

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИХРЕВЫХ СОСТОЯНИЙ В МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

А.С. Мельников, Д.А. Рыжов, М.А. Силаев, И.А. Шерешевский

Институт физики микроструктур РАН
melnikov@ipm.sci-nnov.ru

Поступила 30.12.2009

Обзор посвящен современной теории вихревых фаз в мезоскопических сверхпроводниках и математическим методам, используемым в этой области физики сверхпроводников. Обзор состоит из двух частей: первая часть посвящена методам и результатам феноменологической теории Гинзбурга–Ландау, а вторая содержит описание результатов и подходов микроскопической теории. Таким образом, первая часть дает представление об основных особенностях поведения параметра порядка, описывающего свойства конденсата куперовских пар, а также токов и полей в вихревых конфигурациях, специфичных для мезоскопических сверхпроводников, а во второй части обсуждается влияние неоднородности параметра порядка в вихревом состоянии на квантовую механику одночастичных возбуждений (электронов и дырок). Обсуждаются основные особенности электронной структуры вихревых состояний в малых образцах: квантовомеханическое туннелирование электронов и дырок между соседними вихрями, специфика андреевского отражения в корах вихрей и влияние обычного рассеяния электронов на границах. Приведен теоретический анализ электронно–дырочных спектров различных вихревых систем с учетом упомянутых эффектов, а также обсуждение связанных с ними особенностей теплопроводности и локальной плотности состояний (измеряемой сканирующим туннельным микроскопом).

УДК 538.9

1. Введение

С термином “сверхпроводимость” прежде всего связывается полное исчезновение сопротивления при достаточно низких температурах. Другим столь же важным для приложений фундаментальным свойством сверхпроводящих материалов является эффект идеального диамагнетизма, заключающийся в выталкивании магнитного поля из сверхпроводящего образца (эффект Мейсснера). Именно это явление ответственно за широко известный эффект левитации сверхпроводника в поле магнита. Однако полное выталкивание магнитного поля имеет место лишь при достаточно слабых полях, меньших некоторого критического значения, которое зависит от температуры и конкретного материала. При дальнейшем увеличении магнитного поля сверхпроводящее состояние становится сильно неоднородным: появляются области с подавленной концентрацией сверхпроводящих носителей тока. Для широкого класса материалов, которые называ-

ются сверхпроводниками второго рода, эти области имеют форму цилиндров с радиусом порядка характерного масштаба изменения плотности сверхпроводящих электронов (от нескольких десятков до тысяч ангстрем). Вокруг таких цилиндров текут сверхпроводящие токи, и в результате с каждым из этих объектов связан поток магнитного поля. Замечательным образом этот поток определяется лишь фундаментальными константами: $\phi_0 = \pi\hbar c/|e|$. Такие трубки магнитного потока получили название вихрей Абрикосова [1]. Распределение вихрей в образце, их статические и динамические свойства определяют целый ряд важных характеристик сверхпроводника: так, например, именно динамика вихревых линий определяет сопротивление образца в присутствии магнитного поля.

Расположение вихрей в образце определяется их взаимодействием как между собой, так и с дефектами и границами образца. В идеальном макроскопическом сверхпроводнике II рода вихри отталкиваются и образуют правильную треугольную решетку. Вблизи границ образца решетка может оказаться существенно искаженной в результате взаимодействия вихрей с краевыми экранирующими токами, индуцированными приложенным магнитным полем. Очевидно, что наиболее сильными такие искажения окажутся в достаточно малых образцах. Критерием малости образца является отношение его геометрических размеров L к характерным длинам в сверхпроводнике (лондоновская глубина проникновения λ и сверхпроводящая длина когерентности ξ). В литературе к сверхпроводникам таких малых размеров обычно применяется термин "мезоскопические сверхпроводники". В сверхпроводниках II рода, как известно, отношение $\kappa = \lambda/\xi \geq 1/\sqrt{2}$. В случае существенной разницы между λ и ξ при уменьшении размера образца нетривиальные эффекты в структуре вихревой системы начинают проявляться уже при $L \lesssim \lambda$: вихревая структура существенно отклоняется от треугольной решетки, силы, действующие со стороны краевых токов, сжимают вихревую систему. Расстояния между отдельными вихрями становятся при этом меньше характерных расстояний в массивном образце. Такое сжатие вихревой системы оказывается особенно существенным когда размер образца становится порядка нескольких длин когерентности. Расстояние между отдельными вихревыми линиями в этом случае может обратиться в нуль и в результате сформируются так называемые многоквантовые (или гигантские) вихри. В массивных образцах многоквантовые вихри являются неустойчивыми, тем самым, мезоскопические системы предоставляют уникальную возможность реализовать такие объекты экспериментально.

