ТЕНЗОРНЫЙ ПОДХОД К УСРЕДНЕНИЮ ПОЛЯ ЯКОБИ ВДОЛЬ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СО СЛУЧАЙНОЙ КРИВИЗНОЙ

Д.А. Грачев

МГУ имени М.В. Ломоносова

dengrac@mail.ru

Поступила 11.08.2012

В работе рассматривается поле Якоби вдоль геодезической риманова многообразия, на которой кривизна является случайным процессом. Вводится понятие линеаризирующего тензора, на основе которого получены уравнения для моментов 2-го, 3-го и 4-го порядка. Доказана теорема об общем виде моментного уравнения. Показан прогрессивный рост статистических моментов поля Якоби. Демонстрируется связь между этим ростом и космологическим эффектом Зельдовича.

УДК 514.74; 514.774.8

1. Введение

Вселенная в больших масштабах обладает исключительной степенью однородности и изотропии, однако в малых масштабах она неоднородна и анизотропна из-за присутствующих в ней неоднородностей, вызванных скоплениями массивных небесных тел (звезд, галактик, и др.). Еще в 60-ых годах прошлого столетия Я.Б. Зельдович обратил внимание на то, что влияние таких локальных неоднородностей на распространение света не сводится к флуктуациям сети изотропных геодезических и некоторому шуму, вносимому тем самым в космологические тесты [1] — [3]. Оказывается, что возникающие флуктуации плотности вещества приводят к небольшому систематическому искажению космологических тестов, которые делают Вселенную, кривизна пространственного сечения которой в среднем равна нулю, в известной степени похожей на открытую космологическую модель. Другими словами, во Вселенной с неоднородностями наблюдатель, измеряющий кривизну пространственного сечения путем сопоставления угловых размеров и расстояния до стандартного объекта, получит вместо осредненного значения кривизны, равного нулю, ее эффективное значение, пропорциональное величине неоднородностей и являющееся отрицательным [4], [5]. С геометрической точки зрения это означает, что сумма внутренних углов треугольника, у которых одна из сторон — это отрезок, определяющий видимую длину объекта, а две других соединяют концы этого отрезка с точкой наблюдения, оказывается меньше 180 градусов. Видимая длина отрезка имеет смысл геодезического отклонения, или поля Якоби.

Как указал Я.Б. Зельдович, рассматриваемый эффект мало связан с динамикой расширения Вселенной, поскольку мелкомасштабные флуктуации плотности вещества лишь локально искривляют сопутствующее пространство. Это позволяет представить метрику пространства-времени в стандартном виде

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)d\Sigma^2, \tag{1}$$

где $a(t)$ — масштабный фактор, определяющий темп расширения в однородной и изотропной модели, а $d\Sigma^2$ —трехмерная метрика пространственной области.

В исходной работе [1] модель эффекта была сформулирована на основе метрики Фридмана:

$$ds^2 = c^2dt^2 - (at^{2/3})^2[dx^2 + dy^2 + dz^2].$$

Далее рассматривался конус с осью x и раствором α, в котором из одной точки выходят близкие геодезические под углом Θ друг к другу ($\alpha > \Theta$). Внутри конус полагался пустым, а снаружи — имеющим не зависящее от координат распределение плотности

$$\rho = \frac{1}{6\pi\kappa t^2},$$

где κ — ньютоновская постоянная тяготения. Полагая, что изъятое из конуса количество вещества пренебрежимо мало и не влияет на общее движение (т.е. $\alpha \ll 1$), Я.Б. Зельдович для этой частной модели возмущения плотности получил явное решение уравнения Эйнштейна и нашел геодезическое отклонение y. При условии того, что лучи сходятся в точке наблюдения, т.е. $y(0) = 0$, и условии для производной $y'(0) = \Theta_1$ вычисления приводят к следующей формуле:

$$y = \frac{1}{5}\Theta_1 x_0\left[x_0^2(x_0 - x)^{-2} - x_0^{-3}(x_0 - x)^3\right],$$

где x_0 — расстояние до горизонта. Таким образом, траектории геодезических, выпущенных из вершины пустого конуса вдоль его образующих, под действием гравитационного поля неоднородностей изгибаются наружу. Разумеется, модель пустого конуса описывает весьма частный случай распределения неоднородностей в пространстве, поэтому выведенная формула отвечает лишь конкретной физической реализации, не давая при этом никакой информации о статистических свойствах геодезического отклонения.

