , так как лишь тогда

$$5x_0^4 + 3 \geq (1+x_0^2)|5x_0^2 - 3|.$$

Определяя знак производной (103), получаем, что при  $0 < x_0 \leq \sqrt{3}$

$$\max_{\varphi \in [\varphi_-, \varphi_+]} \Psi(\varphi) = \Psi(\varphi_\pm),$$

а при  $x_0 > \sqrt{3}$

$$\max_{\varphi \in [\varphi_-, \varphi_+]} \Psi(\varphi) = \max\{\Psi(0), \Psi(\varphi_\pm)\}.$$

Здесь  $\varphi_\pm$  заданы формулой (60).

Вычисляя значения функции  $\Psi$ , имеем:

$$\Psi(\varphi_{\pm}) = \ln(1 + x_0^2) + \frac{4x_0^2}{1 + x_0^2} + \ln\left(\frac{2}{3 + x_0^2}\right) + 2, \quad \Psi(0) = \ln(1 + x_0^2) + \frac{4x_0^2}{1 + x_0^2}.$$

Следовательно неравенство  $\Psi(0) \geq \Psi(\varphi_{\pm})$  выполняется лишь при  $x_0 \geq x^{\sharp}$ . Лемма доказана.

Наибольший вклад в асимптотику интеграла (100) вносят малые окрестности этих точек. Применяя метод Лапласа, а также используя интеграл [37]

$$\int_0^{\infty} x^{-1/4} e^{-\ell x} dx = \ell^{-3/4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right),$$

получаем

**Лемма 11.** При  $\ell \rightarrow \infty$ ,  $\bar{z} \notin \bar{z}_-, \bar{z}_+$  справедливы оценки:

$$|N(\bar{z})| \leq \frac{T|c_-|}{\ell^{3/4}} (1 + x_0^2)^{\ell} \left(\frac{2}{3 + x_0^2}\right)^{\ell/2} \exp\left(\frac{\ell(1 + 3x_0^2)}{1 + x_0^2}\right) |\bar{z}|^{\ell+1} \times \\ \times \left(\frac{1}{|\bar{z} - \bar{z}_+|} + \frac{1}{|\bar{z} - \bar{z}_-|}\right), \quad (104)$$

если  $0 < |x_0| < \sqrt{2e^2 - 3}$ ;

$$|N(\bar{z})| \leq \frac{T|c_-|}{\ell^{3/4}} (1 + x_0^2)^{\ell} \exp\left(\frac{\ell 2x_0^2}{1 + x_0^2}\right) |\bar{z}|^{\ell+1} \times \\ \times \left(\frac{1}{|\bar{z} - \bar{z}_+|} + \frac{1}{|\bar{z} - \bar{z}_-|} + \frac{\ell^{1/4}}{|\bar{z} + 1/x_0|}\right), \quad (105)$$

если  $|x_0| = \sqrt{2e^2 - 3}$ ;

$$|N(\bar{z})| \leq \frac{T|c_-|}{\sqrt{\ell}} (1 + x_0^2)^{\ell} \exp\left(\frac{\ell 2x_0^2}{1 + x_0^2}\right) \frac{|\bar{z}|^{\ell+1}}{|\bar{z} + 1/x_0|}, \quad (106)$$

если  $|x_0| > \sqrt{2e^2 - 3}$ . Здесь  $T$  — константа.

Отметим, что и при  $x_0 = 0$  имеет место формула, аналогичная (97). Надо лишь контур  $\gamma_{+,-}$  в (98) заменить на лучи  $(\infty, -i\sqrt{3}]$ ,  $[i\sqrt{3}, \infty)$ , проходимые дважды по берегам разреза против часовой стрелки. Снова наибольший вклад в интеграл (100) дадут малые окрестности точек поворота  $\pm i\sqrt{3}$ . В результате, для  $N(\bar{z})$  получается следующая асимптотика

$$N(\bar{z}) \sim \frac{c_-}{\ell^{3/4}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell/2} e^{\ell} \left(\frac{T_1}{\bar{z} - i\sqrt{3}} + \frac{T_2}{\bar{z} + i\sqrt{3}}\right). \quad (107)$$

Здесь  $T_1, T_2$  — некоторые константы.

Рассмотрим окрестность точки  $\bar{z} = x_0$ , которая дает основной вклад в асимптотику средних, и найдем, при каких  $x_0$  функция  $N(\bar{z})$  в этой окрестности будет экспоненциально малой по сравнению с  $p(\bar{z}) = E(\bar{z})Y(\bar{z})$ , где  $Y(\bar{z})$  — разложение (93). Так как это разложение согласуется с ВКБ-приближением, то из (95) вытекает, что порядок значений  $p(\bar{z})$  вблизи  $x_0$  определяется множителем

$$(1 + x_0^2)^\ell (\sqrt{3} + \sqrt{2})^\ell \exp \left( \frac{\sqrt{2}\ell(3x_0^4 + 6x_0^2 + 1)}{(1 + x_0^2)(\sqrt{3}(1 + x_0^2) + \sqrt{2})} \right). \quad (108)$$

Сравнивая (108) с (104)–(107), находим, что для экспоненциальной малости  $N(\bar{z})$  по сравнению с  $p(\bar{z})$  при

$$0 \leq |x_0| < \sqrt{2e^2 - 3} \quad (109)$$

должно выполняться неравенство

$$\frac{\sqrt{2}|x_0|}{\sqrt{3 + x_0^2}} \exp \left( \frac{1 + 3x_0^2}{1 + x_0^2} \right) < (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \exp \left( \frac{\sqrt{2}(3x_0^4 + 6x_0^2 + 1)}{(1 + x_0^2)(\sqrt{3}(1 + x_0^2) + \sqrt{2})} \right), \quad (110)$$

