ПРОБЛЕМА СТАБИЛЬНОСТИ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКАХ

Л.Г. Тимошенко

Московский физико-технический институт

matinduction@mail.ru

Поступила 19.09.2012

При разгоне плазмы в тороидальном кожухе возникает проблема её стабильности. Задача состоит в том, чтобы определить, при заданных краевых условиях магнитного поля на стенках кожуха, зависимость магнитного поля от времени. Из трех моделей (кожух без сопротивления, бесконечно тонкий кожух, кожух с сопротивлением) наибольший интерес представляет третий случай. При решении задачи используется асимптотический метод Вишика-Люстерника.

УДК 537.52

Токамак (тороидальная камера с магнитными катушками) - тороидальная установка для магнитного удержания плазмы с целью достижения условий, необходимых для протекания управляемого термоядерного синтеза. Плазма в токамаке удерживается не стенками камеры, которые не способны выдержать необходимую для термоядерных реакций температуру, а специально создаваемым комбинированным магнитным полем - тороидальным внешним и полоидальным полем тока, протекающего по плазменному шнуру.

Токамак представляет собой тороидальную вакуумную камеру, на которую намотаны катушки для создания тороидального магнитного поля. Из вакуумной камеры сначала откачивают воздух, а затем заполняют её смесью газов, содержащих те атомы, которые будут участвовать в синтезе. Затем с помощью индуктора в камере создают вихревое электрическое поле. Индуктор представляет собой первичную обмотку большого трансформатора, в котором камера токамака является вторичной обмоткой. Электрическое поле вызывает протекание тока и зажигание в камере плазмы. Наличие полоидального поля необходимо для стабильного удержания плазмы в такой системе. Так как оно создается за счёт увеличения тока в индукторе, а он не может быть бесконечным, время стабильного существования плазмы в классическом токамаке ограничено.

Плазма, поддерживаемая магнитными полями очень нестабильная. Любое незначительное возмущение может полностью разрушить её. Чтобы избежать этого, в токамаке ставят различные катушки, но при этом очень важно понять, при каких магнитных полях плазма будет наиболее устойчивой.

Классическая теория МГД(магнитогидродинамической) устойчивости плазмы создавалась в те времена, когда плазменные разряды в токамаках были короткими импульсами, а наиболее опасными были быстрые неустойчивости. При этом считалось естественным представлять стенку вакуумной камеры идеальным проводником. Иначе говоря, рассматривались только такие возмущения, для которых на металлическом кожухе нормальная компонента электрического поля равнялась нулю. Долгое время другие возможности даже не обсуждались, но уже в 1987 году отмечалось, что в некоторых случаях учет резистивности стенки при анализе неустойчивости плазмы может быть необходим. Доминирующий подход к исследованию поведения плазмы основан на использовании приближения тонкой стенки. В токамаках стенка всегда является геометрически тонкой по сравнению с ее малым радиусом. В этой модели нормальная компонента магнитного возмущения считается постоянной поперек стенки.

Модель с идеальной стенкой и модель с тонкой резистивной стенкой далеки и обособленны друг от друга. Фактически они соответствуют двум противоположным пределам отношения толщины скин слоя к толщине стенки. В задачах устойчивости плазмы промежуточная область до сих пор не исследована, хотя в экспериментах на токамаках встречаются результаты, не попадающие в эти две крайние группы.

В настоящей работе будет рассматриваться случай резистивной стенки с ненулевой толщиной, однако с простейшей геометрией поверхности стенки. Магнитное поле будет находиться из дифференциальных уравнений с помощью метода Вишика-Люстерника.