Я.Б. Зельдович в своем исследовании опирался преимущественно на теорию возмущений, избегая явного использования случайных сред. Позднее, в 1967 году, Е. Ганн получил аналогичные результаты, используя корреляционную функцию случайного распределения масс [6]. Еще позже развитие аппарата общей теории переноса в случайных средах позволило исследовать влияние неоднородностей плотности на распространение света стандартными современными математическими методами [4], [7], [8], причем применение этих методов давало результаты в более понятной и компактной форме. Этому способствовало, в частности, появление т.н. теории Ферстенберга, описывающей асимптотические свойства произведения независимых случайных матриц [9], [10].

Следуя указанному пути, задача о распространении в настоящей главе сводится к задаче Коши для полей Якоби на геодезических пространственного сечения, вдоль которых и распространяются лучи света. При этом мы не интересуемся точным описанием связи между плотностью вещества и флуктуациями кривизны, которая, в принципе, может быть получена из уравнений Эйнштейна. Вместо этого гауссова кривизна, которая и определяет поле Якоби, полагается случайным процессом, принимающим как положительные, так и отрицательные значения. Подобный подход обычен в физике случайных сред, например, в теории турбулентности [11], где спектр турбулентных скоростей вводится без детального описания случайных сил, управляющих турбулентностью.

Отметим, что систематическое влияние на распространение света во Вселенной могут оказывать не только возмущения плотности, но и аналогичные возмущения, связанные с движениями тел, образующих галактики. В частности, рассматриваемый эффект родственен эффекту микролинзирования [12], [13], а также явлению фундаментального предела точности астрометрических измерений [14], [15].

2. Постановка задачи

В исходной постановке задача об учете влияния неоднородностей плотности вещества на распространение света во Вселенной является задачей о поведении геодезических в четырехмерном псевдоримановом пространстве. Однако, как показал Я.Б. Зельдович, ее можно свести к изучению семейства геодезических на двумерной пленке в пространственном сечении, натянутой на проекции двух близких изотропных геодезических. Другими словами, при переходе от четырехмерного псевдориманова пространства к двумерному риманову многообразию постановка рассматриваемой задачи принимает скалярный вид. Воспроизведем здесь соответствующие рассуждения.

Рассмотрим два световых луча, которые распространяются вдоль геодезических γ_1 и γ_2, пересекающихся в некоторой фиксированной точке P четырехмерного пространства-времени. Угол θ между этими геодезическими физически бесконечно мал (он соответствует угловому размеру какого-либо удаленного объекта). Параметризуем рассматриваемые геодезические с помощью согласованных геодезических параметров u, соответствующих фотонам, которые в системе отсчета метрики (1) имеют в точке P равные частоты (при этом в самой точке P $u = 0$). Пусть $\mathbf{Y}\theta$ — расстояние, соединяющее точки на бесконечно близких геодезических, находящиеся на одинаковом расстоянии от P. Величина $\mathbf{Y}$ определяется уравнением, которое связывает ее с компонентами тензора Римана [16], [17]:

$$\frac{d^2Y^i}{du^2} + R^i_{jkm}U^jY^kU^m = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{U}$ —касательный вектор к первой геодезической. В вариационном исчислении уравнение (2) известно как уравнение Якоби. Оно дополняется начальными условиями

$$\mathbf{Y}(0) = \mathbf{0} \qquad \text{и} \qquad \left.\frac{d\mathbf{Y}}{du}\right|_{u=0} = \mathbf{1}, \tag{3}$$

первое из которых выбрано, исходя из равенства геодезических параметров в точке P нулю, а второе представляет собой условие нормировки.

Задача (2),(3) допускает сведение к скалярному виду. В самом деле, ввиду экстремального свойства геодезических вариация величины ds^2 вдоль γ_1 равна нулю [18]:

$$\delta ds^2 = 0.$$

Здесь δ представляет собой вариацию, берущуюся как по временной, так и по пространственным переменным. Следовательно, вариация по пространственным переменным δ_Σ также равна нулю. Используя выражение для метрики (1), получим

$$\delta_\Sigma(ds^2) = \delta_\Sigma(c^2dt^2 - a^2(t)d\Sigma^2) = \delta_\Sigma(-a^2(t)d\Sigma^2) = -a^2(t)\delta_\Sigma(d\Sigma^2) = 0,$$