Необычные свойства вихревой фазы малых образцов привлекали интерес как теоретиков, так и экспериментаторов довольно давно: первые работы на эту тему относятся к 60-м годам XX века [2, 3, 4, 5, 6]. Однако, только современное развитие технологии и измерительной техники сделало возможным детальное экспериментальное исследование систем такого типа, что в свою очередь стимулировало и теоретические работы по изучению свойств вихрей в мезоскопических сверхпроводниках. В результате за последнее десятилетие в теоретическом понимании особенностей такой вихревой фазы был достигнут значительный прогресс: построено описание разнообразных фазовых переходов в системе вихрей, рассчитаны вихревые конфигурации как при низких, так и при высоких магнитных полях, исследовано влияние геометрии образца на симметрию вихревых конфигураций и обнаружен новый тип смешанного состояния из вихрей и антивихрей, развита теория электронной структуры вихревых фаз и квантового транспорта в таких системах. Нам представляется, что математические подходы и опыт, накопленный при решении теоретических задач в такой модельной системе, интересны как сами по себе, так и для возможных приложений в смежных областях (например, сверхтекучести, физики ультрахолодных газов в ловушках). Кроме того, выяснение физических свойств простых вихревых систем бывает важным для понимания поведения и структур в массивных образцах. Исследование вихревой фазы активно используется в экспериментах, направленных на идентификацию типа сверхпроводящего спарива-

ния в различных соединениях. С этой точки зрения знание возможных нетривиальных особенностей структур вихрей, имеющих место даже при стандартном s -типе спаривания, представляется очень важным при интерпретации экспериментальных данных, полученных для сверхпроводящих соединений новых типов. Таким образом, написание обзора, посвященного современной теории вихревых фаз в мезоскопических сверхпроводниках и математическим методам, используемым в этой области, представляется нам вполне своевременным.

Обзор состоит, по сути, из двух частей: часть 2 посвящена методам и результатам феноменологической теории Гинзбурга–Ландау (ГЛ)¹, а часть 3 содержит описание результатов и подходов микроскопической теории.

Таким образом, часть 2 дает представление об основных особенностях поведения параметра порядка, описывающего свойства конденсата куперовских пар, токов и полей в необычных вихревых конфигурациях, а в части 3 мы обсуждаем влияние неоднородности распределений плотности сверхпроводящих электронов и сверхпроводящих токов в вихревом состоянии на квантовую механику одночастичных возбуждений (электронов и дырок). Интерес к последней проблеме вызван, в частности, тем обстоятельством, что экспериментальное определение характеристик спектра электронов и дырок (выполненное, например, с помощью измерений теплопроводности или данных сканирующей туннельной микроскопии) в ряде случаев дает возможность получить информацию о возможном типе сверхпроводящего спаривания [8, 9].