1. Из уравнений Максвелла и закона Ома $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, $\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu\vec{j}$ следует, что

$$-\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\left(\sigma\vec{E}\right) = \mathrm{rot}\vec{j} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{B})\,.$$

Предполагая, что $\vec{B} = \mathbf{B}e^{\gamma t}$, и полагая $a = \sigma\mu\gamma$, получаем:

$$-\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{B}) = a\mathbf{B}\,. \tag{1}$$

Пусть

$$\Gamma_- = \{x = -1,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}, \qquad \Omega_- = \{-1 < x < 0,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\},$$
$$\Gamma_0 = \{x = 0,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}, \qquad \Omega_0 = \{0 < x < \varepsilon,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

$\Gamma_- = \{x = -1,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}, \quad \Omega_- = \{-1 < x < 0,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\},$
$\Gamma_0 = \{x = 0,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}, \quad \Omega_\varepsilon = \{0 < x < \varepsilon,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\},$
$\Gamma_\varepsilon = \{x = \varepsilon,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}, \quad \Omega_{ext} = \{\varepsilon < x < \infty,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}.$

В областях Ω_- и Ω_{ext} тока нет: $\vec{j} = 0$. Значит $\sigma = 0$. Поэтому в этих областях $a = 0$. Следовательно, уравнение (1) для вектора $\mathbf{B}$ с декартовыми координатами (U, V, W) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) = aU \cdot 1_\varepsilon\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right) = aV \cdot 1_\varepsilon\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) = aW \cdot 1_\varepsilon\,, \tag{4}$$

где 1_ε — характеристическая функция Ω_ε. Поскольку правая часть этой системы допускает разрыв 1-го рода при $x = 0$ и $x = \varepsilon$, а ее левая часть содержит $\partial_x U$, $\partial_x^2 V$, $\partial_x^2 W$, то необходимо получаем:

$$U \in C^0\,, \quad V \in C^1\,, \quad W \in C^1 \qquad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = \varepsilon\,. \tag{5}$$

Кроме того, имеется дополнительное физическое условие: равенство нулю нормальных к Γ_0 и к Γ_ε компонент поля $\overrightarrow{E} = \frac{e^\gamma}{\mu\sigma}\mathrm{rot}\mathbf{B}$, т.е.

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = \varepsilon\,. \tag{6}$$

Так как в областях Ω_- и Ω_{ext} тока нет, то там $\mathrm{rot}\mathbf{B} = 0$. Поэтому в этих областях $\mathbf{B}$ есть полный дифференциал, т.е. существует функция $\varphi : \Omega_- \bigcup \Omega_{ext} \to \mathbb{R}$, такая, что

$$\mathbf{B} = \nabla\varphi \qquad \text{в} \quad \Omega_- \cup \Omega_{ext}\,. \tag{7}$$

Учитывая то, что $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$, имеем:

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_- \cup \Omega_{ext}\,. \tag{8}$$

Будем предполагать, что

$$\varphi\big|_{x=-1} = f(y,z)\,, \quad \varphi\big|_{\infty} = 0\,, \tag{9}$$

Применим преобразование Фурье к уравнению $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ и к уравнению $\mathfrak{A}\vec{B} = F$, где $\mathfrak{A}$ — старший оператор, соответствующий системе (2)–(4), т.е.

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \partial_{yy} + \partial_{zz} & -\partial_{xy} & -\partial_{xz} \\ -\partial_{xy} & \partial_{xx} + \partial_{zz} & -\partial_{yz} \\ -\partial_{xz} & -\partial_{yz} & \partial_{xx} + \partial_{yy} \end{pmatrix}$$

Получим $\xi\widetilde{U} + \eta\widetilde{V} + \zeta\widetilde{W} = 0$ и $\begin{pmatrix} \eta^2 + \zeta^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\xi\eta & \xi^2 + \zeta^2 & -\eta\zeta \\ -\xi\zeta & -\eta\zeta & \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{U} \\ \widetilde{V} \\ \widetilde{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{F}_1 \\ \widetilde{F}_2 \\ \widetilde{F}_3 \end{pmatrix}$.

Проверим, что при $(\xi,\eta,\zeta)\neq 0$ вектор $(\widetilde{U},\widetilde{V},\widetilde{W})$ однозначно определяется. Для этого достаточно проверить, что однозначно определяется вектор $(\widetilde{U},\widetilde{V})$, что очевидно, т.к. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \eta^2+\zeta^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\xi\eta & \xi^2+\zeta^2 & -\eta\zeta \end{pmatrix}=2$. Таким образом, на фактор-пространстве $\operatorname{div}\overrightarrow{B}=0$ система (2)–(4) является эллиптической. Она дополняется краевыми условиями (9) и условиями сопряжения (5)–(6).

