

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА АТОМА ВОДОРОДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ

А.В. Перескоков

НИУ МЭИ, МИЭМ НИУ ВШЭ

pereskocov62@mail.ru

Поступила 01.10.2012

Рассматривается задача об эффекте Зеемана во втором порядке по магнитному полю с использованием неприводимых представлений алгебры с квадратичными коммутационными соотношениями Карасева-Новиковой. Каждому представлению этой алгебры соответствует спектральный кластер вокруг уровня энергии невозмущенного атома водорода. На примере этой модели излагается общий метод построения асимптотических решений вблизи границ спектральных кластеров с помощью нового интегрального представления. Изучена задача вычисления квантовых средних вблизи нижних границ кластеров.

УДК 517.984 + 517.958

1. Введение

Нерелятивистский гамильтониан атома водорода в однородном магнитном поле имеет вид

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \varepsilon \mathbb{M}_3 + \varepsilon^2 \mathbb{W}, \quad (1)$$

где

$$\mathbb{H} = -\Delta - |x|^{-1}, \quad \mathbb{M}_3 = ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathbb{W} = (x_1^2 + x_2^2)/4.$$

Здесь через $x = (x_1, x_2, x_3)$ обозначены декартовы координаты в \mathbb{R}^3 , Δ — оператор Лапласа, магнитное поле направлено вдоль оси x_3 ; параметр ε в (1) пропорциона-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00627-а), Министерства образования и науки РФ (государственный контракт 14.740.11.0875) и Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2033.2012.1).

лен напряженности поля. Задача об атоме водорода в магнитном поле представляет большой физический и математический интерес. Ей посвящено большое число работ (см., например, [1-8]).

Алгебраический метод построения асимптотики спектра и собственных функций оператора (1) был предложен в [9]. Он основан на алгебраическом усреднении возмущения, последующем переходе на алгебру симметрий и когерентном преобразовании от исходного представления этой алгебры к ее неприводимому представлению в пространстве функций над лагранжевым подмногообразием в симплектическом листе. В дальнейшем этот метод был развит для широкого класса задач с частотными резонансами [10, 11]. Он хорошо отработан на ряде физических моделей.

Особый интерес представляют состояния системы (1), отвечающие границам спектральных кластеров вблизи собственных значений невозмущенного оператора, где упомянутые лагранжевы подмногообразия почти схлопываются и интегральное представление решения над ними становится невозможным. Возможный подход к построению асимптотики около границ кластеров с помощью "деформированных" когерентных состояний был намечен в [9], но его обоснование в высших приближениях пока не осуществлено.

В работах [12, 13] на примере спектральной задачи для двумерного возмущенного осциллятора был предложен другой метод нахождения серий асимптотических собственных значений вблизи границ спектральных кластеров. Он основан на новом интегральном представлении для соответствующих асимптотических собственных функций. В данной работе этот метод будет применен для нахождения асимптотики спектра атома водорода в магнитном поле вблизи нижних границ спектральных кластеров (см., теоремы 1 и 3, где приведены формулы для асимптотических собственных значений и собственных функций). Подчеркнем, что полученная формула для асимптотики собственной функции глобальна. Получить ее стандартными методами, такими как лучевой метод [14] или теория комплексного роста [15], невозможно.

Автор благодарен М.В.Карасеву за привлечение внимания к данной задаче, а также за ценные вопросы и замечания.

2. Регуляризация

Зафиксируем целое число m . Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ задачу на собственные значения для гамильтониана (1) и для третьей компоненты углового момента:

$$(\mathbb{H}_0 + \varepsilon^2 \mathbb{W})\psi = E\psi, \quad \mathbb{M}_3\psi = m\psi. \quad (2)$$

Следуя [9], произведем регуляризацию гамильтониана (1). Для каждого $n \geq 1$ и $E < 0$ введем параметры ν и μ , новую переменную $q \in \mathbb{R}^3$ и функцию $\tilde{\psi}$ по формулам

$$E = -\frac{1}{4n^2\nu^2}, \quad \mu = \varepsilon^2 n^6 \nu^4, \quad q = \frac{x}{n^2\nu}, \quad \psi(x) = \frac{\tilde{\psi}(q)}{n^2}. \quad (3)$$

Кроме того, положим $\hbar = 1/n$ и рассмотрим операторы

$$\mathbf{S}_0 = |q| \left(\frac{1}{4} + (-i\hbar \frac{\partial}{\partial q})^2 \right), \quad \mathbf{S}_1 = \frac{|q|}{4} (q_1^2 + q_2^2), \quad \mathbf{M}_3 = q_1 (-i\hbar \frac{\partial}{\partial q_2}) - q_2 (-i\hbar \frac{\partial}{\partial q_1}).$$

Замена (3) приводит к следующей спектральной задаче

$$(\mathbf{S}_0 + \mu \mathbf{S}_1) \tilde{\psi} = \nu \tilde{\psi}, \quad \mathbf{M}_3 \tilde{\psi} = \hbar m \tilde{\psi} \quad (4)$$

в гильбертовом пространстве $L^2_-(\mathbb{R}^3)$ со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \varphi' \rangle_- = \frac{\pi}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(q) \bar{\varphi}'(q)}{|q|} dq.$$

Число ν в (4) — это искомое собственное значение, а $\mu \geq 0$ — параметр. Задача (2) на подпространстве, отвечающем отрицательному спектру $E < 0$, эквивалентна спектральной задаче (4) в $L^2_-(\mathbb{R}^3)$.

Отметим, что в отсутствие магнитного поля спектр оператора \mathbf{S}_0 целочисленный $\{\hbar N | N = 1, 2, 3, \dots\}$. В частности, \mathbf{S}_0 имеет собственное значение $\hbar n = 1$. При $\mu > 0$ будем рассматривать ветви собственных значений оператора $\mathbf{S}_0 + \mu \mathbf{S}_1$, равные 1 в пределе при $\mu = 0$. Они имеют вид $1 + \mu \lambda_{k,m,n}(\mu)$, где $\lambda_{k,m,n}(\mu)$ — некоторые гладкие функции в окрестности $\mu = 0$, k — номер ветви. Соответствующие собственные функции задачи (4) обозначим $\tilde{\psi}_{k,m,n}(q, \mu)$. (Ниже для краткости обозначений номера m и n в индексах будут опускаться.) Определив из (4) функции $\lambda_k(\mu)$, можно затем из системы уравнений

$$1 + \mu \lambda_k(\mu) = \nu, \quad \mu = \varepsilon^2 n^6 \nu^4 \quad (5)$$

найти $\nu = \nu_k(\varepsilon)$ и $\mu = \mu_k(\varepsilon)$.

3. Алгебраическое усреднение

Предположим, что $\varepsilon^2 n^7 \lesssim 1$ и ν порядка 1. Тогда $\mu \ll 1$, и поскольку спектр оператора \mathbf{S}_0 целочисленный, то к задаче (4) можно применить квантовую версию метода усреднения [16,17,9]. Исходная идея метода состоит в том, чтобы найти такой обратимый оператор \mathbf{U} и такой оператор $\underline{\mathbf{S}}_1 + \mu \underline{\mathbf{S}}_2$, чтобы

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{S}_0 + \mu \mathbf{S}_1)\mathbf{U} &= \mathbf{S}_0 + \mu \underline{\mathbf{S}}_1 + \mu^2 \underline{\mathbf{S}}_2 + O(\mu^3), \\ [\underline{\mathbf{S}}_1 + \mu \underline{\mathbf{S}}_2, \mathbf{S}_0] &= [\underline{\mathbf{S}}_1 + \mu \underline{\mathbf{S}}_2, \mathbf{M}_3] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Новый возмущающий оператор $\underline{\mathbf{S}}_1 + \mu \underline{\mathbf{S}}_2$ коммутирует со старшей частью \mathbf{S}_0 и с оператором \mathbf{M}_3 . Поэтому решение спектральной задачи (4) сводится к решению такой задачи для оператора $\underline{\mathbf{S}}_1 + \mu \underline{\mathbf{S}}_2$ на $L[m, n] \subset L^2_-(\mathbb{R}^3)$ — совместном подпространстве функций, одновременно являющимися собственными функциями операторов \mathbf{S}_0 и \mathbf{M}_3 . Так как $\nu = 1 + \mu \lambda(\mu)$, то усредненная задача принимает вид

$$\mathbf{S}_0 \varphi = \varphi, \quad \mathbf{M}_3 \varphi = \hbar m \varphi, \quad (7)$$

$$(\underline{\mathbf{S}}_1 + \mu \underline{\mathbf{S}}_2 + O(\mu^2)) \varphi = \lambda \varphi. \quad (8)$$

Переход от φ к $\tilde{\psi}$ производит деусредняющее преобразование \mathbf{U} , которое вычисляется явно [9].