а при  $|x_0| \geq \sqrt{2e^2 - 3}$  — неравенство

$$|x_0| \exp \left( \frac{2x_0^2}{1 + x_0^2} \right) < (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \exp \left( \frac{\sqrt{2}(3x_0^4 + 6x_0^2 + 1)}{(1 + x_0^2)(\sqrt{3}(1 + x_0^2) + \sqrt{2})} \right). \quad (111)$$

Неравенство (110) имеет место при всех  $x_0$ , удовлетворяющих (109), а неравенство (111) выполняется лишь при

$$|x_0| < x_* \quad (112)$$

где  $x_*$  — корень уравнения

$$x \exp \left( \frac{2x^2}{1 + x^2} \right) = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \exp \left( \frac{\sqrt{2}(3x^4 + 6x^2 + 1)}{(1 + x^2)(\sqrt{3}(1 + x^2) + \sqrt{2})} \right),$$

приближенное значение которого  $x_* \approx 4.94$ . Это связано с тем, что для  $N(\bar{z})$  выше была использована довольно грубая оценка сверху (106).

Далее ограничимся рассмотрением значений  $x_0$ , удовлетворяющих условию (112). Для нахождения асимптотических собственных функций при  $|x_0| \geq x_*$  можно воспользоваться связью между изменением  $x_0$  и сдвигом на полярный угол, который допускают собственные функции задачи (1), (2). Оператор сдвига на угол  $\varphi_0$ , определенный на собственном подпространстве, под действием когерентного преобразования  $I_\ell(g)$  (22) преобразуется в оператор  $M_{\varphi_0} : \mathcal{P}_\ell \rightarrow \mathcal{P}_\ell$ . Справедлива

**Лемма 12.** *Оператор  $M_{\varphi_0}$  имеет вид*

$$M_{\varphi_0}g(\bar{z}) = (\cos \varphi_0 - \bar{z} \sin \varphi_0)^\ell g \left( \frac{\bar{z} \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 - \bar{z} \sin \varphi_0} \right). \quad (113)$$

*Доказательство.* Пусть

$$q_1 = \varrho \cos \varphi, \quad q_2 = \varrho \sin \varphi, \quad q_1^* = \varrho \cos(\varphi + \varphi_0), \quad q_2^* = \varrho \sin(\varphi + \varphi_0).$$

Тогда

$$\frac{q_1^* + zq_2^*}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{q_1 + z^*q_2}{\sqrt{1 + (z^*)^2}}, \quad (114)$$

где

$$z^* = \frac{z \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0}{z \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0}. \quad (115)$$

Поскольку в силу (115)

$$z = \frac{z^* \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 - z^* \sin \varphi_0}, \quad (116)$$

то справедливы соотношения

$$(1 + z^2)^{\ell/2} = \frac{(1 + (z^*)^2)^{\ell/2}}{(\cos \varphi_0 - z^* \sin \varphi_0)^\ell}, \quad d\bar{z}dz = \frac{d\bar{z}^*dz^*}{(\cos \varphi_0 - \bar{z}^* \sin \varphi_0)^2(\cos \varphi_0 - z^* \sin \varphi_0)^2}, \quad (117)$$

$$1 + |z|^2 = \frac{1 + |z^*|^2}{(\cos \varphi_0 - \bar{z}^* \sin \varphi_0)(\cos \varphi_0 - z^* \sin \varphi_0)}. \quad (118)$$

Наконец, из (22), (23), (114), (116)–(118) вытекает равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}} g(\bar{z})(1 + z^2)^{\ell/2} H_\ell \left( \frac{q_1^* + zq_2^*}{\sqrt{\hbar}\sqrt{1 + z^2}} \right) \exp \left( -\frac{(q_1^*)^2 + (q_2^*)^2}{2\hbar} \right) \frac{d\bar{z}dz}{(1 + |z|^2)^{\ell+2}} = \\ & = \int_{\mathbb{C}} g \left( \frac{\bar{z}^* \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 - \bar{z}^* \sin \varphi_0} \right) (\cos \varphi_0 - \bar{z}^* \sin \varphi_0)^\ell (1 + (z^*)^2)^{\ell/2} \times \\ & \quad \times H_\ell \left( \frac{q_1 + z^*q_2}{\sqrt{\hbar}\sqrt{1 + (z^*)^2}} \right) \exp \left( -\frac{q_1^2 + q_2^2}{2\hbar} \right) \frac{d\bar{z}^*dz^*}{(1 + |z^*|^2)^{\ell+2}}, \end{aligned}$$

из которого следует формула (113) для оператора  $M_{\varphi_0}$ . Лемма доказана.

## 6. Асимптотика нормы $\Phi(\bar{z})$

Пусть многочлен  $\Phi(\bar{z})$  задан формулой (41), где функция  $p(\bar{u})$  — асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи. При выполнении условия (112) вычислим асимптотику нормы  $\Phi(\bar{z})$  в пространстве  $\mathcal{P}_\ell$ .