2. Поле **B** будем искать в виде

$$\mathbf{B}=\begin{cases} (U^-,V^-,W^-)=\nabla\varphi^- & \text{при} \quad x\in\Omega_- \\ (u,v,w) & \text{при} \quad x=\frac{t}{\varepsilon}\in\Omega_\varepsilon \\ (U^+,V^+,W^+)=\nabla\varphi^+ & \text{при} \quad x\in\Omega_{ext} \end{cases}, \tag{10}$$

где вектор-функция (u,v,w) зависит от $r=\frac{x}{\varepsilon}\in[0,1]$ и $(y,z)\in\mathbb{R}^2$, а φ^+ будет разыскиваться в $\Omega_+=\{0<x<\infty,\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\}$.

Сопряжение при $x=0$ функций $\varphi^\pm=\varphi_0^\pm+\varepsilon\varphi_1^\pm+\varepsilon^2\varphi_2^\pm+\dots$, определенных $\Omega_\pm$, априори может иметь скачок. Значит, $u\overset{def}{=}\left.\frac{\partial\varphi^+}{\partial x}\right|_{\Omega_\varepsilon}$ может иметь δ-образную особенность при $x=0$, когда $\varepsilon\to 0$. Поэтому будем искать асимптотические разложения функций u, v и w в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} u(r,y,z)&=\tfrac{1}{\varepsilon}\big(u_0(r,y,z)+\varepsilon u_1(r,y,z)+\dots\big), \\ v(r,y,z)&=v_0(r,y,z)+\varepsilon v_1(r,y,z)+\dots, \\ w(r,y,z)&=w_0(r,y,z)+\varepsilon w_1(r,y,z)+\dots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Приравнивая последовательно нулю члены при степенях ε, получаем такие уравнения

$$\begin{pmatrix} \partial_{yy}+\partial_{zz}-a & -\partial_{ry} & -\partial_{rz} \\ -\partial_{ry} & \partial_{rr} & 0 \\ -\partial_{rz} & 0 & \partial_{rr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

для $i=0$, $i=1$ и

$$\begin{pmatrix} \partial_{yy}+\partial_{zz}-a & -\partial_{ry} & -\partial_{rz} \\ -\partial_{ry} & \partial_{rr} & -\partial_{yz} \\ -\partial_{rz} & -\partial_{yz} & \partial_{rr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -(\partial_{zz}-a)v_{j-2} \\ -(\partial_{yy}-a)w_{j-2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

для $j\geq 2$.

Точно также, как выше проверяется, что системы уравнений (12) и (13) в $\Omega_\varepsilon=\{0<r<1,\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\}$ являются эллиптическими на фактор-пространстве $\operatorname{div}\overrightarrow{B}=0$. Граничные условия при $r=0$ и $r=1$ для (u_k,v_k,w_k), а также условия при $x=\pm 0$ на коэффициенты $\varphi_m^\pm$ асимптотического разложения $\varphi^\pm=(\varphi_0^\pm+\varepsilon\varphi_1^\pm+\varepsilon^2\varphi_2^\pm+\dots)$ будут найдены из условий сопряжения (5)–(6).