Решение задачи (7),(8) можно представить в виде $\varphi = \varphi_k + O(\varepsilon^2 n^6)$, где $\{\varphi_k(q)\}$ — ортонормированный базис собственных функций $\underline{\mathbf{S}}_1$, отвечающих некоторым собственным значениям ξ_k :

$$\mathbf{S}_0 \varphi_k = \varphi_k, \quad \mathbf{M}_3 \varphi_k = \hbar m \varphi_k, \quad \underline{\mathbf{S}}_1 \varphi_k = \xi_k \varphi_k. \quad (9)$$

Собственные значения $\lambda = \lambda_k(\mu)$ полной задачи (7),(8) имеют вид

$$\lambda_k(\mu) = \xi_k + \mu\eta_k + O(\mu^2),$$

где

$$\eta_k = \langle \underline{\mathbf{S}}_2 \varphi_k, \varphi_k \rangle_{-}. \quad (10)$$

В силу (3),(5) асимптотика решения исходной задачи (2) задается формулами [9]

$$E_k = -\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 n^4 \xi_k + \frac{1}{4}\varepsilon^4 n^{10} (2\eta_k + 5\xi_k^2) + O(\varepsilon^6 n^{16}), \quad (11)$$

$$\psi_k(x) = \mathbf{U}\varphi_k/n^2 + O(\varepsilon^2 n^6). \quad (12)$$

Далее рассмотрим алгебру \mathcal{F}_{quant} Карасева-Новиковой, состоящую из первых интегралов пары $\mathbf{S}_0, \mathbf{M}_3$ [9,18]. Ее образующие $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ подчинены следующим квадратичным коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] &= i\hbar\mathbf{B}_0\mathbf{B}_3, & [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1] &= 2i\hbar\mathbf{B}_2, \\ [\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3] &= -\frac{i\hbar}{2}(\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_0), & [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_2] &= -2i\hbar\mathbf{B}_1, \\ [\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_1] &= -\frac{i\hbar}{2}(\mathbf{B}_0\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_0), & [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_3] &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу (6) усредненные гамильтонианы $\underline{\mathbf{S}}_1, \underline{\mathbf{S}}_2$ выражаются через образующие $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3)$ алгебры \mathcal{F}_{quant} . Справедлива [9]

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$\underline{\mathbf{S}}_1 = \mathbf{S}_0 g_0(\mathbf{B}), \quad \underline{\mathbf{S}}_2 = \mathbf{S}_0 g_{00}(\mathbf{B}),$$

где операторы $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ симметризованы по Вейлю, а символы

$$g_0(b) = 12b_3 - 8b_2 - 4M_3^2 + 4\hbar^2, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} g_{00}(b) &= -\frac{1}{3}(4(108b_2^2 + 239b_3^2 - 308b_2b_3) + 4(-66S_0^2 + 100M_3^2 - 234\hbar^2)b_2 + \\ &+ 4(65S_0^2 - 130M_3^2 + 249\hbar^2)b_3 - 127S_0^2M_3^2 + 72M_3^4 + 127\hbar^2S_0^2 - 277\hbar^2M_3^2 + 205\hbar^4). \end{aligned} \quad (15)$$

4. Когерентное преобразование

Пусть m, n — целые, $n > |m| \geq 0$. Обозначим через $\mathcal{P}[m, n]$ пространство антиголоморфных многочленов над \mathbb{C} степени не выше $n - |m| - 1$, скалярное произведение в котором задается формулой

$$(\Phi_1, \Phi_2)_{\mathcal{P}[m, n]} = \int_{\mathbb{C}} \Phi_1(\bar{z}) \overline{\Phi_2(\bar{z})} d\mu_{m, n}(z). \quad (16)$$

Здесь $d\mu_{m, n}(z) = \varrho(|z|^2) d\bar{z} dz$, функция

$$\varrho(r) = \frac{n(n - |m|)(|m| + 1)_n}{2\pi(n + 1)_{n+1}} r^{|m|} F(n + 1, n + |m| + 1; 2n + 2; 1 - r),$$

где F — гипергеометрический ряд [19], а операция $(l)_M$ определяется по формуле

$$(l)_M \equiv l(l+1)\dots(l+M-1), \quad (l)_0 \equiv 1.$$

Отметим, что функция $\varrho(r)$ является единственным решением следующей задачи

$$r(1-r)\varrho'' + ((1-|m|) - (2n-|m|+3)r)\varrho' - (n+1)(n-|m|+1)\varrho = 0, \quad (17)$$

$$\int_0^{\infty} \varrho(r)dr = \frac{1}{2\pi}, \quad \varrho(r) > 0. \quad (18)$$

Чтобы решить задачу (9), воспользуемся когерентным преобразованием [20,9,18]

$$\mathfrak{H}(\Phi) = \int_{\mathbb{C}} \Phi(\bar{z}) \mathfrak{H}_z d\mu_{m,n}(z). \quad (19)$$

Здесь гипергеометрические когерентные состояния имеют вид

$$\mathfrak{H}_z = \sum_{j=0}^{n-|m|-1} \overline{P_j(\bar{z})} \chi_j,$$

где

$$P_j(\bar{z}) = \sqrt{k_j} \bar{z}^j, \quad k_j = \frac{(n-j)_j (n-|m|-j)_j}{j!(1+|m|)_j}, \quad j = 0, \dots, n-|m|-1 \quad (20)$$

— ортонормированный базис в $\mathcal{P}[m, n]$, а функции

$$\begin{aligned} \chi_j(q) &= c_j (q_1 + i \operatorname{sgn}(m)q_2)^{|m|} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{|q|}{2\hbar}\right) L_j^{|m|}\left(\frac{|q|+q_3}{2\hbar}\right) L_{n-|m|-1-j}^{|m|}\left(\frac{|q|-q_3}{2\hbar}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

В формуле (21) $L_N^M(y)$ — полиномы Лагерра [19]. а нормировочные константы c_j имеют вид

$$c_j = (-1)^j / \left(2^{|m|} \pi \hbar^{|m|+1} \sqrt{(n-|m|-j)_{|m|} (1+j)_{|m|}}\right).$$

Когерентное преобразование (19) отображает гильбертово пространство $\mathcal{P}[m, n]$ на гильбертово пространство $L[m, n]$.

Заметим, что интегральное представление

$$\varphi_k = \mathfrak{H}(\Phi_k) \quad (22)$$

дает точные решения первых двух уравнений (9) при любых амплитудах Φ_k . Поскольку в результате когерентного преобразования (19) $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ преобразуются в дифференциальные операторы 1 и 2 порядка

$$\begin{aligned} \overset{0}{B}_0 &= \hbar \left(2\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} - n + |m| + 1\right), \\ \overset{0}{B}_1 &= \frac{i\hbar^2}{2} (\bar{z}(\bar{z}^2 - 1) \frac{d^2}{d\bar{z}^2} - ((2n - |m| - 3)\bar{z}^2 + |m| + 1) \frac{d}{d\bar{z}} + (n-1)(n-|m|-1)\bar{z}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^0B_2 &= \frac{\hbar^2}{2} (\bar{z}(\bar{z}^2 + 1) \frac{d^2}{d\bar{z}^2} - ((2n - |m| - 3)\bar{z}^2 - |m| - 1) \frac{d}{d\bar{z}} + (n - 1)(n - |m| - 1)\bar{z}), \\ {}^0B_3 &= -\hbar^2 (\bar{z}^2 \frac{d^2}{d\bar{z}^2} - (n - |m| - 2)\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} - \frac{1}{2}(n - 1)(|m| + 1)), \end{aligned} \quad (23)$$

то в силу (14),(9) получаем следующее уравнение для Φ_k :

$$({}^0B_3 - {}^0B_2 - 4\hbar^2 m^2 + 4\hbar^2)\Phi_k = \xi_k \Phi_k. \quad (24)$$

Собственными числами уравнения (24) назовем такие значения параметра ξ_k , при которых это уравнение имеет полиномиальные решения в пространстве $\mathcal{P}[m, n]$. Потребуем, чтобы

$$\|\Phi_k\|_{\mathcal{P}[m, n]} = 1. \quad (25)$$

Покажем, как связана точка $\bar{z} = 1$ со спектром оператора $g_0(\mathbf{B})$. Положим $c = |m|/n$ и пусть

$$n \rightarrow \infty, \quad |m| \rightarrow \infty, \quad (26)$$

$$5^{-1/2} < c < 1. \quad (27)$$

Рассмотрим сужение функции (14) на симплектический лист Ω алгебры (13), задаваемый уравнениями

$$b_3^2 - b_1^2 - b_2^2 = c^2/4, \quad b_0^2 + 4b_3 = c^2 + 1.$$

Введем на Ω кэлерову структуру с помощью комплексной координаты

$$z = \frac{2(b_3 + ib_1)}{1 - 2b_3 - b_0}.$$

Далее перейдем в g_0 от координат b_0, b_1, b_2, b_3 к новым координатам z, \bar{z} [9,18]. В результате, сужение функции g_0 на Ω примет вид

$$\begin{aligned} g_{0,\Omega}(z, \bar{z}) &= 6c - 4c^2 + 4\hbar^2 + \\ &+ \frac{4(c - 1)[6(c - 1)|z|^2 + (z + \bar{z})(c(|z|^2 + 1) + \sqrt{c^2(|z|^2 - 1)^2 + 4|z|^2})]}{c(|z|^2 - 1)^2 + 4|z|^2 + (|z|^2 + 1)\sqrt{c^2(|z|^2 - 1)^2 + 4|z|^2}}. \end{aligned}$$

Глобальный минимум этой функции при условии (27) достигается в точке $z = \bar{z} = 1$ и равен

$$g_{0,\Omega}(1, 1) = 1 + c^2 + O(\hbar^2).$$

Число $g_{0,\Omega}(1, 1)$ определяет нижнюю границу спектрального кластера. Далее в статье будет вычислена поправка к этому числу (см. формулу (46)).