Запишем главный член ВКБ-приближения (96) в виде

$$\Phi_{-,0}^{WKB}(\bar{z}) = c_- t(\bar{z}) e^{\ell s(\bar{z})}, \quad (119)$$

где функция

$$s(\bar{z}) = \frac{-2(1 - x_0^2 + 2x_0\bar{z}) + \sqrt{2}(x_0\bar{z} + 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{(1 + x_0^2)(1 + \bar{z}^2)} + \ln(\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{2}(x_0\bar{z} + 1)), \quad (120)$$

а многочлен  $\Lambda(\bar{z})$  задан формулой (46). Если подставить (119) в формулу (24) для скалярного произведения, то получим интеграл

$$\|\Phi_{-,0}^{WKB}\|_{\mathcal{P}_\ell}^2 = \frac{\ell + 1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{|c_-|^2 |t(\bar{z})|^2 e^{\ell \Omega(\bar{z}, z)}}{(1 + |z|^2)^2} d\bar{z} dz. \quad (121)$$

Здесь функция

$$\Omega(\bar{z}, z) = s(\bar{z}) + s(z) - \ln(1 + |z|^2). \quad (122)$$

Найдем точку, где достигается глобальный максимум  $\Omega(\bar{z}, z)$ . Тогда асимптотика интеграла (121) будет равна интегралу по малой окрестности этой точки.

Предварительно докажем две леммы.

**Лемма 13.** *Экстремум функции  $\Omega(\bar{z}, z)$  может достигаться лишь в точках, где  $\bar{z} = z$ .*

*Доказательство.* Используя (120), находим, что стационарные точки удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} = \frac{-4x_0 + (5 - 3x_0^2)\bar{z} + 4x_0\bar{z}^2 + (1 + x_0^2)\bar{z}^3 - 2\sqrt{2}(\bar{z} - x_0)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{(1 + x_0^2)(1 + \bar{z}^2)^2} - \frac{z}{1 + z\bar{z}} = 0, \quad (123)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{-4x_0 + (5 - 3x_0^2)z + 4x_0z^2 + (1 + x_0^2)z^3 - 2\sqrt{2}(z - x_0)\sqrt{\Lambda(z)}}{(1 + x_0^2)(1 + z^2)^2} - \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} = 0. \quad (124)$$

Здесь  $\Lambda(\bar{z})$  задана формулой (46).

Преобразуем уравнение (123) к виду

$$\frac{-8x_0^2 + 8x_0\bar{z} + (1 + x_0^2)\bar{z}^2}{-4x_0 + (5 - 3x_0^2)\bar{z} + 4x_0\bar{z}^2 + (1 + x_0^2)\bar{z}^3 + 2\sqrt{2}(\bar{z} - x_0)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}} = \frac{z}{1 + z\bar{z}},$$

из которого вытекает соотношение

$$-8x_0^2 + 8x_0\bar{z} + 4x_0z + (1 + x_0^2)\bar{z}^2 - (5 + 5x_0^2)z\bar{z} + 4x_0\bar{z}^2z = 2\sqrt{2}z(\bar{z} - x_0)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}. \quad (125)$$

Далее после замены  $\bar{u} = \bar{z} - x_0$ ,  $u = z - x_0$  возведем правую и левую части (125) в квадрат. Имеем:

$$\begin{aligned} & -u^2\bar{u}^4(8 + 8x_0^2) - u^2\bar{u}^3(88x_0 + 24x_0^3) + u^2\bar{u}^2(1 - 86x_0^2 - 23x_0^4) - u\bar{u}^4(8x_0 + 8x_0^3) - \\ & -u\bar{u}^3(10 + 100x_0^2 + 26x_0^4) - u\bar{u}^2(100x_0 + 128x_0^3 + 28x_0^5) + \bar{u}^4(1 + 2x_0^2 + x_0^4) + \\ & + \bar{u}^3(10x_0 + 12x_0^3 + 2x_0^5) + \bar{u}^2(x_0^2 + 2x_0^4 + x_0^6) + u^2(x_0^2 + 2x_0^4 + x_0^6) + \\ & + u^2\bar{u}(10x_0 + 4x_0^3 - 6x_0^5) - u\bar{u}(10x_0^2 + 20x_0^4 + 10x_0^6) = 0. \end{aligned} \quad (126)$$

Умножим (126) на  $u$  и перейдем к полярным координатам  $\bar{u} = \rho e^{i\varphi}$ ,  $u = \rho e^{-i\varphi}$ . В результате получаем:

$$\begin{aligned} & -\rho^7 e^{i\varphi}(8 + 8x_0^2) - \rho^6(88x_0 + 24x_0^3) + \rho^5 e^{-i\varphi}(1 - 86x_0^2 - 23x_0^4) - \rho^6 e^{2i\varphi}(8x_0 + 8x_0^3) - \\ & -\rho^5 e^{i\varphi}(10 + 100x_0^2 + 26x_0^4) - \rho^4(100x_0 + 128x_0^3 + 28x_0^5) + \rho^5 e^{3i\varphi}(1 + 2x_0^2 + x_0^4) + \\ & + \rho^4 e^{2i\varphi}(10x_0 + 12x_0^3 + 2x_0^5) + \rho^3 e^{i\varphi}(x_0^2 + 2x_0^4 + x_0^6) + \rho^3 e^{-3i\varphi}(x_0^2 + 2x_0^4 + x_0^6) + \\ & + \rho^4 e^{-2i\varphi}(10x_0 + 4x_0^3 - 6x_0^5) - \rho^3 e^{i\varphi}(10x_0^2 + 20x_0^4 + 10x_0^6) = 0. \end{aligned} \quad (127)$$

Приравняв к нулю мнимую и вещественную части (127), приходим к уравнениям

$$(1 + x_0^2)\rho^3 \sin \varphi \{ (1 + x_0^2)(\rho^2 - x_0^2) \cos^2 \varphi + 4(-\rho^3 x_0 + \rho x_0^3) \cos \varphi - [2\rho^4 + \rho^2(3 + x_0^2) + 2x_0^2(1 + x_0^2)] \} = 0, \quad (128)$$

$$\begin{aligned} & (1 + x_0^2)^2(\rho^2 + x_0^2) \cos^3 \varphi - 2x_0(1 + x_0^2)(2\rho^3 + \rho(x_0^2 - 5)) \cos^2 \varphi - \\ & - [2(1 + x_0^2)\rho^4 + (3 + 48x_0^2 + 13x_0^4)\rho^2 + 3x_0^2(1 + x_0^2)^2] \cos \varphi - \\ & - 2x_0[2\rho^3(5 + x_0^2) + 3\rho(1 + x_0^2)(5 + x_0^2)] = 0. \end{aligned} \quad (129)$$