откуда следует, что $\delta_\Sigma(d\Sigma^2) = 0$. Таким образом, проекция геодезической γ_1 на пространственное сечение также является геодезической. В результате проецирования на сопутствующее пространство геодезическая γ_1 и геодезическое отклонение $\mathbf{Y}$ перейдут соответственно в геодезическую Γ и геодезическое отклонение $\mathbf{y}$ на пространственном сечении. Длина y вектора $\mathbf{y}$, которая называется далее просто полем Якоби, подчиняется скалярному уравнению Якоби

$$y'' + K(x)y = 0, \tag{4}$$

где x —расстояние вдоль пространственноподобной геодезической Γ, по которому берутся производные, а $K(x)$ —гауссова кривизна в двумерном направлении, натянутом на геодезическую Γ. Отметим, что кривизну $K(x)$ можно представить в виде соответствующей свертки тензора Римана [19]. Уравнение (4) дополняется естественными начальными условиями

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1. \tag{5}$$

Первое из этих условий означает, что все геодезические семейства выпущены из одной точки, а второе является условием нормировки.

Уравнение Якоби (4), (5), описывающее эффект Я.Б. Зельдовича, представляет интерес и в контексте некоторых других задач. В [7] это уравнение изучалось в контексте выделения общих свойств многообразий со знакопеременной кривизной. В [20] — [22] оно рассматривается как модельное, позволяющее на простом примере глубже понять соотношение между численным и аналитическим подходами к исследованию решений уравнений со случайными коэффициентами. Кроме того, в работе [22] была обоснована возможность моделирования с помощью этого уравнения так называемого турбулентного динамо.

В перечисленных работах аналитические результаты касались поведения типичной реализации и математического ожидания поля Якоби, тогда как численные результаты — поведения не только этих характеристик, но и статистических моментов 2-го и 3-го порядков. При этом численное моделирование неожиданно показало, что требуемый для исследования моментов объем выборки статистически независимых реализаций решения чрезвычайно велик и явно недостижим в рамках прямого численного эксперимента для изучения моментов порядка выше третьего (необходимое для моделирования первых трех статистических моментов число реализаций также очень велико — порядка 10^6, см. [21]). Цель настоящей работы — найти общий подход, позволяющий получать явные уравнения для моментных функций поля Якоби произвольных натуральных порядков.

Изучение моментов решения уравнения со случайными коэффициентами можно проводить в различных приближениях. В частности, в ряде задач математической физики, связанных с проблемой усреднения эволюционных уравнений, общепринятым является подход, когда корреляционная длина для коэффициентов считается малой и детали поведения решения на соответствующих масштабах игнорируются [23] — [26]. Важное преимущество такого подхода состоит в том, что формальный предельный переход при устремлении корреляционной длины к нулю позволяет получить для моментных функций дифференциальные уравнения (тогда как учет эффектов памяти за счет конечности корреляционной длины приводит к интегро-разностным уравнениям для моментов [27], [28], чего хотелось бы избежать). Для определенности мы проводим исследование в рамках этого приближения (так называемой δ-коррелированной модели), а именно, требуем от случайной кривизны $K(x) = K(x, \omega)$ мгновенных (δ-образных) корреляций. Конструктивное построение δ-коррелированного формализма можно провести путем предельного перехода при устремлении корреляционной длины к нулю в модели случайного процесса с обновлением [26]. Поясним, что имеется в виду.

Пусть $K(x)$ теряет память в дискретных точках x, разделенных интервалом длины δ (случайный процесс с обновлением, полное описание см., например, в [4] или в [26]). Параметр δ, который берется в качестве масштабной единицы, называется корреляционной длиной, сам же отрезок принято называть интервалом обновления (условие обновления позволяет избежать проблемы, связанной с усреднением статистически зависимых случайных сомножителей $K(x)$ и y). При этом мы используем представление кривизны в виде $K(x) = \overline{K} + k(x)$, где $\overline{K}$ — среднее значение кривизны многообразия, а член $k(x)$ описывает случайные флуктуации. Требование мгновенных корреляций процесса $K(x)$ означает, что мы пренебрегаем деталями поведения решения (4) на масштабах, сопоставимых с величиной δ, что формально выражается в предельном переходе при $\delta \to 0$. Для того чтобы вклад $K(x)$ в эволюцию решения при таком предельном переходе не обратился в нуль, выполняется перенормировка, т.е. считается, что величина $< K^2\delta^2 >$ имеет конечный предел $\mathcal{K}$ при $\delta \to 0$. По сути это означает, что флуктуации $k(x)$ остаются значительными при $\delta \to 0$, а сама величина $\mathcal{K}$ при этом имеет физический смысл некоторого эффективного значения [4].