Паряду с задачей о нахождении спектра рассмотрим задачу вычисления средних значений дифференциальных операторов на решениях (2) вблизи границ спектральных кластеров. Квантовые средние играют важную роль в приложениях и могут быть найдены экспериментально. Заметим, что при $\xi_k \sim 1 + c^2$ у уравнения

$$g_{0,\Omega}(z, \bar{z})\varphi_k = \xi_k \varphi_k$$

собственные функции φ_k будут локализованы в малой окрестности точки $z = \bar{z} = 1$. Поэтому формула для квантовых средних принимает вид

$$(F(b_0, b_1, b_2, b_3)\varphi_k, \varphi_k) \sim F(0, 0, (1 - c^2)/4, (1 + c^2)/4)(\varphi_k, \varphi_k). \quad (28)$$

Здесь функции b_0, b_1, b_2, b_3 были приближенно заменены их значениями в точке $z = \bar{z} = 1$. Приведенные выше формальные рассуждения будут далее строго обоснованы (см. теорему 2).

5. Интегральное представление для асимптотических собственных функций

Рассмотрим уравнение (24). Учитывая формулы (23), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{R(\bar{z})}{|m|^2} \frac{d^2 \Phi_k}{d\bar{z}^2} - \frac{1}{|m|} \left[(2\sqrt{a} - 1 - \frac{3}{|m|}) \bar{z}^2 + 3(\sqrt{a} - 1 - \frac{2}{|m|}) \bar{z} - 1 - \frac{1}{|m|} \right] \frac{d\Phi_k}{d\bar{z}} + \\ & + \left[(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} - 1 - \frac{1}{|m|}) \bar{z} - \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{|m|}) (3\sqrt{a} - 2 - \frac{1}{|m|}) + \frac{\tilde{\xi}_k}{4} \right] \Phi_k = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$R(\bar{z}) = \bar{z}(\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 1), \quad (30)$$

$$a = \frac{n^2}{|m|^2} = \frac{1}{c^2}, \quad \tilde{\xi}_k = \frac{n^2}{|m|^2} \xi_k. \quad (31)$$

(Для упрощения обозначений индекс k у функции Φ будет ниже опущен.) Оно имеет три особые точки

$$\bar{z}_1 = 0, \quad \bar{z}_2 = (-3 + \sqrt{5})/2, \quad \bar{z}_3 = (-3 - \sqrt{5})/2, \quad (32)$$

которые являются корнями уравнения $R(\bar{z}) = 0$, а также особую точку $\bar{z}_4 = \infty$. Так как все четыре особые точки являются регулярными, то (29) есть уравнение класса Фукса [21]. Фуксовы уравнения с четырьмя особыми точками называются уравнениями Гойна.

Фуксовы уравнения с тремя особыми точками порождают хорошо известные системы классических ортогональных полиномов [19]. Для фуксовых уравнений с четырьмя и с большим числом особых точек подобной теории не существует. В данной статье будут найдены асимптотические собственные значения и соответствующие собственные функции (многочлены) для задачи (29),(25), если выполнены условия (26),(27).

Нам потребуется ряд результатов из теории когерентных преобразований [18]. Наряду с пространством $\mathcal{P}[m, n]$ рассмотрим дуальное ему гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{P}}[m, n]$, состоящее из мероморфных распределений на $\mathbb{C}/\{0\}$ вида

$$\tilde{g}(z) = \sum_{j=0}^{n-|m|-1} \frac{\tilde{g}_j}{z^{j+1}}.$$

Двойственность между пространствами $\tilde{\mathcal{P}}[m, n]$ и $\mathcal{P}[m, n]$ задается отображением

$$\mathcal{K} : \tilde{\mathcal{P}}[m, n] \rightarrow \mathcal{P}[m, n], \quad (\mathcal{K}\tilde{g})(\bar{w}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} K(\bar{w}, z) \tilde{g}(z) dz,$$

где воспроизводящее ядро

$$K(\bar{w}, z) = \sum_{j=0}^{n-|m|-1} k_j (z\bar{w})^j, \quad (33)$$

а γ — цикл вокруг точки $z = 0$, ориентированный против часовой стрелки. Константы k_j в (33) заданы равенствами (20). Обратное отображение имеет вид

$$(\mathcal{K}^{-1}g)(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \tilde{L}(\bar{w}, z)g(\bar{w})d\bar{w},$$

где мероморфное воспроизводящее ядро

$$\tilde{L}(\bar{w}, z) = \sum_{j=0}^{n-|m|-1} \frac{1}{k_j(\bar{w}z)^{j+1}}. \quad (34)$$

Обозначим через $G(\bar{u}, \bar{w})$ ядро суперпозиции операторов \mathcal{K}^{-1} и \mathcal{K} . Из формул (33), (34) вытекает, что

$$G(\bar{u}, \bar{w}) = \frac{\bar{u}^{n-|m|} - \bar{w}^{n-|m|}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u} - \bar{w})}. \quad (35)$$

Ядро (35) в пространстве $\mathcal{P}[m, n]$ определяет тождественный оператор, а на множестве J антиголоморфных в окрестности нуля функций является проектором на пространство $\mathcal{P}[m, n]$.

Будем искать решение уравнения (28) в виде

$$\Phi(\bar{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} G(\bar{u}, \bar{z})p(\bar{u})d\bar{u}, \quad (36)$$

где функция $p \in J$, а G задается формулой (35). Под действием отображения (36) операторы $\overset{0}{B}_2, \overset{0}{B}_3$ преобразуются в операторы $\hat{B}_2, \hat{B}_3 : J \rightarrow J$, а уравнение (29) — в уравнение

$$\left(12\hat{B}_3 - 8\hat{B}_2 - 4\hbar^2 m^2 + 4\hbar^2 - \xi_k\right)p = 0. \quad (37)$$

Положим $\ell = n - |m| - 1$. В силу условий (26), (27) $\ell \rightarrow \infty$. Чтобы вычислить \hat{B}_2, \hat{B}_3 воспользуемся тем, что под действием отображения (36) связанные равенствами

$$\overset{0}{A} = \overset{0}{S}_3, \quad \overset{0}{B} = \overset{0}{S}_1 - i\overset{0}{S}_2, \quad \overset{0}{C} = \overset{0}{S}_1 + i\overset{0}{S}_2$$

с образующими алгебры $\mathbf{su}(2)$ операторы

$$\overset{0}{A} = \hbar\left(\frac{\ell}{2} - \bar{z}\frac{d}{d\bar{z}}\right), \quad \overset{0}{B} = \hbar\bar{z}\left(\ell - \bar{z}\frac{d}{d\bar{z}}\right), \quad \overset{0}{C} = \hbar\frac{d}{d\bar{z}}$$

преобразуются в операторы

$$\hat{A} = \hbar\left(\frac{\ell}{2} - \bar{u}\frac{d}{d\bar{u}}\right), \quad \hat{B} = \hbar\bar{u}\left(\ell - \bar{u}\frac{d}{d\bar{u}}\right), \quad \hat{C} = \hbar\left(\frac{d}{d\bar{u}} - \frac{\bar{u}^{\ell}}{\ell!}\frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}}\right).$$

Поскольку

$$\overset{0}{B}_2 = \frac{\overset{0}{A}(\overset{0}{B} - \overset{0}{C})}{2} + \frac{\hbar}{4}(n + |m| + 1)(\overset{0}{B} + \overset{0}{C}), \quad \overset{0}{B}_3 = -(\overset{0}{A})^2 + \frac{\hbar^2}{4}(n^2 + m^2 - 1),$$

то справедлива

Лемма 2. Операторы \hat{B}_2, \hat{B}_3 имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{B}_2 &= \frac{\hbar^2}{2} (\bar{u}(\bar{u}^2 + 1)) \frac{d^2}{d\bar{u}^2} - ((2n - |m| - 3)\bar{u}^2 - |m| - 1) \frac{d}{d\bar{u}} + \\ &+ (n - 1)(n - |m| - 1)\bar{u} - \frac{\hbar^2}{2} (\bar{u} \frac{d}{d\bar{u}} + |m| + 1) \frac{\bar{u}^\ell}{\ell!} \frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}}, \\ \hat{B}_3 &= -\hbar^2 (\bar{u}^2 \frac{d^2}{d\bar{u}^2} - (n - |m| - 2)\bar{u} \frac{d}{d\bar{u}} - \frac{1}{2}(n - 1)(|m| + 1)).\end{aligned}$$

Пусть Φ^{WKB} — ВКБ - приближение для решения уравнения (29) при $|m| \rightarrow \infty$ [22]. Тогда с помощью неравенств Коши [23] доказывается, что если цикл γ расположен достаточно близко от нуля, то при подстановке Φ^{WKB} в (37) дополнительное слагаемое

$$-\frac{\hbar^2}{2} (\bar{u} \frac{d}{d\bar{u}} + |m| + 1) \frac{\bar{u}^\ell}{\ell!} \frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}},$$

вызванное заменой $\overset{0}{B}_2$ на \hat{B}_2 , при $\ell \rightarrow \infty$ вносит в невязку экспоненциально малый вклад $O(\ell^{-\infty} \Phi^{WKB})$ по сравнению с невязкой $O(\ell^{-2} \Phi^{WKB})$ в случае уравнения (29). Следовательно, вместо асимптотического решения уравнения (37) $\ell + 2$ порядка в правую часть (36) можно подставить асимптотическое решение уравнения 2 порядка (29).

6. Асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи.

Вычисление поправки в спектральной серии

Изучим поведение решений (29) вблизи особых точек. Решая определяющие уравнения, находим, что характеристические показатели в особых точках (32) равны

$$\rho_j^{(1)} = 0, \quad j = 1, 2, 3; \quad \rho_1^{(2)} = -|m|, \quad \rho_j^{(2)} = n, \quad j = 2, 3,$$

а в точке $\bar{z}_4 = \infty$ $\rho_\infty^{(1)} = -n + |m| + 1$, $\rho_\infty^{(2)} = -n + 1$.

При $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_k$ точными решениями спектральной задачи (29),(25) являются многочлены из пространства $\mathcal{P}[m, n]$. Их характеристические показатели в особых точках (32) равны нулю, а в точке $\bar{z}_4 = \infty$ — $\rho_\infty^{(1)}$. Отметим, что при выполнении условия (27) решения с характеристическими показателями $\rho_j^{(2)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, не лежат в пространстве $\mathcal{P}[m, n]$.

Наряду с задачей (28),(25) рассмотрим многоточечную спектральную задачу. Она состоит в нахождении чисел $\tilde{\xi}_k$ (собственных значений), при которых у уравнения (29) существуют ненулевые антиголоморфные решения, характеристические показатели которых в особых точках (32) равны нулю, а в особой точке $\bar{z}_4 = \infty$ показатель равен $-n + |m| + 1$.

Если число $\tilde{\xi}_k$ и функция $p(\bar{u})$ — асимптотическое решение такой многоточечной спектральной задачи, то при подстановке $p(\bar{u})$ в правую часть формулы (36) получаем многочлен $\Phi(\bar{z})$ — асимптотическое решение уравнения (29) из пространства $\mathcal{P}[m, n]$. Условие нормировки (25) позволяет определить содержащийся в $p(\bar{u})$ произвольный множитель. Таким образом, число $\tilde{\xi}_k$ и многочлен $\Phi(\bar{z})$ являются асимптотическим решением исходной спектральной задачи (29),(25).

Перейдем к нахождению асимптотических решений уравнения (29). Положим

$$\tilde{\xi}_k = a + 1 + \frac{\tilde{\xi}_k^{(1)}}{|m|} + O\left(\frac{1}{|m|^2}\right) \quad (38)$$

и выполним подстановку [21] $\Phi(\bar{z}) = E(\bar{z})Y(\bar{z})$, где

$$E(\bar{z}) = (\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 1)^{(\sqrt{a|m|-1})/2} \bar{z}^{-(|m|+1)/2}. \quad (39)$$

Тогда уравнение (29) преобразуется к виду

$$\frac{1}{|m|^2} \frac{d^2 Y}{d\bar{z}^2} - \left(Q_0(\bar{z}) - \frac{\tilde{\xi}_k^{(1)}}{|m|4R(\bar{z})} + O\left(\frac{1}{|m|^2}\right) + O\left(\frac{1}{|m|^2 R(\bar{z})}\right) \right) Y = 0. \quad (40)$$

Здесь $Q_0(\bar{z}) = 4^{-1}(\bar{z} - 1)^2(\bar{z}^2 + (3 - a)\bar{z} + 1)R^{-2}(\bar{z})$, многочлен $R(\bar{z})$ задан формулой (30).

Приравнявая $Q_0(\bar{z})$ к нулю, находим, что уравнение (40) имеет точку поворота $\bar{z} = 1$ кратности 2, а также простые точки поворота

$$\bar{z}_{\pm} = (-3 + a \pm i\sqrt{(a-1)(5-a)})/2.$$

Они лежат на окружности $|\bar{z}| = 1$ и перемещаются по ней от -1 к 1 при возрастании параметра a от 1 до 5 (см. рис. 1).

Построим ВКБ-приближения для решений уравнения (40). Они справедливы вне малых окрестностей точек поворота и имеют вид

$$Y_{\pm}^{WKB} = \frac{\tilde{c}_{\pm}}{\sqrt[4]{Q_0(\bar{z})}} \exp\left(\pm|m| \int \sqrt{Q_0(\bar{z})} d\bar{z} \mp \frac{\tilde{\xi}_k^{(1)}}{8} \int \frac{d\bar{z}}{R(\bar{z})\sqrt{Q_0(\bar{z})}}\right). \quad (41)$$

Здесь \tilde{c}_{\pm} — константы, в степенных функциях берутся главные значения. Кроме того, вдоль дуги окружности $\cup \bar{z}_-, \bar{z}_+$, которая соединяет точки \bar{z}_-, \bar{z}_+ и проходит через -1 , проведен разрез. Интегралы в (41) выражаются через элементарные функции, однако имеют весьма громоздкий вид. На рис. 1 помимо особых точек и точек поворота изображены линии Стокса [22]. В граф Стокса, в частности, входит дуга $\cup \bar{z}_-, \bar{z}_+$.

Вблизи точек поворота \bar{z}_+, \bar{z}_- асимптотические решения уравнения (40) выражаются через функции Эйри. А именно, вблизи \bar{z}_{\pm}

$$Y(\bar{z}) \sim \alpha_{1,\pm} \text{Ai}(|m|^{2/3} \tau_{\pm}^{2/3} (\bar{z} - \bar{z}_{\pm})) + \alpha_{2,\pm} \text{Bi}(|m|^{2/3} \tau_{\pm}^{2/3} (\bar{z} - \bar{z}_{\pm})). \quad (42)$$

Здесь $\alpha_{1,\pm}, \alpha_{2,\pm}$ — константы,

$$\tau_{\pm} = \frac{(\bar{z}_{\pm} - 1)\sqrt{|\bar{z}_+ - \bar{z}_-|}}{2\bar{z}_{\pm}^2 a} e^{\pm i\pi/4}.$$

Вблизи точки поворота $\bar{z} = 1$ асимптотическое решение представимо в виде линейной комбинации функций параболического цилиндра

$$Y(\bar{z}) \sim \alpha_1 D_v(\bar{u}) + \alpha_2 D_{-v-1}(i\bar{u}), \quad (43)$$

где α_1, α_2 — константы,

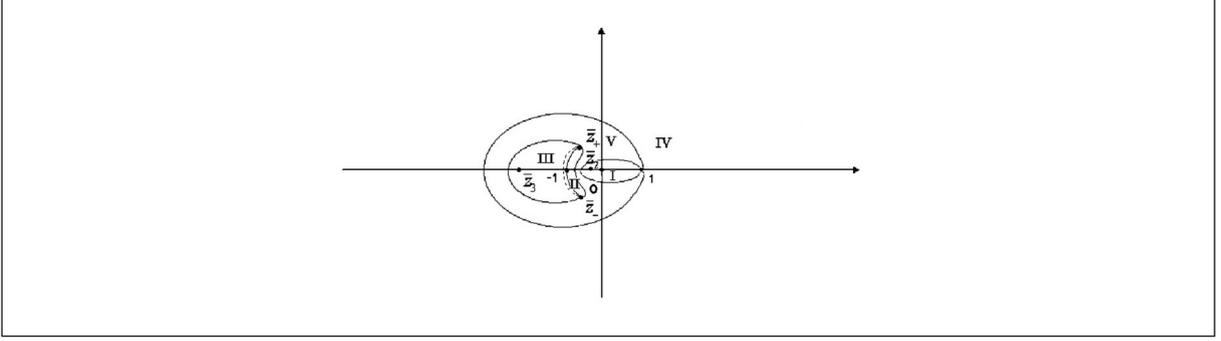


Рис. 1

$$\bar{u} = \frac{\sqrt{|m|}\sqrt[4]{5-a}(\bar{z}-1)}{\sqrt{5}}, \quad v = \frac{\tilde{\xi}_k^{(1)}}{4\sqrt{5-a}} - \frac{1}{2}. \quad (44)$$

Анализ ВКБ-приближений показывает, что $\Phi_-^{WKB} = E(\bar{z})Y_-^{WKB}$ имеет равные нулю характеристические показатели во всех особых точках (32) и характеристический показатель равный $-n + |m| + 1$ на ∞ . Тем самым определен вид ВКБ-приближения в областях I-IV (см. рис. 1). Произведем согласование асимптотических разложений. При приближении к точке $\bar{z} = 1$ в пределах области IV ВКБ-приближение $Y_-^{WKB}(\bar{z})$ экспоненциально убывает. Воспользуемся асимптотическими разложениями для функций параболического цилиндра [19]. При $|z| \rightarrow \infty$ имеем:

$$D_v(z) = z^v e^{-z^2/4} (1 + O(z^{-2})), \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4};$$

$$D_v(z) = z^v e^{-z^2/4} (1 + O(z^{-2})) -$$

$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} e^{v\pi i} z^{-v-1} e^{z^2/4} (1 + O(z^{-2})), \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}, \quad (45)$$

где $\Gamma(v)$ — гамма функция. Следовательно, при $|\arg \bar{u}| < \pi/4$, $|\bar{u}| \rightarrow \infty$ в формуле (43) $D_v(\bar{u})$ экспоненциально убывает, а $D_{-v-1}(i\bar{u})$ экспоненциально возрастает. Поэтому $\alpha_2 = 0$.