Специфика квантовой механики электронов и дырок в сверхпроводниках заключается в появлении нового типа рассеяния (андреевского отражения [10]) на границе раздела сверхпроводящей и нормальной фаз. При андреевском отражении электрон, падающий на границу со стороны нормальной фазы, превращается в дырку, движущуюся в противоположном направлении. Этот механизм рассеяния приводит, в частности, к локализации электронов и дырок с достаточно низкими энергиями в центре вихрей. Для изолированной вихревой линии соответствующий спектр был рассчитан в 1964 г. в пионерской работе [11] Кароли-де Жена-Матрикона. Для достаточно плотной вихревой решетки или в вихревой системе, сжатой за счет экранирующих сверхпроводящих токов в малом образце, приближение изолированных вихревых линий может нарушаться. Становится важным, в частности, эффект квантовомеханического туннелирования электронов и дырок между соседними вихревыми линиями [12]. В образцах малых размеров спектр, кроме того, подвержен сильному влиянию обычного рассеяния электронов на границах [13]. Значительная часть раздела 3 посвящена теоретическому анализу электронно–дырочных спектров различных вихревых систем с учетом упомянутых эффектов, а также обсуждению связанных с ними особенностей теплопроводности и локальной плотности состояний (измеряемой сканирующим туннельным микроскопом). Раздел 4 представляет собой заключительную часть, в которой мы постарались подвести некоторые итоги и еще раз кратко перечислить основные теоретические результаты и предложения к эксперименту.

¹Необходимо отметить, что уравнениям Гинзбурга–Ландау посвящена обширная математическая литература, содержащая большое количество элегантных методов исследования и строгих результатов о структуре решений этих уравнений в различных ситуациях. Мы почти не касаемся в нашем обзоре вопросов, связанных с этими результатами, по двум причинам. Во-первых, значительная часть таких результатов, особенно относящихся к асимптотической теории при больших значениях параметра ГЛ, отражена в хороших обзорах и монографиях (см., например [7] и цитируемую там литературу), пересказывать которые вряд ли имеет смысл. Во-вторых, с точки зрения физики, эти работы не содержат значительных новых результатов, а лишь приводят строгие постановки и решения задач, которые были ранее приближенно решены физиками в тех или иных упрощающих предположениях. Мы, однако, приводим, для иллюстрации, математические результаты, касающиеся устойчивости многоквантовых вихрей и классификации решений при критическом значении параметра ГЛ.

2. Вихревые состояния в феноменологической теории Гинзбурга-Ландау

2.1. Стационарная теория Гинзбурга-Ландау

Для описания неоднородных сверхпроводящих состояний уже несколько десятилетий с успехом используется феноменологическая теория Гинзбурга-Ландау (ГЛ) [14, 15, 16, 17]. Строго говоря, эта теория применима лишь в окрестности сверхпроводящего перехода, но большинство результатов, полученных с её помощью, качественно справедливы и в более широком интервале температур вплоть до температуры $T = 0$. Основная идея теории ГЛ базируется на более общей теории фазовых переходов Ландау [18]: при фазовом переходе появляется параметр порядка, обладающий определенной симметрией, присущей новой фазе и отсутствующей вне этой фазы. Для сверхпроводимости параметром порядка является комплексная волновая функция конденсата куперовских пар Ψ . В присутствии магнитного поля \mathbf{B} мы можем записать свободную энергию сверхпроводника в виде следующего функционала, зависящего от Ψ и векторного потенциала \mathbf{A} :

$$F = \int \left\{ a |\Psi|^2 + \frac{b}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{4m^*} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right\} dV . \quad (1)$$

Здесь свободная энергия отсчитывается от энергии нормального состояния. Поскольку теория строится вблизи окрестности критической температуры фазового перехода T_c , достаточно учесть температурную зависимость лишь коэффициента при квадратичном слагаемом: $a(T) = \alpha(T - T_c)$ (при этом $\alpha > 0$, что соответствует появлению сверхпроводимости при $T < T_c$). Коэффициенты b и m^* предполагаются не зависящими от температуры, при этом для положительной определенности функционала необходимо потребовать, чтобы оба коэффициента были положительными.

Стационарные состояния сверхпроводника в магнитном поле, согласно теории ГЛ, являются локальными минимумами свободной энергии.