Отметим, что ранее в математической литературе дифференциальные уравнения, имеющие в виде коэффициентов δ-коррелированные случайные процессы, исследовались в основном на материале уравнений в частных производных (см., например, [29]).

3. Решение проблемы моментов. Теорема об общем виде моментного уравнения

Запишем начальную задачу (4), (5) в виде системы линейных уравнений для двухкомпонентного вектора-строки $\mathbf{z}$ с компонентами $z_1 = y$, $z_2 = y'$:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = \mathbf{z}\begin{pmatrix} 0 & -K(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 1. \tag{6}$$

Введем фундаментальную матрицу $B(s, x)$ системы (6), т.е. матрицу, обладающую свойством $\mathbf{z}(x) = \mathbf{z}(s)B(s, x)$ при $s < x$. Установим с ее помощью связь между векторами $\mathbf{z}(x+\delta)$ и $\mathbf{z}(x)$. Для этого выразим B через мультипликативный интеграл и воспользуемся представлением последнего в виде бесконечной суммы соответствующих аддитивных интегралов [30]. Непосредственное вычисление облегчается тем, что его достаточно вести лишь с точностью до членов порядка квадрата кривизны. В результате получаем следующую формулу:

$$\mathbf{z}(x+\delta) = \mathbf{z}(x)\begin{pmatrix} 1 & -K(x)\delta + K^2(x)\delta^3/6 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Далее нам потребуется эквивалентное выражению (7) индексное представление вида

$$\frac{z_i(x+\delta) - z_i(x)}{\delta} = z_\alpha \widehat{P}_i^\alpha, \quad \text{где} \quad \widehat{P} = \begin{pmatrix} 0 & -K(x) + K^2(x)\delta^2/6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Отметим, что в (8) верхний индекс у $\widehat{P}$, по которому ведется суммирование, является номером строки, а нижний — номером соответствующего столбца.

Введем ключевое понятие настоящей работы.

Определение. Тензор

$$z_{ilk\ldots p} = z_i z_l z_k \ldots z_p, \tag{9}$$

где $i, l, k, \ldots, p$ — некоторые m индексов, каждый из которых независимо от других принимает значения 1 и 2, назовем *линеаризирующим тензором поля Якоби m-го порядка.*

Объект (9) является тензорным произведением m двумерных векторов $\mathbf{z}$ из (6) (отметим, что $\mathbf{z}$ принадлежит вспомогательному плоскому двумерному линейному пространству, поэтому при его записи можно не различать верхние (контравариантные) и нижние (ковариантные) индексы).

Поскольку каждая компонента линеаризирующего тензора представляет собой произведение некоторой степени дважды дифференцируемой функции y на соответствующую степень ее первой производной, объект (9) можно продифференцировать по x:

$$\frac{z_{ilk\ldots p}(x+\delta) - z_{ilk\ldots p}(x)}{\delta} = z_l z_k \ldots z_p \frac{z_i(x+\delta) - z_i(x)}{\delta} + \ldots$$
$$+ z_i z_l z_k \ldots \frac{z_p(x+\delta) - z_p(x)}{\delta} + \varepsilon_{ilk\ldots p},$$

где $\varepsilon_{ilk\ldots p} \to 0$ при $\delta \to 0$ (последняя формула является следствием формального тождества $dz_{ilk\ldots p}/dx = \big(dz_i/dx\big)z_l z_k \cdot \ldots \cdot z_p + z_i\big(dz_l/dx\big)z_k \cdot \ldots \cdot z_p + \ldots + z_i z_l z_k \cdot \ldots \cdot \big(dz_p/dx\big)$). Подставим в правую часть этого выражения, используя (8), сомножители вида $\big(z_i(x+\delta) - z_i(x)\big)/\delta$. Затем усредним полученную формулу и, учитывая, что каждое из m слагаемых при усреднении расщепляется на произведение среднего тензора (9) и средней матрицы $\widehat{P}$, перейдем к пределу при $\delta \to 0$:

$$\frac{d}{dx} < z_{ilk\ldots p} >=< z_{\alpha lk\ldots p} > G_i^{\alpha} + < z_{i\beta k\ldots p} > G_l^{\beta} + \ldots + < z_{ilk\ldots\gamma} > G_p^{\gamma}, \tag{10}$$