Далее, поскольку при приближении к точке $\bar{z} = 1$ в пределах области I функция $Y_-^{WKB}(\bar{z})$ экспоненциально убывает, то в силу (45) при $3\pi/4 < \arg \bar{u} < 5\pi/4$, $|\bar{u}| \rightarrow \infty$ требование экспоненциального убывания $D_v(\bar{u})$ приводит к условию

$$\frac{1}{\Gamma(-v)} = 0.$$

Как известно [24], гамма функция $\Gamma(-v)$ имеет полюса лишь при $v = k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Так как v и $\tilde{\xi}_k^{(1)}$ связаны равенством (44), то поправка в спектральной серии найдена. Доказана

Лемма 3. Числа $\tilde{\xi}_k^{(1)}$ в формуле (38) имеют вид

$$\tilde{\xi}_k^{(1)} = 4\sqrt{5-a} \left(k + \frac{1}{2} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (46)$$

При $v = k$ функции параболического цилиндра выражаются через полиномы Эрмита. Поэтому для асимптотики вблизи $\bar{z} = 1$ имеем:

$$Y(\bar{z}) \sim \frac{\alpha_1}{2^{k/2}} H_k \left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) e^{-\bar{u}^2/4} + \frac{\alpha_1 \sqrt{5}}{\sqrt{|m|} \sqrt[4]{5-a} 2^{(k+1)/2}} \times \\ \times \left\{ \left[\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right)^3 + \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right] H_k \left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right)^2 H'_k \left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) \right\} e^{-\bar{u}^2/4}. \quad (47)$$

Эта формула помимо главного члена содержит также поправку.

Продолжим процесс согласования асимптотик. Вблизи $\bar{z} = 1$ в пределах области V функция (47) согласуется с $Y_-^{WKB}(\bar{z})$. Поэтому и в этой области ВКБ-приближение равно $Y_-^{WKB}(\bar{z})$. Функция $Y_-^{WKB}(\bar{z})$ экспоненциально убывает при стремлении \bar{z} к \bar{z}_+ и \bar{z}_- в пределах области V. С другой стороны в указанной области асимптотическое разложение для $\text{Ai}(|m|^{2/3} \tau_{\pm}^{2/3} (\bar{z} - \bar{z}_{\pm}))$ при $|\bar{z} - \bar{z}_{\pm}| \gg |m|^{-2/3}$ экспоненциально убывает, а для $\text{Bi}(|m|^{2/3} \tau_{\pm}^{2/3} (\bar{z} - \bar{z}_{\pm}))$ — экспоненциально возрастает [24]. Следовательно, константы $\alpha_{2,\pm}$ в формуле (42) равны нулю. Асимптотические разложения, построенные вблизи точек \bar{z}_+, \bar{z}_- , в областях II и III также согласуются с $Y_-^{WKB}(\bar{z})$.

Наконец, при выполнении (46) формула для ВКБ-приближения принимает вид

$$\Phi_-^{WKB}(\bar{z}) = \frac{c_- (\bar{z} - 1)^k [\sqrt{X(\bar{z})} + \sqrt{a(\bar{z} + 1)}]^n}{\sqrt[4]{X(\bar{z})} [2\sqrt{X(\bar{z})} + \sqrt{5-a}(\bar{z} + 1)]^{k+1/2} [\sqrt{X(\bar{z})} + \bar{z} + 1]^{|m|}}, \quad (48)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, c_- — константа, $X(\bar{z}) = \bar{z}^2 + (3-a)\bar{z} + 1$.

Таким образом, асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи построено. Числа $\tilde{\xi}_k$ задаются формулами (38), (46), а антиголоморфная функция $p(\bar{z})$ получается в результате согласования асимптотик. А именно, $p(\bar{z}) = \Phi_-^{WKB}(\bar{z})$ является асимптотическим решением уравнения (29) на всей комплексной плоскости за исключением малых окрестностей точек поворота $\bar{z}_+, \bar{z}_-, 1$, а также дуги $\cup \bar{z}_-, \bar{z}_+$. Вблизи точек $\bar{z}_+, \bar{z}_-, 1$ функция $p(\bar{z}) = E(\bar{z})Y(\bar{z})$, где $Y(\bar{z})$ задается формулами (42) (при $\alpha_{2,\pm} = 0$) и (47) соответственно. Асимптотики согласуются между собой на расстояниях порядка $|m|^{-1/2}$ от точек \bar{z}_{\pm} и порядка $|m|^{-3/8}$ от точки 1.

7. Асимптотика многочленов $\Phi(\bar{z})$

Подставим асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи $p(\bar{z})$ в правую часть формулы (36) и вычислим асимптотику возникающего интеграла. Подынтегральная функция в (36) не имеет точек перевала. Поэтому воспользуемся интегральной теоремой Коши, согласно которой сумма интегралов по контурам $\gamma, \gamma_{\bar{z}}, \tilde{\gamma}, \gamma_1$ и γ_{∞} равна нулю (см. рис. 2).

В силу антиголоморфности подынтегральной функции и теоремы о вычетах интегралы по γ_1 и γ_{∞} равны нулю. Так как интеграл по $\gamma_{\bar{z}}$ вычисляется с помощью интегральной формулы Коши, то при \bar{z} , не лежащих на дуге $\cup \bar{z}_-, \bar{z}_+$ и таких, что $|\bar{z} - 1| \gtrsim |m|^{-3/8}$, $|\bar{z} - \bar{z}_{\pm}| \gtrsim |m|^{-1/2}$, многочлен $\Phi(\bar{z})$ представим в виде

$$\Phi(\bar{z}) = \Phi_-^{WKB}(\bar{z}) + N(\bar{z}), \quad (49)$$

где

$$N(\bar{z}) = -\frac{\bar{z}^{n-|m|}}{2\pi i} \oint_{\gamma_{+,-}} \frac{\Phi_-^{WKB}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u} - \bar{z})}. \quad (50)$$

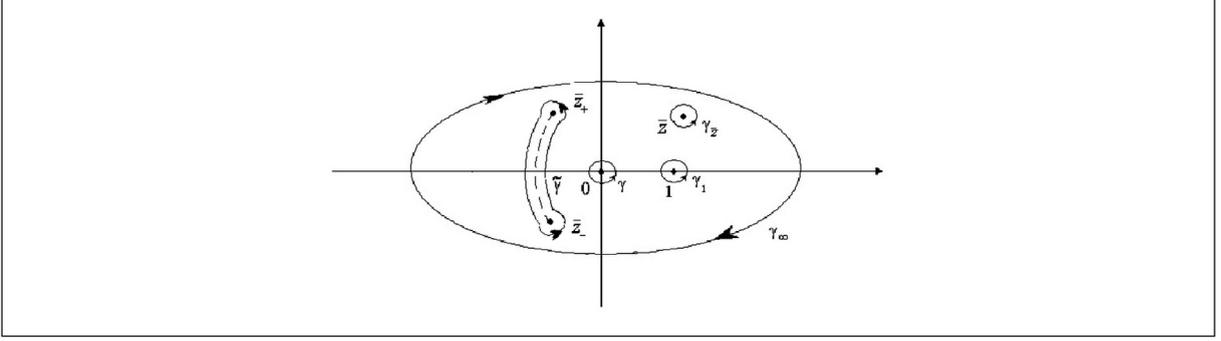


Рис. 2

Здесь замкнутый контур $\gamma_{+,-}$ является дугой окружности $\cup \bar{z}_-, \bar{z}_+$, проходимой дважды по берегам разреза, соединяющего точки \bar{z}_-, \bar{z}_+ . Он ориентирован против часовой стрелки. Формула, аналогичная (49), справедлива и вблизи точки $\bar{z} = 1$, но там вместо $\Phi_-^{WKB}(\bar{z})$ фигурирует $E(\bar{z})Y(\bar{z})$, где $Y(\bar{z})$ — разложение (47).