Поскольку  $\sin \varphi$  равен нулю лишь при  $z = \bar{z}$ , то после деления (128) на

$$(1 + x_0^2)^2 \rho^3 (\rho^2 - x_0^2) \sin \varphi$$

имеем:

$$\cos^2 \varphi - \frac{4\rho x_0}{1+x_0^2} \cos \varphi - \frac{2\rho^4 + \rho^2(3+x_0^2) + 2x_0^2(1+x_0^2)}{(1+x_0^2)(\rho^2-x_0^2)} = 0. \quad (130)$$

В частности, при  $x_0 = 0$  уравнение (130) принимает вид

$$\cos^2 \varphi = 2\rho^2 + 3. \quad (131)$$

Так как (131) не имеет решений, то утверждение леммы при  $x_0 = 0$  доказано.

Рассмотрим далее случай, когда  $x_0 \neq 0$ . Из равенств (129), (130) вытекает соотношение

$$\cos \varphi = -\frac{2\rho x_0(5+x_0^2)}{(1+x_0^2)(\rho^2+x_0^2)}, \quad (132)$$

а из (129), (132) следует, что

$$\cos \varphi = -\frac{2\rho x_0(5+x_0^2)(2\rho^2+3+3x_0^2)}{(1+x_0^2)(2\rho^4+(3+5x_0^2)\rho^2+3x_0^2)}. \quad (133)$$

Условием совместности (132), (133) является равенство

$$\frac{1}{\rho^2+x_0^2} = \frac{2\rho^2+3+3x_0^2}{2\rho^4+(3+5x_0^2)\rho^2+3x_0^2},$$

которое равносильно условию  $x_0 = 0$ . Следовательно, при  $x_0 \neq 0$  система уравнений (132), (133) не разрешима, а, значит, и в этом случае отсутствуют стационарные точки, для которых  $z \neq \bar{z}$ . Лемма доказана.

**Лемма 14.** *Максимум функции  $\Omega(\bar{z}, z)$  при  $\bar{z} = z$  достигается в точке  $\bar{z} = z = x_0$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим при  $\bar{z} = z = x \in \mathbb{R}$  функцию  $\Omega = \Omega(x)$ . Из формул (122), (120) вытекает, что при  $x \neq -1/x_0$

$$\Omega'(x) = 2 \left( \frac{-4x_0 + (5 - 3x_0^2)x + 4x_0x^2 + (1 + x_0^2)x^3 - 2\sqrt{2}(x - x_0)\sqrt{\Lambda(x)}}{(1 + x_0^2)(1 + x^2)^2} - \frac{x}{1 + x^2} \right). \quad (134)$$

Уравнение  $\Omega'(x) = 0$ , где  $\Omega'(x)$  задается равенством (134), преобразуется к виду

$$4(x - x_0)(x_0x + 1) = 2\sqrt{2}(x - x_0)\sqrt{\Lambda(x)}. \quad (135)$$

Корнем (135) является  $x_0$ . Других вещественных корней это уравнение не имеет, поскольку после деления (135) на  $x - x_0$  и возведения правой и левой частей (135) в квадрат, приходим к уравнению

$$(1 + x_0^2)(1 + x^2) = 0.$$

Если  $x_0 = 0$ , то  $\Omega'(x) < 0$  при  $x > 0$  и  $\Omega'(x) > 0$  при  $x < 0$ . Следовательно, максимум функции  $\Omega(x)$  достигается в точке  $x = 0$ . В случае  $x_0 > 0$  в силу выбора ветвей  $\sqrt{\Lambda(x)}$  функция  $\Omega(x)$  непрерывна,  $\Omega'(x) > 0$  при  $x \in (-1/x_0, x_0)$  и  $\Omega'(x) < 0$  при  $x \in (-\infty, -1/x_0) \cup (x_0, +\infty)$ . Так как

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Omega(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Omega(x),$$

то максимум функции  $\Omega(x)$  также достигается в точке  $x_0$ . Случай  $x_0 < 0$  рассматривается аналогично. Лемма доказана.

**Теорема 1.** *Функция  $\Omega(\bar{z}, z)$  достигает максимальное значение при  $\bar{z} = z = x_0$ .*

*Доказательство.* Так как справедливы леммы 13, 14, то остается проверить, что в точке  $\bar{z} = z = x_0$  для  $\Omega(\bar{z}, z)$  выполнены достаточные условия существования локального максимума функции двух переменных. Эти условия имеют вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z}^2} + 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z} \partial z} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} < 0, \quad D = \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z} \partial z} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z}^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} > 0.$$

Из (123), (124) вытекает, что

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}}(x_0, x_0) = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z}(x_0, x_0) = 0.$$

Дифференцируя функции  $\partial \Omega / \partial \bar{z}$ ,  $\partial \Omega / \partial z$  ещё раз, находим, что

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z}^2}(x_0, x_0) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}(x_0, x_0) = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{(1 + x_0^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z} \partial z}(x_0, x_0) = -\frac{1}{(1 + x_0^2)^2},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(1 + x_0^2)^2} < 0, \quad D = \frac{4\sqrt{6}(5 - 2\sqrt{6})}{(1 + x_0^2)^4} > 0.$$

Теорема доказана.