Имеем

$$\frac{1}{\varepsilon}(u_0+\varepsilon u_1+\ldots)\Big|_{r=0}\overset{(5)}{=}U^-\Big|_{x=0}\overset{(10)}{=}\partial_x(\varphi_0^-+\varepsilon\varphi_1^-+\ldots)\Big|_{x=0},$$
$$\frac{1}{\varepsilon}(u_0+\varepsilon u_1+\ldots)\Big|_{r=1}\overset{(5)}{=}U^+\Big|_{x=\varepsilon}\overset{(10)}{=}\partial_x(\varphi_0^++\varepsilon\varphi_1^++\ldots)\Big|_{x=\varepsilon}$$
$$=\partial_x\varphi_0^+\Big|_{x=0}+\varepsilon[\partial_{xx}\varphi_0^++\partial_x\varphi_1^+]\Big|_{x=0}+\ldots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем:

$$\left.\begin{aligned}&u_0\Big|_{r=0}=u_0\Big|_{r=1}=0\,,\quad u_1\Big|_{r=0}=\partial_x\varphi_0^-\Big|_{x=0},\quad u_1\Big|_{r=1}=\partial_x\varphi_0^+\Big|_{x=0},\\&u_2\Big|_{r=0}=\partial_x\varphi_1^-\Big|_{x=0},\quad u_2\Big|_{r=1}=[\partial_{xx}\varphi_0^++\partial_x\varphi_1^+]\Big|_{x=0},\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

Далее,

$$\frac{1}{\varepsilon}\partial_r(v_0+\varepsilon v_1+\ldots)\Big|_{r=0}\overset{(5)}{=}\partial_xV^-\Big|_{x=0}\overset{(10)}{=}\partial_{xy}(\varphi_0^-+\varepsilon\varphi_1^-+\ldots)\Big|_{x=0},$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\partial_r(w_0+\varepsilon w_1+\ldots)\Big|_{r=0}\overset{(5)}{=}\partial_xW^-\Big|_{x=0}\overset{(10)}{=}\partial_{xz}(\varphi_0^-+\varepsilon\varphi_1^-+\ldots)\Big|_{x=0}$$

и

$$\frac{1}{\varepsilon}\partial_r(v_0+\varepsilon v_1+\ldots)\Big|_{r=1}\overset{(5)}{=}\partial_xV^+\Big|_{x=\varepsilon}\overset{(10)}{=}\partial_{xy}\varphi_0^+\Big|_{x=0}+\varepsilon[\partial_{xxy}\varphi_0^++\partial_{xy}\varphi_1^+]\Big|_{x=0}+\ldots,$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\partial_r(w_0+\varepsilon w_1+\ldots)\Big|_{r=1}\overset{(5)}{=}\partial_xW^+\Big|_{x=\varepsilon}\overset{(10)}{=}\partial_{xz}\varphi_0^+\Big|_{x=0}+\varepsilon[\partial_{xxz}\varphi_0^++\partial_{xz}\varphi_1^+]\Big|_{x=0}+\ldots.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем:

$$\left.\begin{aligned}&\partial_rv_0\Big|_{r=0}=\partial_rv_0\Big|_{r=1}=0\,,\quad \partial_rv_1\Big|_{r=0}=\partial_{xy}\varphi_0^-\Big|_{x=0},\quad \partial_rv_1\Big|_{r=1}=\partial_{xy}\varphi_0^+\Big|_{x=0},\\&\partial_rv_2\Big|_{r=0}=\partial_{xy}\varphi_1^-\Big|_{x=0},\quad \partial_rv_2\Big|_{r=1}=[\partial_{xxy}\varphi_0^++\partial_{xy}\varphi_1^+]\Big|_{x=0},\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

$$\left.\begin{aligned}&\partial_rw_0\Big|_{r=0}=\partial_rw_0\Big|_{r=1}=0\,,\quad \partial_rw_1\Big|_{r=0}=\partial_{xz}\varphi_0^-\Big|_{x=0},\quad \partial_rw_1\Big|_{r=1}=\partial_{xz}\varphi_0^+\Big|_{x=0},\\&\partial_rw_2\Big|_{r=0}=\partial_{xz}\varphi_1^-\Big|_{x=0},\quad \partial_rw_2\Big|_{r=1}=[\partial_{xxz}\varphi_0^++\partial_{xz}\varphi_1^+]\Big|_{x=0},\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