Оценим входящий в (50) интеграл. Имеем:

$$|N(\bar{z})| \leq \frac{|\bar{z}|^{n-|m|}}{2\pi} \oint_{\gamma_{+,-}} \frac{|\Phi_-^{WKB}(\bar{u})| |d\bar{u}|}{|\bar{u} - \bar{z}|}. \quad (51)$$

Так как $\cup \bar{z}_-, \bar{z}_+$ — линия Стокса, то на ней в силу (39)

$$|\Phi_-^{WKB}(\bar{u})| = \frac{|c_-| |\bar{u}^2 + 3\bar{u} + 1|^{\sqrt{a}|m|/2} (\sqrt{a-1})^{(\sqrt{a}-1)|m|} \vartheta(\bar{u})}{\sqrt[4]{|X(\bar{u})|}}.$$

Здесь $\vartheta(\bar{u})$ — непрерывная функция. Поскольку

$$\max_{\bar{u} \in \cup \bar{z}_-, \bar{z}_+} |\bar{u}^2 + 3\bar{u} + 1| = a$$

достигается при $\bar{u} = \bar{z}_\pm$, то наибольший вклад в асимптотику интеграла (51) вносят малые окрестности точек поворота \bar{z}_\pm . Учитывая [25], что

$$\int_0^\infty x^{-1/4} e^{-|m|x} dx = |m|^{-3/4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right),$$

получаем

Лемма 4. При $|m| \rightarrow \infty$, $\bar{z} \notin \cup \bar{z}_-, \bar{z}_+$ справедлива оценка

$$|N(\bar{z})| \leq T|m|^{-3/4} |c_-| (a^{\sqrt{a}}(a-1)^{(\sqrt{a}-1)|m|/2}) |\bar{z}|^{n-|m|} \times \left(\frac{1}{|\bar{z} - \bar{z}_+|} + \frac{1}{|\bar{z} - \bar{z}_-|} \right). \quad (52)$$

Здесь T — константа.

Далее воспользуемся тем, что на окружности $|\bar{z}| = 1$ функция

$$|\sqrt{X(\bar{z})} + \sqrt{a}(\bar{z} + 1)|^{\sqrt{a}} / |\sqrt{X(\bar{z})} + \bar{z} + 1|$$

достигает максимального значения при $\bar{z} = 1$. Следовательно, в силу (52) в окрестности точки $\bar{z} = 1$, которая дает основной вклад при вычислении средних, $N(\bar{z})$ экспоненциально мала по сравнению с $p(\bar{z}) = E(\bar{z})Y(\bar{z})$. Здесь $Y(\bar{z})$ — разложение (47). Отметим, что вблизи $\bar{z} = 1$ экспоненциально малыми будут и производные от $N(\bar{z})$ ограниченного при $|m| \rightarrow \infty$ порядка.

Покажем, что $N(\bar{z})$ мала по сравнению с $\Phi_-^{WKB}(\bar{z})$ и при $|\bar{z}| \gg |m|$. Оценка (52) при $|\bar{z}| \rightarrow \infty$ оказывается слишком грубой. Поэтому получим оценку $N(\bar{z})$, пригодную для такого случая.

В силу (50) при $|\bar{z}| \rightarrow \infty$

$$N(\bar{z}) \sim \frac{\bar{z}^{n-|m|-1}}{2\pi i} \oint_{\gamma_{+,-}} \frac{\Phi_-^{WKB}(\bar{u})}{\bar{u}^{n-|m|}} d\bar{u}. \quad (53)$$

Подынтегральная функция в (53) не имеет точек перевала. Для нахождения асимптотики интеграла выразим его через коэффициенты сходящегося вблизи нуля степенного ряда

$$\Phi_-^{WKB}(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \bar{z}^j \quad (54)$$

и далее применим дискретный метод ВКБ [26,27].

Из (48) вытекает, что функция $\Phi_-^{WKB}(\bar{z})$ удовлетворяет соотношению

$$\Phi_-^{WKB}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = (-1)^k \frac{\Phi_-^{WKB}(\bar{z})}{\bar{z}^{n-|m|-1}}.$$

Поэтому при $|\bar{z}| \rightarrow \infty$ имеет место разложение

$$\Phi_-^{WKB}(\bar{z}) = (-1)^k \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \bar{z}^{n-|m|-1-j},$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{+,-}} \frac{\Phi_-^{WKB}(\bar{u})}{\bar{u}^{n-|m|}} d\bar{u} = \beta_{n-|m|-1} - (-1)^k \beta_0. \quad (55)$$

В силу (29) коэффициенты β_j степенного ряда (54) удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$R\left(\frac{j}{|m|}\right)\beta_{j+1} + Q\left(\frac{j}{|m|}\right)\beta_j + P\left(\frac{j}{|m|}\right)\beta_{j-1} = 0.$$

Здесь

$$R(x) = x^2 + x + \frac{1}{|m|}(2x + 1) + O\left(\frac{1}{|m|^2}\right),$$

$$P(x) = (x - \sqrt{a})(x - \sqrt{a} + 1) + O\left(\frac{1}{|m|^2}\right),$$

$$Q(x) = 3x^2 - 3(\sqrt{a} - 1)x + \frac{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} - 5)}{4} +$$

$$+ \frac{1}{|m|} \left(3x - \frac{3(\sqrt{a}-1)}{2} + \sqrt{5-a} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right) + O\left(\frac{1}{|m|^2}\right).$$

Асимптотика β_j , $j = 0, \dots, n - |m| - 1$, при $|m| \rightarrow \infty$ находится с помощью дискретного метода ВКБ, формулы которого имеют весьма громоздкий вид, и поэтому здесь не приводятся (см. [26]). Отметим лишь, что эти формулы не применимы вблизи "точки поворота", где число $j_1 = j - (n - |m| - 1)/2$ равно нулю. Вблизи "точки поворота" асимптотика коэффициентов β_j выражается через функцию параболического цилиндра:

$$\beta_j \sim \tilde{c} \exp\left(-\frac{2\sqrt{a}j_1^2}{(a-1)|m|}\right) D_k\left(\frac{2\sqrt[4]{5-a}}{\sqrt{a-1}} \frac{j_1}{\sqrt{|m|}}\right).$$

Здесь \tilde{c} — константа. Формулы дискретного метода ВКБ не работают также вблизи граничных значений $j = 0$ и $j = n - |m| - 1$. Там коэффициенты β_j представимы в виде произведений.

В результате согласования асимптотик β_j получаем

Лемма 5. *Имеет место формула связи коэффициентов*

$$\beta_{n-|m|-1} = (-1)^k \beta_0 (1 + O(|m|^{-1/5})), \quad |m| \rightarrow \infty. \quad (56)$$

Так как при $|\bar{z}| \gg |m|$

$$\Phi_-^{WKB}(\bar{z}) \sim (-1)^k \beta_0 \bar{z}^{n-|m|-1},$$

где коэффициент

$$\beta_0 = \frac{c_- (-1)^k (\sqrt{a} + 1)^{\sqrt{a}|m|}}{(2 + \sqrt{5-a})^{k+1/2} 2^{|m|}},$$

то из равенств (53), (55), (56) вытекает малость $N(\bar{z})$ по сравнению с $\Phi_-^{WKB}(\bar{z})$ и при $|\bar{z}| \gg |m|$.

8. Итоговые теоремы. Формулы для квантовых средних

Пусть многочлен $\Phi(\bar{z})$ задан формулой (36), где функция $p(\bar{u})$ — асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи. Вычислим асимптотику нормы $\Phi(\bar{z})$ в пространстве $\mathcal{P}[m, n]$.

Предварительно найдем асимптотику $\varrho(r)$ при $|m| \rightarrow \infty$. Она получается в результате применения метода Лапласа к интегральному представлению для гипергеометрического ряда [19], через который выражается $\varrho(r)$. Функция $\varrho(r)$ удовлетворяет задаче (17), (18), а искомая асимптотика совпадает с ВКБ-приближением $\varrho^{WKB}(r)$ для решения этой задачи. Отметим, что при $a > 1$ и $r \geq 0$ точки поворота у уравнения (17) отсутствуют. Справедлива

Лемма 6. *Пусть выполнены условия (26), (27). Тогда при $r \ll |m|$ имеет место равенство*

$$\varrho(r) = \varrho^{WKB}(r) \left(1 + O\left(\frac{1}{|m|}\right) + O\left(\frac{r}{|m|}\right) \right),$$

где

$$\varrho^{WKB}(r) = \frac{c^* (\sqrt{X_1(r)} + r + 1)^{|m|}}{\sqrt[4]{X_1(r)} (\sqrt{X_1(r)} + \sqrt{a}(r + 1))^{n+1/2}}, \quad (57)$$

$$X_1(r) = r^2 + (4a - 2)r + 1,$$

a константа

$$c^* = \frac{|m| \sqrt{1 + \sqrt{a}} \sqrt{a} (\sqrt{a} - 1)}{2\pi} \left(\frac{(1 + \sqrt{a})^{\sqrt{a}}}{2} \right)^{|m|}.$$

Кроме того, при $r \gg |m|$ справедлива асимптотика

$$\varrho(r) = \frac{n(n - |m|)}{2\pi|m|} r^{-n+|m|-1} (1 + O(\frac{|m|}{r})).$$

Запишем ВКБ-приближения (48),(57) в виде

$$\Phi_-^{WKB}(\bar{z}) = c_- t(\bar{z}) e^{m|S(\bar{z})}, \quad \varrho^{WKB}(|z|^2) = c^* t_1(|z|^2) e^{m|S_1(|z|^2)}. \quad (58)$$

Если подставить функции (58) в формулу (16) для скалярного произведения, то получим интеграл

$$\|\Phi_-^{WKB}\|_{\mathcal{P}[m,n]}^2 = \int_{\mathbb{C}} |c_-|^2 |c^*|^2 |t(\bar{z})|^2 |t_1(|z|^2)|^2 e^{m|\Omega(\bar{z},z)|} d\bar{z} dz, \quad (59)$$

где $\Omega(\bar{z}, z) = S(\bar{z}) + S(z) + S_1(|z|^2)$. Так как функция $\Omega(\bar{z}, z)$ достигает глобального максимума при $\bar{z} = z = 1$, то интеграл (59) будет приближенно равен интегралу по малой окрестности этой точки.