В силу теоремы 1 основной вклад в норму асимптотического решения многоочечной спектральной задачи  $p(\bar{z})$  вносит малая окрестность точки  $\bar{z} = z = x_0$ . Так как вблизи  $\bar{z} = x_0$  функция  $p(\bar{z})$  задается разложением (93), подставим его в формулу (24) для скалярного произведения и вычислим асимптотику возникающего интеграла.

Определим

$$\theta(t, r) = \exp \left( - \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) t^2 - \left( \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) r^2 \right).$$

**Лемма 15.** *Справедливо равенство*

$$\|p(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_\ell}^2 = \frac{\alpha_1^2 \mu^2}{\pi 2^{k+2} R^\ell(x_0)} \sqrt{\frac{2}{3}} \Sigma_0(k) (1 + O(\hbar)), \quad \hbar \rightarrow 0, \quad (136)$$

где функция  $\Sigma_0(k)$  имеет вид

$$\Sigma_0(k) = \int_{\mathbb{R}^2} \theta(t, r) |H_k(t + ir)|^2 dt dr, \quad (137)$$

а константа  $\mu$  задана формулой (92).

*Доказательство.* Разложим функцию  $(\ell + 1)/(2\pi(1 + |z|^2)^{\ell+2})$  по степеням  $\bar{u}, u$ , где  $\bar{u}$  и  $\bar{z}$  связаны равенством (76). В результате получаем:

$$\frac{\ell + 1}{2\pi(1 + |z|^2)^{\ell+2}} = \frac{a}{\pi\hbar(R(x_0))^{\ell+2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\hbar}}\sqrt{\frac{2}{3}}x_0(\bar{u} + u) - \frac{2|\bar{u}|^2 - x_0^2(\bar{u}^2 + u^2)}{8\sqrt{6}}\right) \times \\ \times \left\{1 - \frac{\sqrt{\hbar}x_0}{2\sqrt{a}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[\bar{u} + u + \frac{1}{48}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[x_0^2(\bar{u}^3 + u^3) - 3(\bar{u} + u)|\bar{u}|^2\right]\right] + O(\hbar(1 + |u|^6))\right\}. \quad (138)$$

Подставляя затем (93), (138) в формулу (24), имеем:

$$\|p(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_\ell}^2 = \frac{\alpha_1^2 \mu^2 a}{2^k \pi \hbar} (R(x_0))^{-\ell-2} \int_{\mathbb{C}} \exp\left(\frac{(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - \sqrt{2}x_0^2)(\bar{u}^2 + u^2)}{16\sqrt{3}} - \frac{2|\bar{u}|^2 - x_0^2(\bar{u}^2 + u^2)}{8\sqrt{6}}\right) \left\{ \left|H_k\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 - \frac{\sqrt{\hbar}x_0}{2\sqrt{a}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[\bar{u} + u + \frac{1}{48}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[x_0^2(\bar{u}^3 + u^3) - 3(\bar{u} + u)|\bar{u}|^2\right]\right] \left|H_k\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 + \frac{\sqrt{\hbar}}{2\sqrt{a}6^{3/4}} \left\{ \left[ \frac{x_0(3(-5 + 2\sqrt{6}) + x_0^2)(\bar{u}^3 + u^3)}{12\sqrt{2}} + \frac{(2 - \sqrt{6})B(x_0)(\bar{u} + u)}{\sqrt{2}} \right] \left|H_k\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 + \sqrt{6} \left[ -\frac{x_0\bar{u}^2}{2} + B(x_0) \right] H'_k\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\right) H_k\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{6} \left[ -\frac{x_0u^2}{2} + B(x_0) \right] H'_k\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) H_k\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\right) \right\} \right\} d\bar{z} dz (1 + O(\hbar)). \quad (139)$$

Здесь  $B(x_0)$  определено формулой (79).

Введем вещественные переменные  $t$  и  $r$  согласно формуле

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} = t + ir. \quad (140)$$

Тогда

$$d\bar{z} dz = \frac{\hbar\sqrt{2}R^2(x_0)dt dr}{4a\sqrt{3}}, \quad \bar{u} + u = 2\sqrt{2}t, \quad \bar{u}^3 + u^3 = 4\sqrt{2}(t^3 - 3tr^2), \\ |\bar{u}|^2 = 2(t^2 + r^2), \quad H'_k(t + ir)H_k(t - ir) + H'_k(t - ir)H_k(t + ir) = \\ = \frac{\partial}{\partial t}|H_k(t + ir)|^2, \quad \bar{u}^2 H'_k(t + ir)H_k(t - ir) + u^2 H'_k(t - ir)H_k(t + ir) = \\ = 2(t^2 - r^2)\frac{\partial}{\partial t}|H_k(t + ir)|^2 + 4tr\frac{\partial}{\partial r}|H_k(t + ir)|^2,$$

и равенство (139) принимает вид

$$\|p(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_\ell}^2 = \frac{\alpha_1^2 \mu^2}{\pi 2^{k+2} R^\ell(x_0)} \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{\mathbb{R}^2} \theta(t, r) \left\{ |H_k(t + ir)|^2 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sqrt{\hbar}x_0 2^{3/4}}{\sqrt{a}\sqrt[4]{3}} \left[ t + \frac{1}{24} \sqrt{\frac{2}{3}} [x_0^2(t^3 - 3tr^2) - 3t(t^2 + r^2)] \right] |H_k(t + ir)|^2 + \\
& + \frac{\sqrt{\hbar}}{2\sqrt{a}6^{3/4}} \left\{ \left[ x_0 \left( -5 + 2\sqrt{6} + \frac{x_0^2}{3} \right) (t^3 - 3tr^2) + (2 - \sqrt{6})2B(x_0)t \right] |H_k(t + ir)|^2 - \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{6}x_0 \left[ (t^2 - r^2) \frac{\partial}{\partial t} |H_k(t + ir)|^2 + 2tr \frac{\partial}{\partial r} |H_k(t + ir)|^2 \right] + \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{6}B(x_0) \frac{\partial}{\partial t} |H_k(t + ir)|^2 \right\} dt dr (1 + O(\hbar)). \tag{141}
\end{aligned}$$

В формуле (141) слагаемые порядка  $\sqrt{\hbar}$  представляют собой интегралы от нечетных функций в симметричных пределах. Следовательно, они равны нулю. Лемма доказана.