где

$$G \equiv \lim_{\delta\to 0} < \widehat{P} >= \begin{pmatrix} 0 & -\overline{K} + \mathcal{K}/6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, мы доказали следующее свойство линеаризирующего тензора поля Якоби. Справедлива

Лемма 1. *Среднее $< z_{ilk\ldots p} >$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению первого порядка с постоянными коэффициентами.*

Очевидно, что перебором индексов $i, l, k, \ldots, p$ уравнение (10) может быть записано в виде системы линейных скалярных уравнений первого порядка для усредненных компонент $z_{ilk\ldots p}$. Следующая лемма связывает число уравнений в этой системе с числом различных компонент (которых в силу симметричности (9) будет гораздо меньше, чем 2^m) соответствующего тензора.

Лемма 2. *Число дифференциальных уравнений в скаляризованной системе для усредненных компонент линеаризирующего тензора* (9) *равно числу различных компонент этого тензора.*

Для доказательства теоремы об общем виде моментного уравнения нам потребуется еще один факт, известный из курса обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [31]).

Лемма 3. *Система уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами вида*

$$\frac{d}{dx} g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j(x), \quad i = \overline{1, n},$$

сводится к линейному уравнению для одной из функций $g_i(x)$ (без ограничения общности для функции $g_1 = g_1(x)$), причем порядок этого дифференциального уравнения не превосходит n.

Сформулируем центральный результат настоящей работы.

Теорема. *Момент $< y^m >$ решения уравнения Якоби* (4) *с δ-коррелированным коэффициентом $K(x)$ удовлетворяет линейному уравнению с постоянными коэффициентами, причем порядок этого уравнения не превосходит числа различных компонент соответствующего тензора* (9).

Доказательство. Проведем процедуру скаляризации тензорного уравнения (10). В результате получим систему линейных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами, в которой, согласно лемме 2, число различных уравнений равно числу неизвестных функций, т.е. числу различных усредненных компонент линеаризирующего тензора. Одной из них будет являться компонента $< y^m >$, соответствующая набору индексов $i = l = k = \ldots = p = 1$. Применение леммы 3 для функции $g_1 =< y^m >$ завершает доказательство.

Нетривиальность утверждения доказанной теоремы заключается в том, что уравнение для m-й степени поля Якоби является, вообще говоря, нелинейным. Например, квадрат поля Якоби $y^2(x) = Y(x)$ удовлетворяет уравнению $2YY'' - \left(Y'\right)^2 + 4K(x)Y^2 = 0$, в чем несложно убедиться, умножив левую и правую части (4) на $y' \not\equiv 0$

и преобразовав затем с помощью очевидных формул $yy' = (y^2)'/2$, $y'y'' = \big((y')^2\big)'/2$ и $(y')^2 = \big((y^2)'\big)^2/4y^2$ полученное выражение.

В заключение приведем явные уравнения для моментов поля Якоби 2-го, 3-го и 4-го порядков, полученные в [32] на основе предложенного тензорного подхода:

$$< y^2 >'' + (4\overline{K} - \frac{4}{3}\mathcal{K}) < y^2 >= 0,$$

$$< y^3 >'''' + 10\big(\overline{K} - \frac{1}{2}\mathcal{K}\big) < y^3 >'' + 9\big(\overline{K} - \frac{1}{2}\mathcal{K}\big)^2 < y^3 >= 0,$$

$$< y^4 >'''' + 20\big(\overline{K} - \frac{2}{3}\mathcal{K}\big) < y^4 >'' + 64\big(\overline{K} - \frac{2}{3}\mathcal{K}\big)^2 < y^4 >= 0.$$

Автор выражает благодарность профессорам МГУ Д.Д. Соколову и В.Н. Тутубалину за прочтение рукописи и сделанные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №07-02-00127).