Далее разложим заданную формулой (39) функцию $E(\bar{z})$ вблизи $\bar{z} = 1$. Подставим в (16) произведение этого разложения на (47), а также разложение $\varrho^{WKB}(r)$ вблизи $r = 1$. Кроме того учтем, что $N(\bar{z})$ дает экспоненциально малый вклад в норму. В результате получаем, что если входящая в (47) константа

$$\alpha_1 = \frac{2^{k/2+1/4} \sqrt{\pi} \sqrt[4]{5-a}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}+1} \sqrt[4]{\sqrt{a}-1}} \left(\frac{(4\sqrt{a})^{\sqrt{a}}}{5^{\sqrt{a}} (\sqrt{a}+1)^{\sqrt{a}+1}} \right)^{|m|/2} (\Sigma_0(a))^{-1/2} (1 + O(\frac{1}{|m|})), \quad (60)$$

где

$$\Sigma_j(a) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(1-\sqrt{(5-a)/(4a)})t^2 - (\sqrt{4a/(5-a)}-1)r^2} \sigma_j(t, r) |H_k(t + ir)|^2 dt dr, \quad (61)$$

а $\sigma_0 = 1$, то условие $\|\Phi(\bar{z})\|_{\mathcal{P}[m,n]} = 1 + O(|m|^{-1})$, $|m| \rightarrow \infty$, будет выполнено. Таким образом, найден входящий в p множитель α_1 , что завершает построение $\Phi(\bar{z})$. Справедлива

Теорема 1. Пусть число

$$\tilde{\xi}_k = a + 1 + \frac{4}{|m|} \sqrt{5-a} (k + \frac{1}{2}) + O(\frac{1}{|m|^2}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (62)$$

а многочлен $\Phi_k(\bar{z})$ определен формулой (36), где $p(\bar{u})$ – решение многоточечной спектральной задачи, такое, что α_1 имеет вид (60). Тогда при $n = \sqrt{a}|m|$, где $1 < a < 5$, $\tilde{\xi}_k$ и $\Phi_k(\bar{z})$ являются асимптотическим собственным значением и асимптотической собственной функцией задачи (29), (25) при $|m| \rightarrow \infty$ в пространстве $\mathcal{P}[m, n]$. Более точно, если ξ_k имеет вид (62), то многочлен $\Phi_k(\bar{z})$ удовлетворяет уравнению (29) с точностью $O(|m|^{-2})$ с оценкой невязки в норме $\mathcal{P}[m, n]$, а также условию нормировки (25) с точностью $O(|m|^{-1})$.

Вычисление квантовых средних производится аналогично вычислению нормы. Основной вклад в асимптотику интегралов также вносит малая окрестность точки $\bar{z} = z = 1$. Рассмотрим многочлен $F(b_0, b_1, b_2, b_3)$, такой, что $F(0, 0, (a-1)/4, (a+1)/4) \neq 0$, и положим в формулах (23) малый параметр $\hbar = 1/|m|$. Поскольку для асимптотических собственных функций имеют место равенства

$$\begin{aligned} (\overset{0}{B}_0 \Phi_k, \Phi_k)_{\mathcal{P}[m,n]} &= O(|m|^{-1}), \quad (\overset{0}{B}_1 \Phi_k, \Phi_k)_{\mathcal{P}[m,n]} = O(|m|^{-1}), \\ (\overset{0}{B}_2 \Phi_k, \Phi_k)_{\mathcal{P}[m,n]} &= \frac{a-1}{4} + O(|m|^{-1}), \quad (\overset{0}{B}_3 \Phi_k, \Phi_k)_{\mathcal{P}[m,n]} = \frac{a+1}{4} + O(|m|^{-1}), \end{aligned}$$

то с точностью $O(|m|^{-1})$ формула для средних принимает вид

$$\begin{aligned} (F(\overset{0}{B}_0, \overset{0}{B}_1, \overset{0}{B}_2, \overset{0}{B}_3) \Phi_k, \Phi_k)_{\mathcal{P}[m,n]} &= \\ = F(0, 0, \frac{a-1}{4}, \frac{a+1}{4}) + O(|m|^{-1}), \quad |m| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (63)$$

Отметим, что если в (23) положить $\hbar = 1/n$ и сделать замену $c^2 = 1/a$, то из (63) вытекает формула

$$\begin{aligned} (F(\overset{0}{B}_0, \overset{0}{B}_1, \overset{0}{B}_2, \overset{0}{B}_3) \Phi_k, \Phi_k)_{\mathcal{P}[m,n]} &= \\ = F(0, 0, \frac{1-c^2}{4}, \frac{1+c^2}{4}) + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (64)$$

Таким образом, справедлива асимптотика (28).

Нетривиальные поправки в формуле для средних возникают в членах порядка $|m|^{-1}$. Для вывода этих поправок используется следующий член в разложении (47). Имеет место

Теорема 2. Пусть $F(\overset{0}{B}_0, \overset{0}{B}_1, \overset{0}{B}_2, \overset{0}{B}_3)$ — оператор, где $F(b_0, b_1, b_2, b_3)$ — многочлен, такой, что $F(0, 0, (a-1)/4, (a+1)/4) \neq 0$, а операторы $\overset{0}{B}_0, \overset{0}{B}_1, \overset{0}{B}_2, \overset{0}{B}_3$ упорядочены по Вейлю. Тогда формула для квантовых средних с точностью $O(|m|^{-3/2})$ при $|m| \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} (F(\overset{0}{B}_0, \overset{0}{B}_1, \overset{0}{B}_2, \overset{0}{B}_3) \Phi_k, \Phi_k) &= F + \frac{\partial F}{\partial b_0} (\overset{0}{B}_0 \Phi_k, \Phi_k) + \frac{\partial F}{\partial b_1} (\overset{0}{B}_1 \Phi_k, \Phi_k) + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial b_2} [(\overset{0}{B}_2 \Phi_k, \Phi_k) - \frac{a-1}{4}] + \frac{\partial F}{\partial b_3} [(\overset{0}{B}_3 \Phi_k, \Phi_k) - \frac{a+1}{4}] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial b_0^2} ((\overset{0}{B}_0)^2 \Phi_k, \Phi_k) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial b_1^2} ((\overset{0}{B}_1)^2 \Phi_k, \Phi_k) + \frac{\partial^2 F}{\partial b_0 \partial b_1} (\frac{\overset{0}{B}_0 \overset{0}{B}_1 + \overset{0}{B}_1 \overset{0}{B}_0}{2} \Phi_k, \Phi_k) + \\ &+ O(|m|^{-3/2}). \end{aligned} \quad (65)$$

Здесь

$$\begin{aligned} (\overset{0}{B}_0 \Phi_k, \Phi_k) &= -\frac{\sqrt{5-a} \Sigma_1(a)}{|m| \sqrt{a} \Sigma_0(a)} + O(|m|^{-3/2}), \\ (\overset{0}{B}_1 \Phi_k, \Phi_k) &= \frac{i\sqrt{a}}{|m|} \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{5-a}} \right) \frac{\Sigma_1(a)}{\Sigma_0(a)} + O(|m|^{-3/2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
({}^0B_2\Phi_k, \Phi_k) &= \frac{a-1}{4} + \frac{1}{|m|} \left[\frac{3\sqrt{a}}{10} - \frac{\sqrt{5-a}}{5} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3(a-1)}{|m|4\sqrt{5-a}} \frac{\Sigma_2(a)}{\Sigma_0(a)} + \\
&\quad + O(|m|^{-3/2}), \\
({}^0B_3\Phi_k, \Phi_k) &= \frac{a+1}{4} + \frac{1}{5|m|} [\sqrt{a} + \sqrt{5-a} \left(k + \frac{1}{2} \right)] - \frac{a-1}{|m|2\sqrt{5-a}} \frac{\Sigma_2(a)}{\Sigma_0(a)} + \\
&\quad + O(|m|^{-3/2}), \\
(({}^0B_0)^2\Phi_k, \Phi_k) &= -\frac{4}{5|m|} [\sqrt{a} + \sqrt{5-a} \left(k + \frac{1}{2} \right)] + \frac{2(a-1)}{|m|\sqrt{5-a}} \frac{\Sigma_2(a)}{\Sigma_0(a)} + O(|m|^{-3/2}), \\
(({}^0B_1)^2\Phi_k, \Phi_k) &= \frac{\sqrt{a}\sqrt{5-a}}{20|m|} [\sqrt{5-a} + 4\sqrt{a} \left(k + \frac{1}{2} \right)] - \frac{(a-1)\sqrt{5-a}}{8|m|} \frac{\Sigma_2(a)}{\Sigma_0(a)} + \\
&\quad + O(|m|^{-3/2}), \\
\left(\frac{{}^0B_0{}^0B_1 + {}^0B_1{}^0B_0}{2} \Phi_k, \Phi_k \right) &= \frac{i}{20|m|} [3a + 5 + 8\sqrt{a}\sqrt{5-a} \left(k + \frac{1}{2} \right)] - \frac{i(a-1)}{2|m|} \frac{\Sigma_3(a)}{\Sigma_0(a)} + \\
&\quad + O(|m|^{-3/2}),
\end{aligned}$$

a функции $\Sigma_j(a)$, $j = 1, 2, 3$, заданы формулой (61), где

$$\sigma_1 = t^2, \quad \sigma_2 = t^2 + r^2, \quad \sigma_3 = \frac{\sqrt{5-a}}{2\sqrt{a}} t^2 + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{5-a}} r^2.$$

В формуле (65) значения функции F и ее производных вычисляются в точке $(0, 0, (a-1)/4, (a+1)/4)$, а скалярное произведение берется в пространстве $\mathcal{P}[m, n]$.