Пусть выполнено условие (112). Тогда аналогично [24] доказывается, что норма  $\|N(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_\ell}$  экспоненциально мала по сравнению с  $\|p(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_\ell}$ . Учитывая далее соотношения (97), (99), (136), а также неравенство Коши-Буняковского, получаем, что асимптотика нормы многочлена  $\Phi(\bar{z})$  имеет вид

$$\|\Phi(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_\ell} = \frac{\alpha_1 \mu}{\sqrt{\pi} 2^{k/2+1} (R(x_0))^{\ell/2}} \sqrt[4]{\frac{2}{3}} (\Sigma_0(k))^{1/2} (1 + O(\hbar)), \quad \hbar \rightarrow 0. \tag{142}$$

Здесь  $\mu, \Sigma_0(k)$  заданы формулами (92), (137).

Положим

$$\alpha_1 = \sqrt{\pi} 2^{1+k/2} \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + x_0^2} \exp\left(\frac{2\ell + b_1^{(1)}x_0 + b_3^{(1)}}{1 + x_0^2}\right) (\Sigma_0(k))^{-1/2} (1 + O(\hbar)). \tag{143}$$

Тогда будет справедливо равенство

$$\|\Phi(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_\ell} = 1 + O(\hbar), \quad \hbar \rightarrow 0.$$

Таким образом, найден входящий в разложение (93) множитель  $\alpha_1$ .

## 7. Формулы для квантовых средних. Итоговая теорема

Чтобы завершить построение  $\Phi(\bar{z})$  остается вычислить значения  $b_1^{(1)}$  и  $b_3^{(1)}$ . Они задаются квантовыми средними (14). Вычисление квантовых средних производится аналогично вычислению нормы. Основной вклад в асимптотику интегралов также вносит малая окрестность точки  $\bar{z} = z = x_0$  [24]. Справедлива

**Лемма 16.** При  $\hbar \rightarrow 0$  имеют место равенства

$$\begin{aligned}
b_1 = 4(S_1 \Phi_{k,\ell}, \Phi_{k,\ell})_{\mathcal{P}_\ell} &= \frac{8ax_0}{1 + x_0^2} + \hbar \left\{ \frac{1 - x_0^2}{1 + x_0^2} \left[ \frac{1 - x_0^2}{1 + x_0^2} b_1^{(1)} - \frac{2x_0}{1 + x_0^2} b_3^{(1)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{8x_0}{1 + x_0^2} - \frac{4x_0 \Sigma_1(k)}{\sqrt{6}(1 + x_0^2) \Sigma_0(k)} \right\} + O(\hbar^2), \tag{144}
\end{aligned}$$

$$b_3 = 4(S_3^0 \Phi_{k,\ell}, \Phi_{k,\ell})_{\mathcal{P}_\ell} = \frac{4a}{1+x_0^2} + \hbar \left\{ \frac{2x_0}{1+x_0^2} \left[ \frac{2x_0}{1+x_0^2} b_3^{(1)} - \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} b_1^{(1)} \right] + 4 \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} - \frac{2(1-x_0^2)\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}(1+x_0^2)\Sigma_0(k)} \right\} + O(\hbar^2). \quad (145)$$

Здесь функция  $\Sigma_1(k)$  задана формулой

$$\Sigma_1(k) = \int_{\mathbb{R}^2} \theta(t, r)(t^2 + r^2) |H_k(t + ir)|^2 dt dr.$$

В результате сравнения разложений (34) с (144), (145) получаем соотношение, связывающее  $b_1^{(1)}$  и  $b_3^{(1)}$ :

$$\frac{2x_0}{1+x_0^2} b_1^{(1)} + \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} b_3^{(1)} = 4 - \frac{2\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)}. \quad (146)$$

В силу (146) коэффициенты  $b_1^{(1)}$ ,  $b_3^{(1)}$  можно представить в виде

$$b_1^{(1)} = \frac{2x_0}{1+x_0^2} \left[ 4 - \frac{2\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)} \right] + \frac{8(1-x_0^2)x_1}{(1+x_0^2)^2}, \quad (147)$$

$$b_3^{(1)} = \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} \left[ 4 - \frac{2\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)} \right] - \frac{16x_0x_1}{(1+x_0^2)^2}, \quad (148)$$

где  $x_1$  – произвольная вещественная константа, которая определяет поправку порядка  $\hbar$  к числу  $x_0$ , около которого локализовано решение (т.е.  $\bar{z} = x_0 + \hbar x_1$ ). Отметим, что именно через числа  $b_1^{(1)}$ ,  $b_3^{(1)}$   $\Phi_-^{WKB}$  зависит от величин  $\Sigma_1(k)/\Sigma_0(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , характеризующих решение вблизи точки  $x_0$ .