С другой стороны,

$$(v_0+\varepsilon v_1+\ldots)\Big|_{r=0}\overset{(5)}{=}V^-\Big|_{x=0}\overset{(10)}{=}\partial_y(\varphi_0^-+\varepsilon\varphi_1^-+\ldots)\Big|_{x=0},$$
$$(w_0+\varepsilon w_1+\ldots)\Big|_{r=0}\overset{(5)}{=}W^-\Big|_{x=0}\overset{(10)}{=}\partial_z(\varphi_0^-+\varepsilon\varphi_1^-+\ldots)\Big|_{x=0}$$

и

$$(v_0+\varepsilon v_1+\ldots)\Big|_{r=1}\overset{(5)}{=}V^+\Big|_{x=\varepsilon}\overset{(10)}{=}\partial_y\varphi_0^+\Big|_{x=0}+\varepsilon[\partial_{xy}\varphi_0^++\partial_y\varphi_1^+]\Big|_{x=0}$$
$$+\varepsilon^2[\frac{1}{2}\partial_{xxy}\varphi_0^++\partial_{xy}\varphi_1^++\partial_y\varphi_2^+]\Big|_{x=0}+\ldots,$$
$$(w_0+\varepsilon w_1+\ldots)\Big|_{r=1}\overset{(5)}{=}W^+\Big|_{x=\varepsilon}\overset{(10)}{=}\partial_z\varphi_0^+\Big|_{x=0}+\varepsilon[\partial_{xz}\varphi_0^++\partial_z\varphi_1^+]\Big|_{x=0}$$
$$+\varepsilon^2[\frac{1}{2}\partial_{xxz}\varphi_0^++\partial_{xz}\varphi_1^++\partial_z\varphi_2^+]\Big|_{x=0}+\ldots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем:

$$\left.\begin{array}{l} \partial_y\varphi_0^-\Big|_{x=0} = v_0\Big|_{r=0}, \quad \partial_y\varphi_1^-\Big|_{x=0} = v_1\Big|_{r=0}, \quad \partial_y\varphi_2^-\Big|_{x=0} = v_2\Big|_{r=0}, \dots \\ \partial_z\varphi_0^-\Big|_{x=0} = w_0\Big|_{r=0}, \quad \partial_z\varphi_1^-\Big|_{x=0} = w_1\Big|_{r=0}, \quad \partial_z\varphi_2^-\Big|_{x=0} = w_2\Big|_{r=0}, \dots \end{array}\right\} \tag{17}$$

и

$$\left.\begin{array}{c} \partial_y\varphi_0^+\Big|_{x=0} = v_0\Big|_{r=1}, \quad \partial_y\varphi_1^+\Big|_{x=0} = v_1\Big|_{r=1} - \partial_{xy}\varphi_0^+\Big|_{x=0}, \\ \partial_y\varphi_2^+\Big|_{x=0} = v_2\Big|_{r=1} - \left(\tfrac{1}{2}\partial_{xxy}\varphi_0^+ + \partial_{xy}\varphi_1^+\right)\Big|_{x=0} \dots \\ \\ \partial_z\varphi_0^+\Big|_{x=0} = w_0\Big|_{r=1}, \quad \partial_z\varphi_1^+\Big|_{x=0} = w_1\Big|_{r=1} - \partial_{xz}\varphi_0^+\Big|_{x=0}, \\ \partial_z\varphi_2^+\Big|_{x=0} = w_2\Big|_{r=1} - \left(\tfrac{1}{2}\partial_{xxz}\varphi_0^+ + \partial_{xz}\varphi_1^+\right)\Big|_{x=0} \dots \end{array}\right\} \tag{18}$$