Литература

1. *Зельдович Я.Б.* Наблюдения во Вселенной, однородной лишь в среднем // Аст-рон. ж. 1964. 41. 19-24.
2. *Я.Б. Зельдович, И.Д. Новиков* Релятивистская астрофизика. М.:Наука, 1967.
3. *Я.Б. Зельдович, И.Д. Новиков* Строение и эволюция Вселенной. М.:Наука, 1975.
4. *Lamburt V.G., Sokoloff D.D., Tutubalin V.N.* Light propagation in a Universe with spatial inhomogeneities // Astrophysics and Space Science. 2005. **298.** 409-418.
5. *E. V. Ivanova, O. S. Khovanskaya.* Effective curvature of the Universe in observations of distant objects //Astronomy reports, – 2005, – V. 49, – P. 771-776.
6. *E. A. Gann.* A fundemental limitation on the accuracy of angular measurements in observational cosmology. // Ap. J. – 1967, – V. 147, – P. 61-68.
7. *Ламбурт В.Г., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Поля Якоби вдоль геодезической со случайной кривизной // Матем.заметки. 2003. 74(3). 416-424.
8. *Ламбурт В.Г., Соколов Д. Д., Туту балин В.Н.* Многообразие переменной кривизны и асимптотические результаты о произведении случайных матриц. Сб. "Математическая физика, математическое моделирование и приближенные методы. Тезисы докладов"// Обнинск, 2000. С. 37.
9. *Furstenberg H.* Noncommuting random products // Trans.Amer.Math.Soc. 1963. **108(3).** 377-428.
10. *Furstenberg H.* A Poisson formula for semi-simple Lie groups // Ann.Math. 1963. **77(2).** 335-386.
11. *Фрик П.Г.* Турбулентность: подходы и модели. М.: РХД, 2003.
12. *M. V. Sazhin, V. E. Zharov, T. A. Kalinina.* Parallax distortion by weak microlensing effect. // Monthly Not. Roy. Astron. Soc., – 2001, – V. 323, – P. 952-964.
13. *M. V. Sazhin, V. E. Zharov, A. V. Volynkin, et al.* Microarcsecond instability of the celestial reference frame. // Monthly Not. Roy. Astron. Soc., – 1998, – V. 300, – P. 287-291.
14. *В.Е. Жаров, М.В. Сажин, Н.А. Чуйкова.* Влияние нестабильности земной и небесной систем координат на определение параметров ориентации Земли. // Астрон. ж., 2000, **77(2),** С. 144-160.
15. *М.В. Сажин.* Фундаментальный предел точности астрометрических измерений. // Письма в Астрон. ж., 1996, **22,** С. 643-647.
16. *F. De Felice, C.J.S. Clarke.* Relativity on curved manifolds. Cambridge, – 1990.
17. *Дж. Синг.* Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
18. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Теория поля (8-е издание). М.: Наука, 2001, Т.2.
19. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М.:Мир, 1971.
20. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование распределения сопряженных точек на геодезической со случайной кривизной // Вычислительные методы и программирование. 2004. 5.(2). 172-177.
21. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование решений уравнения Якоби на геодезической со случайной кривизной // Астрон. ж. 2005. 82(7). 584-589.
22. *Artyushkova M.E., Sokoloff D.D.* Modelling small-scale dynamo by the Jacobi equation // Magnetohydrodynamics. 2006. 42(1). 3-19.

23. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Перемежаемость в случайной среде // УФН. 1987. 152(1). 3-32.
24. *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D.D.* The Almighty Chance // Singapore, World Scientific, 1991.
25. *Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Уравнения динамо в случайном короткокоррелированном поле скорости // Магнитная гидродинамика. 1983. 4. 67-72.
26. *Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Кинематическое динамо в случайном потоке // УФН. 1985. 145(4). 593-628.
27. *N. Kleeorin, I. Rogachevskii and D. Sokoloff.* Magnetic fluctuations with zero mean field in a random fluid with a finite correlation time and a small magnetic diffusion. // Phys. Rev. E., – 2002, – V. 65, – P. 036303-7.
28. *Грачев Д.А.* Влияние эффектов памяти в задаче о распространении света во Вселенной с неоднородностями // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2008. 1. 16-19.
29. *Семенов Д.В.* Усреднение параболических дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами // Матем. заметки. 1989. 45(3). 123-126.
30. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004.
31. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: УРСС, 2000.
32. *Grachev D.A.* Averaging of Jacobi fields along geodesics on manifolds of random curvature // Journal of Mathematical Sciences. 2009. V. 160(1). P.128-138.

A TENSOR METHOD FOR AVERAGING OF JACOBI FIELD ALONG GEODESICS WITH RANDOM CURVATURE

D.A. Grachev

The Lomonosov Moscow State University

dengrac@mail.ru

Received 11.08.2012

One considers the Jacobi field along a geodesics in a Riemannian manifold on which the curvature is a stochastic process. We introduce the concept of linearizing tensor based on which the equations for 2,3 and 4-order moments are derived. A theorem on the general form of the moment equation is proved. A progressive growth of statistical moments of Jacobi field is shown. We demonstrate a link between this growth and cosmological Zeldovich's effect.