Применим формулу (64) для нахождения асимптотики серии собственных значений оператора (1), расположенных вблизи нижних границ спектральных кластеров, образующихся вокруг собственных значений невозмущенного оператора. В силу унитарности преобразования (22) числа η_k из (10) можно вычислить по формуле

$$\eta_k = (g_{00}(\mathbf{B})\Phi_k, \Phi_k)_{\mathcal{P}[m, n]},$$

где оператор $g_{00}(\mathbf{B})$ задан (15). Имеем:

$$\begin{aligned}
\eta_k &= -\frac{1}{3} \left[4 \left\{ 108 \left(\frac{1-c^2}{4} \right)^2 + 239 \left(\frac{1+c^2}{4} \right)^2 - 308 \left(\frac{1-c^2}{4} \right) \left(\frac{1+c^2}{4} \right) \right\} + \right. \\
&\quad \left. + 4(-66 + 100c^2) \frac{1-c^2}{4} + 4(65 - 130c^2) \frac{1+c^2}{4} - 127c^2 + 72c^4 \right] + O(n^{-1}) = \\
&= -\frac{1}{3} \left[\frac{35}{4} + \frac{79}{2}c^2 + \frac{23}{4}c^4 \right] + O(n^{-1}) = -\frac{1}{12n^4} [35n^4 + 158m^2n^2 + 23m^4] + \\
&\quad + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Далее, в силу (31), (62)

$$\xi_k = c^2 \left[\frac{1}{c^2} + 1 + \frac{4}{|m|} \sqrt{5 - \frac{1}{c^2}} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] + O(n^{-2}) =$$

$$= \frac{n^2 + m^2}{n^2} + \frac{4}{n^2} \sqrt{5m^2 - n^2} \left(k + \frac{1}{2}\right) + O(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (66)$$

и, следовательно,

$$2\eta_k + 5\xi_k^2 = -\frac{1}{6n^4} (5n^4 + 98n^2m^2 - 7m^4) + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (67)$$

Остается подставить разложения (66),(67) в формулу (11), а также прибавить к спектру слагаемое εt , вызванное наличием в (1) магнитного поля порядка ε . В результате получаем

Теорема 3. Пусть $1 \ll n \lesssim \varepsilon^{-7/2}$ и $5^{-1/2}n < |m| < n$. Тогда вблизи нижних границ спектральных кластеров имеется серия собственных значений оператора (1) со следующей асимптотикой

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k = & -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon t + \frac{1}{2} \varepsilon^2 n^2 (n^2 + m^2) + \varepsilon^2 n^2 (2k + 1) \sqrt{5m^2 - n^2} - \\ & - \frac{1}{24} \varepsilon^4 n^6 (5n^4 + 98m^2 n^2 - 7m^4) + O(n^{-9/2}), \quad n \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (68)$$

Отметим, что серия (68) совпадает с серией, найденной в работе [9]. Соответствующие асимптотические собственные функции получаются из многочленов Φ_k , заданных формулой (36), применением когерентного преобразования \mathfrak{H} и деусредняющего преобразования \mathbf{U} (см. (22),(12)).

Литература

1. Friedrich H., Wintgen D. The hydrogen atom in a uniform magnetic field — an example of chaos // Phys. reports, 1989, **183** (2), 39-79.
2. Лисица В. С. Новое в эффектах Штарка и Зеемана для атома водорода // УФН, 1987, **153** (3), 379-421.
3. Avron J. E., Herbst I. W., Simon B., Schrodinger operators with magnetic fields. III. Atoms in homogeneous magnetic field // Comm. Math. Phys., 1981, **79** (4), 529-572.
4. Соловьев Е. А. Атом водорода в слабом магнитном поле // ЖЭТФ, 1982, **82** (6), 1762-1771.
5. Herrick D. R. Symmetry of the quadratic Zeeman effect for hydrogen // Phys. Rev. A, 1982, **26** (1), 323-329.
6. Delande D., Gay J. C. Group theory applied to the hydrogen atom in a strong magnetic field. Derivation of the effective diamagnetic Hamiltonian // J. Phys. B: At. Mol. Phys., 1984, **17**, L335-L340.
7. Belov V. V., Volkova J. L. Investigation of the Zeeman effect in quasiclassical trajectory-coherent approximation // Preprint №35, Tomsk Scientific Centre, Siberian Division, AS USSR, 1991, 29 стр.
8. Belov V. V., Olive V. M., Volkova J. L. The Zeeman effect for the 'anisotropic hydrogen atom' in the complex WKB approximation: I. Quantization of closed orbits for the Pauli operator with spin-orbit interaction // J. Phys. A: Math. Gen., 1995, **28**, 5799-5810.
9. Карасев М. В., Новикова Е. М. Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле // ТМФ, 1996, **108** (3), 339-387.
10. Karasev M. V. Birkhoff resonances and quantum ray method // Proc. Intern. Seminar "Days of Diffraction - 2004", St. Petersburg and Steklov Math. Institute, St. Petersburg, 2004, 114-126.
11. Karasev M. V. Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances. I. // In book: Karasev M. (ed.), Quantum Algebras and Poisson Geometry in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, Providence, RI, 2005, 216, 1-18. (arXiv: math/0412542); II. // Adv. Stud. Contemp. Math., 2005, **11** (1), 33-56. (arXiv: math/0412542); III. // Russ. J. Math. Phys., 2006, **13** (2), 131-150.
12. Перескоков А.В. Асимптотика вблизи границ спектральных кластеров // Международная конференция, посвященная памяти И. Г. Петровского (23-е совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тезисы докладов, Изд-во МГУ, М., 2011, 260-261.

13. *Перескоков А.В.* Асимптотика спектра и квантовых средних вблизи границ спектральных кластеров для возмущенного двумерного осциллятора // Матем. заметки, 2012, **92** (4), 583-596.
14. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в дифракции коротких волн. Метод эталонных задач // Наука, М., 1972, 456 стр.
15. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях // Наука, М., 1977, 384 стр.
16. *Карасев М. В., Маслов В. П.* Асимптотическое и геометрическое квантование // УМН, 1984, **39** (6), 115-173.
17. *Weinstein A.* Asymptotics of the eigenvalues clusters for the laplasian plus a potential // Duke Math. J., 1977, **44** (4), 883-892.
18. *Karasev M. V., Novikova E. M.* Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding // In book: Karasev M. (ed.), Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, Providence, RI, 1998, 187, 1-202.
19. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции // Наука, М., Т. 1, 1973, 296 стр., Т. 2, 1974, 296 стр.
20. *Переломов А.М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения // Наука, М., 1987, 272 стр.
21. *Голубев В В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений // Гостехиздат, М., Л., 1950, 436 стр.
22. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Наука, М., 1983, 352 стр.
23. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного // Наука, М., 1987, 688 стр.
24. *Абрамовиц М., Стиган И.* (ред.) Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами // Наука, М., 1979, 832 стр.
25. *Федорюк М.В.* Асимптотика: интегралы и ряды // Наука, М., 1987, 544 стр.
26. *Браун П.А.* Метод ВКБ для трехчленных рекуррентных соотношений и квазиэнергии ангармонического осциллятора // ТМФ, 1978, **37** (3), 355-370.
27. *Васильева А.Б.* О соответствии между некоторыми свойствами решений линейных разностных систем и обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, 1967, 5, 21-44.

ON ASYMPTOTICS OF THE SPECTRUM OF HYDROGEN ATOM IN A MAGNETIC FIELD NEAR THE BOUNDARIES OF SPECTRAL CLUSTERS

Pereskokov A.V.

MPEI, MIEM & HSE

pereskokov62@mail.ru

Received 01.10.2012

The problem of Zeeman effect up to the second order terms with respect to the magnetic field is considered by using the irreducible representations of an algebra with Karasev-Novikova quadratic commutation relations. Each representation of this algebra is associated with a spectral cluster around the energy level of the unperturbed hydrogen atom. An example of this model is used to illustrate a general method for constructing asymptotic solutions near the boundaries of the spectral clusters by using a new integral representation. The problem of calculating the quantum averages near the lower boundaries of the clusters is studied.