Благодаря условию (6), соотношения (17) и (18) определяют

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_0^-(0,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{(y,z)} v_0(0,\eta,\zeta)\,d\eta + w_0(0,\eta,\zeta)\,d\zeta\,, \\ \\ \varphi_0^+(0,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{(y,z)} v_0(1,\eta,\zeta)\,d\eta + w_0(1,\eta,\zeta)\,d\zeta\,, \\ \\ \varphi_1^-(0,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{(y,z)} v_1(0,\eta,\zeta)\,d\eta + w_1(0,\eta,\zeta)\,d\zeta\,, \\ \\ \varphi_1^+(0,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{(y,z)} \Big[v_1(1,\eta,\zeta) - \partial_{x\eta}\varphi_0^+\Big|_{x=0}\Big]\,d\eta + \Big[w_1(1,\eta,\zeta) - \partial_{x\zeta}\varphi_0^+\Big|_{x=0}\Big]\,d\zeta\,, \\ \\ \varphi_2^-(0,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{(\eta,\zeta)} v_2(0,\eta,\zeta)\,d\eta + w_2(0,\eta,\zeta)\,d\zeta\,, \\ \\ \varphi_2^+(0,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{(y,z)} \Big[v_2(1,\eta,\zeta) - \left(\tfrac{1}{2}\partial_{xx\eta}\varphi_0^+ + \partial_{x\eta}\varphi_1^+\right)\Big|_{x=0}\Big]\,d\eta \\ \qquad\qquad + \Big[w_2(1,\eta,\zeta) - \left(\tfrac{1}{2}\partial_{xx\zeta}\varphi_0^+ + \partial_{x\zeta}\varphi_1^+\right)\Big|_{x=0}\Big]\,d\zeta\,, \dots \end{array}\right\} \tag{19}$$

Полученные формулы позволяют построить асимптотические разложения функций u, v и w (см. (11)), а также вектор-функций $(U^\pm, V^\pm, W^\pm) = \nabla(\varphi_0^\pm + \varepsilon\varphi_1^\pm + \varepsilon^2\varphi_2^\pm + \dots)$ по следующей схеме:

Шаг 0

(u_0, v_0, w_0) — решение системы уравнений (12) с определяемыми, согласно (14)–(16), краевыми условиями

$$u_0\Big|_{r=0} = u_0\Big|_{r=1} = 0, \quad \partial_r v_0\Big|_{r=0} = \partial_r v_0\Big|_{r=1} = 0\,, \quad \partial_r w_0\Big|_{r=0} = \partial_r w_0\Big|_{r=1} = 0\,;$$

φ_0^- — гармоническая функция в $\Omega_- = \{-1 < x < 0,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$ с краевыми условиями

$$\varphi_0^-\big|_{x=-1} \overset{(9)}{=} f(y,z)\,, \quad \varphi_0^-(0,y,z) \overset{(19)}{=} \int_{-\infty}^{(y,z)} v_0(0,\eta,\zeta)\,d\eta + w_0(0,\eta,\zeta)\,d\zeta\,;$$

φ_0^+ — гармоническая функция в $\Omega_+ = \{0 < x < \infty,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\})$ с краевыми условиями

$$\varphi_0^+(0,y,z) \overset{(19)}{=} \int_{-\infty}^{(y,z)} v_0(1,\eta,\zeta)\,d\eta + w_0(1,\eta,\zeta)\,d\zeta\,, \quad \varphi_0^+\big|_{\infty} \overset{(9)}{=} 0\,.$$

<u>Шаг 1</u>

(u_1, v_1, w_1) — решение системы уравнений (12) с определяемыми, согласно (14)–(16), краевыми условиями

$$u_1\Big|_{r=0} = \partial_x\varphi_0^-\Big|_{x=0}\,, \quad u_1\Big|_{r=1} = \partial_x\varphi_0^+\Big|_{x=0}\,, \quad \partial_r v_1\Big|_{r=0} = \partial_{xy}\varphi_0^-\Big|_{x=0}\,, \quad \partial_r v_1\Big|_{r=1} = \partial_{xy}\varphi_0^+\Big|_{x=0}\,,$$

$$\partial_r w_1\Big|_{r=0} = \partial_{xz}\varphi_0^-\Big|_{x=0}\,, \quad \partial_r w_1\Big|_{r=1} = \partial_{xz}\varphi_0^+\Big|_{x=0}\,;$$