Наконец, с учетом (146) формула (86) принимает вид

$$\xi_{k,\ell}^{(1)} = a \left( 6 - 2\sqrt{6} \left( k + \frac{1}{2} \right) - \frac{2\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Справедлива

**Теорема 2.** Пусть число

$$\xi_{k,\ell} = 4a^2 + \frac{2a^2}{\ell} \left( 6 - 2\sqrt{6} \left( k + \frac{1}{2} \right) - \frac{2\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)} \right) + O(\ell^{-2}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (149)$$

а многочлен  $\Phi_{k,\ell}(\bar{z})$  определен формулой (41), где  $p(\bar{u})$  – решение многоточечной спектральной задачи, такое, что  $\alpha_1$ ,  $b_1^{(1)}$ ,  $b_3^{(1)}$  имеют вид (143), (147), (148) соответственно. Тогда при выполнении условия (112)  $\xi_{k,\ell}$  и  $\Phi_{k,\ell}(\bar{z})$  являются асимптотическим собственным значением и асимптотической собственной функцией задачи (26), (27) при  $\ell \rightarrow \infty$  в пространстве  $\mathcal{P}_\ell$ . Более точно, если  $\xi_{k,\ell}$  имеет вид (149), то многочлен  $\Phi_{k,\ell}(\bar{z})$  удовлетворяет уравнению (26) с точностью  $O(\ell^{-2})$  с оценкой невязки в норме  $\mathcal{P}_\ell$ , а также условию нормировки (27) с точностью  $O(\ell^{-1})$ .

*Доказательство.* Оценка невязки производится аналогично вычислению асимптотики нормы. Основной вклад в асимптотику интеграла вносит малая окрестность точки  $\bar{z} = z = x_0$ . Поэтому достаточно оценить невязку вблизи точки  $\bar{z} = x_0$ , где она имеет вид

$$R = O((\bar{z} - x_0)^4 p_0) + O(\hbar^2 p_0) = O(\hbar^2(1 + (t^2 + r^2)^2) p_0).$$

Здесь  $p_0$  задается равенством (94), а  $t$  и  $r$  — равенством (140).

Асимптотика  $\|R\|_{\mathcal{P}_\ell}$  содержит вместо функции  $\Sigma_0(k)$ , как было в (142), следующий интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^2} \theta(t, r) (1 + (t^2 + r^2)^2) |H_k(t + ir)|^2 dt dr.$$

В результате, получаем, что  $\|R\|_{\mathcal{P}_\ell} = O(\hbar^2)$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ .

Условие нормировки (27) выполнено в силу (142), (143). Теорема доказана.

В заключение найдем асимптотические собственные значения задачи (1), (2), расположенные вблизи верхних границ спектральных кластеров, образующихся вокруг собственных значений невозмущенного оператора.

**Лемма 17.** *При  $\hbar \rightarrow 0$  справедливо равенство*

$$(S_2^2 \Phi_{k,\ell}, \Phi_{k,\ell})_{\mathcal{P}_\ell} = 2a\hbar \left[ 1 + \sqrt{6} \left( k + \frac{1}{2} \right) - \frac{\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)} \right] + O(\hbar^2). \quad (150)$$

Подставляя далее (149), (150), (15) в формулу (11), для  $\ell$  порядка  $\hbar^{-1}$  получаем:

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_{k,\ell} &= \hbar(\ell + 1) + \hbar^2 \left\{ 2w_2 \left[ \ell^2 \hbar^2 + \frac{\ell \hbar^2}{2} \left( 6 - 2\sqrt{6}(k + 1/2) - \frac{2\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)} \right) \right] + w_0 + \right. \\ &+ 2(\ell \hbar + \hbar)w_1 + \left. \left[ 14\ell \hbar \left( \frac{\ell \hbar}{2} + \hbar \right) - 2\ell \hbar^2 \left( 1 + \sqrt{6}(k + 1/2) - \frac{\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)} \right) \right] w_2 \right\} + \\ &+ O(\hbar^4) = \ell \hbar + \hbar + (w_0 + 2\ell \hbar w_1 + 9\ell^2 \hbar^2 w_2) \hbar^2 + (2w_1 + 2\ell \hbar w_2 (9 - \\ &- 2\sqrt{6}(k + 1/2))) \hbar^3 + O(\hbar^4), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \hbar \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Полученная серия описывает расщепление спектра оператора типа Хартри и содержит члены до 3 порядка по  $\hbar$  включительно. Соответствующие асимптотические собственные функции задачи (1), (2) получаются из многочленов  $\Phi_{k,\ell}(\bar{z})$ , заданных формулой (41), применением когерентного преобразования (22), а также преобразования (12).

Автор благодарен М.В.Карасеву за привлечение внимания к данной задаче, а также за ценные вопросы и замечания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00627), Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.В37.21.0864) и Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2081.2014.1).

## Литература

1. Боголюбов Н. Н. Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем // УМЖ, 1950, **2** (2), 3-24.
2. Питаевский Л. П. Конденсация Бозе-Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию // УФН, 1998, **168** (6), 641-653.
3. Хартри Д. Р. Расчеты атомных структур // ИЛ, М., 1960, 271 стр.
4. Achmanov S. A., Hocklov R. V., Suchorukov A. P. Self-focusing, self-defocusing and self-modulation in nonlinear medium // Laserhandbuch, Holland-press, 1972, 2, 5108.
5. Пекар С. И. Исследования по электронной теории кристаллов // Гостехиздат, М., 1951, 258 стр.
6. Лахно В. Д. (ред.) Возбужденные поляронные состояния в конденсированных средах // ОНТИ НЦБИ АН СССР, Пушино, 1990, 144 стр.
7. Давыдов А. С. Солитоны в молекулярных системах // Наукова думка, Киев, 1984, 288 стр.
8. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях // Наука, М., 1977, 384 стр.
9. Сименон И. В. Об асимптотике решения стационарного нелинейного уравнения Хартри // ТМФ, 1977, **30** (3), 408-414.
10. Карасев М. В. Квантовая редукция на орбиты алгебр симметрий и задача Эренфеста // Препринт ИТФ-87-157Р, ИТФ АН УССР, Киев, 1987, 38 стр.
11. Вакуленко С. А., Маслов В. П., Молотков И. А., Шафаревич И. А. Асимптотические решения уравнения Хартри, сосредоточенные при  $\hbar \rightarrow 0$  в малой окрестности кривой // Доклады РАН, 1995, **345** (6), 743-745.
12. Карасев М. В., Перескоков А. В. Асимптотические решения уравнений Хартри, сосредоточенные вблизи маломерных подмногообразий. I. Модель с логарифмической особенностью // Изв. РАН, Сер. матем., 2001, **65** (5), 33-72.
13. Карасев М. В., Перескоков А. В. Асимптотические решения уравнений Хартри, сосредоточенные вблизи маломерных подмногообразий. II. Локализация в плоских дисках // Изв. РАН, Сер. матем., 2001, **65** (6), 57-98.
14. Перескоков А. В. Асимптотические решения двумерных уравнений Хартри, локализованные вблизи отрезков // ТМФ, 2002, **131** (3), 389-406.
15. Белов В. В., Смирнова Е. И. Локализованные асимптотические решения уравнения самосогласованного поля // Матем. Заметки, 2006, **80** (2), 309-312.
16. Белов В. В., Литвинец Ф. Н., Трифонов А. Ю. Квазиклассические спектральные серии оператора типа Хартри, отвечающие точке покоя классической системы Гамильтона-Эренфеста // ТМФ, 2007, **150** (1), 26-40.
17. Лисок А. Л., Трифонов А. Ю., Шаповалов А. В. Квазиклассические симметрии уравнения типа Хартри с квадратичным оператором // Известия ТПУ, 2009, **314** (2), 66-71.
18. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в дифракции коротких волн. Метод эталонных задач // Наука, М., 1972, 456 стр.
19. Карасев М. В., Маслов В. П. Асимптотическое и геометрическое квантование // УМН, 1984, **39** (6), 115-173.
20. Karasev M. V. Birkhoff resonances and quantum ray method // Proc. Intern. Seminar "Days of Diffraction – 2004", St. Petersburg University and Steklov Math. Institute, St. Petersburg, 2004, 114-126.
21. Karasev M. V. Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances. I. // In book: Karasev M. (ed), Quantum Algebras and Poisson Geometry in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, Providence, RI, 2005, **216**, 1-18; II. // Adv. Stud. Contemp. Math., 2005, **11** (1), 33-56; III. // Russ. J. Math. Phys., 2006, **13** (2), 131-150.
22. Karasev M. Resonance gyrons and quantum geometry // In book: Maeda Y. et al. (eds), From geometry to quantum mechanics. In Honor of Hideki Omori, Progress in mathematics, Birkhauser, Boston, 2007, 252, 253-275.
23. Перескоков А. В. Асимптотика спектра и квантовых средних вблизи границ спектральных кластеров для возмущенного двумерного осциллятора // Матем. Заметки, 2012, **92** (4), 583-596.
24. Перескоков А. В. Асимптотика спектра и квантовых средних возмущенного резонансного осциллятора вблизи границ спектральных кластеров // Изв. РАН, Сер. матем., 2013, **77** (1), 165-210.
25. Перескоков А. В. Асимптотика спектра атома водорода в магнитном поле вблизи нижних границ спектральных кластеров // Труды ММО, 2012, **73** (2), 277-325.

26. Перескоков А. В. Об асимптотике спектра атома водорода в магнитном поле вблизи границ спектральных кластеров // НМФМ, 2013, **8** (1), 65-84.
27. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений // Гостехиздат, М., Л., 1950, 436 стр.
28. Weinstein A. Asymptotics of the eigenvalues clusters for the laplasian plus a potential // Duke Math. J., 1977, **44** (4), 883-892.
29. Карасев М. В., Новикова Е. М. Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле // ТМФ, 1996, **108** (3), 339-387.
30. Schwinger J. On angular momentum // U. S. Atomic Energy Commission, NYO- 3071, 1952; reprinted in book: Biedenharn L. C., van Dam H. (eds), Quantum Theory of Angular Momentum, Academic Press, New York, 1965, 229-279.
31. Karasev M. V., Novikova E. M. Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding // In book: Karasev M. (ed), Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, Providence, RI, 1998, 187, 1-202.
32. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции // Наука, М., Т. 2, 1974, 296 стр.
33. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Наука, М., 1983, 352 стр.
34. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного // Наука, М., 1987, 688 стр.
35. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // Наука, М., 1971, 1108 стр.
36. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.) Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами // Наука, М., 1979, 832 стр.
37. Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды // Наука, М., 1987, 544 стр.

## SEMICLASSICAL ASYMPTOTICS OF THE HARTREE-TYPE OPERATOR SPECTRUM NEAR THE UPPER BOUNDARIES OF SPECTRAL CLUSTERS

A.V. Pereskokov

*NRU "Moscow Power Engineering Institute" , MIEM NRU "Higher School of Economics"*

pereskokov62@mail.ru

Received 15.04.2014

The eigenvalue problem for the perturbed two-dimensional resonance oscillator is considered. The excitation potential is given by a nonlocal Hartree-type nonlinearity with a smooth self-action potential. Each representation of the rotation algebra is associated with a spectral cluster near the energy level of the unperturbed operator. Asymptotic formulas for the quantum averages are used to calculate asymptotic eigenvalues and asymptotic eigenfunctions near the upper boundaries of spectral clusters.