φ_1^- — гармоническая функция в $\Omega_- = \{-1 < x < 0,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$ с краевыми условиями

$$\varphi_1^-\big|_{x=-1} \overset{(9)}{=} 0\,, \quad \varphi_1^-(0,y,z) \overset{(19)}{=} \int_{-\infty}^{(y,z)} v_1(0,\eta,\zeta)\,d\eta + w_1(0,\eta,\zeta)\,d\zeta\,;$$

φ_1^+ — гармоническая функция в $\Omega_+ = \{0 < x < \infty,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\})$ с краевыми условиями

$$\varphi_1^+(0,y,z) \overset{(19)}{=} \int_{-\infty}^{(y,z)} \Big[v_1(1,\eta,\zeta) - \partial_{x\eta}\varphi_0^+\Big|_{x=0}\Big]\,d\eta + \Big[w_1(1,\eta,\zeta) - \partial_{x\zeta}\varphi_0^+\Big|_{x=0}\Big]\,d\zeta\,, \quad \varphi_1^+\big|_{\infty} \overset{(9)}{=} 0\,.$$

<u>Шаг 2</u>

(u_2, v_2, w_2) — решение системы уравнений (13) с определяемыми, согласно (14)–(16), краевыми условиями

$$u_2\Big|_{r=0} = \partial_x\varphi_1^-\Big|_{x=0}\,, \quad u_2\Big|_{r=1} = [\partial_{xx}\varphi_0^+ + \partial_x\varphi_1^+]\Big|_{x=0}\,,$$

$$\partial_r v_2\Big|_{r=0} = \partial_{xy}\varphi_1^-\Big|_{x=0}\,, \quad \partial_r v_2\Big|_{r=1} = [\partial_{xxy}\varphi_0^+ + \partial_{xy}\varphi_1^+]\Big|_{x=0}\,,$$

$$\partial_r w_2\Big|_{r=0} = \partial_{xz}\varphi_1^-\Big|_{x=0}\,, \quad \partial_r w_2\Big|_{r=1} = [\partial_{xxz}\varphi_0^+ + \partial_{xz}\varphi_1^+]\Big|_{x=0}\,;$$

φ_2^- — гармоническая функция в $\Omega_- = \{-1 < x < 0,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$ с краевыми условиями

$$\varphi_2^-\big|_{x=-1} \overset{(9)}{=} 0\,, \quad \varphi_2^-(0,y,z) \overset{(19)}{=} \int_{-\infty}^{(y,z)} v_2(0,\eta,\zeta)\,d\eta + w_2(0,\eta,\zeta)\,d\zeta\,;$$

φ_2^+ — гармоническая функция в $\Omega_+ = \{0 < x < \infty,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$ с краевыми условиями

$$\varphi_2^+(0,y,z) \overset{(19)}{=} \int\limits_{-\infty}^{(y,z)} \Big[v_2(1,\eta,\zeta) - (\frac{1}{2}\partial_{xx\eta}\varphi_0^+ + \partial_{x\eta}\varphi_1^+)\Big|_{x=0}\Big]\, d\eta$$
$$+ \Big[w_2(1,\eta,\zeta) - (\frac{1}{2}\partial_{xx\zeta}\varphi_0^+ + \partial_{x\zeta}\varphi_1^+)\Big|_{x=0}\Big]\, d\zeta\,, \quad \varphi_2^+\big|_\infty \overset{(9)}{=} 0\,.$$

Таким образом задача нахождения магнитного поля и его потенциала разрешима для этого приближения. Разумеется, для получения физических результатов нужно использовать тороидальную геометрию токамака, что вполне возможно, так как на разрешимость задачи это не повлияет.

PROBLEM OF PLASMA STABILITY IN TOKAMAKS

L.G. Timoshenko

Moscow Institute of Physics and Technology

matinduction@mail.ru

Received 19.09.2012

The stability problem appears when plasma moved inside toroidal wall. One needs to find the time dependence of the magnetic field under certain boundary conditions. There are three models (null resistive, thin-resistive wall, resistive mode). The most interesting is the third model. For this case the Vishik-Lusternik asymptotics is used.