Варьируя функционал свободной энергии по Ψ^* , получим для вариации функционала выражение:

$$\begin{aligned} \delta F = \int_V \left[a\Psi + b|\Psi|^2\Psi - \frac{\hbar^2}{4m^*} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi \right] \delta\Psi^* dV \\ + \oint_{\Gamma} \left[\mathbf{n} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Psi \right] \delta\Psi^* dS , \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathbf{n} - это внешняя нормаль к поверхности сверхпроводника Γ . Приравнявая нулю выражение в квадратных скобках в первом слагаемом мы получаем уравнение Гинзбурга-Ландау:

$$a\Psi + b|\Psi|^2\Psi - \frac{\hbar^2}{4m^*} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi = 0. \quad (3)$$

Равенство нулю второго слагаемого в выражении (2) дает граничное условие для параметра порядка:

$$\mathbf{n} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Psi = 0 , \quad (4)$$

которое оказывается справедливым для границы сверхпроводник/изолятор. Для границы сверхпроводника с нормальным металлом используются граничные условия более общего вида [19]:

$$\mathbf{n} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Psi = \frac{\Psi}{\beta} . \quad (5)$$

Для контакта с хорошо проводящим нормальным металлом и высокой прозрачности

границы раздела параметр $\beta \rightarrow 0$, что приводит к условию $\Psi = 0$ на границе сверхпроводника.

Варьируя функционал по векторному потенциалу мы получим стационарное уравнение Максвелла для магнитного поля:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s ,$$

где плотность сверхпроводящего тока имеет вид:

$$\mathbf{j}_s = \frac{e\hbar}{m^*} \text{Im} \left\{ \Psi^* \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Psi \right\} . \quad (6)$$

2.2. Нестационарная теория Гинзбурга-Ландау

Для описания динамических процессов, происходящих в сверхпроводнике, например, при протекании внешнего тока или изменении внешнего магнитного поля, в ряде случаев можно использовать простейшую релаксационную модель, предполагающую, что производная по времени от параметра порядка пропорциональна вариационной производной функционала свободной энергии [20, 21, 22, 23]:

$$\eta \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\Phi \right) \Psi = - \frac{\delta F}{\delta \Psi^*} . \quad (7)$$

Здесь η — релаксационный параметр, а производная по времени входит в уравнение вместе с электрохимическим потенциалом Φ . Строго говоря, такой подход справедлив для описания динамики бесщелевых сверхпроводников, однако, в целом ряде случаев результаты нестационарной теории ГЛ оказываются качественно верны и для более широкого класса материалов. Обсуждение более сложных вариантов нестационарной теории ГЛ можно найти, например, в [24, 25].

Отметим известную неоднозначность волновых функций в электромагнитном поле, связанную с неоднозначностью определения потенциалов поля [26]. Потенциалы поля могут быть изменены калибровочным преобразованием с помощью произвольной скалярной функции $\chi(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} . \quad (8)$$

При этом напряженность поля \mathbf{E} и магнитная индукция \mathbf{B} , определяемые через потенциалы, соответственно, как

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (9)$$

не изменятся. Произвольность выбора скалярной функции χ позволяет наложить одно условие на потенциалы электромагнитного поля (выбрать калибровку). Но при этом необходимо учитывать, что осуществив калибровочное преобразование (8), необходимо преобразовать и функцию Ψ :

$$\Psi' = \Psi \exp \left(\frac{2ie}{\hbar c} \chi \right) . \quad (10)$$

В этом случае ни функционал (1), ни уравнение (7) не изменятся, что отражает *калибровочную инвариантность* теории ГЛ.

При описании динамических процессов необходимо учитывать, что в сверхпроводнике может течь и нормальный ток с плотностью

$$\mathbf{j}_n = \sigma_n \mathbf{E} = -\sigma_n \left(\nabla \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) , \quad (11)$$

где σ_n — проводимость нормальных электронов.

В результате мы получаем замкнутую систему уравнений нестационарной теории ГЛ, состоящую из уравнения для параметра порядка

$$-\eta \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\Phi \right) \Psi = a\Psi + b|\Psi|^2\Psi - \frac{\hbar^2}{4m^*} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi \quad (12)$$

и уравнения для магнитного поля

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s) . \quad (13)$$

Следствием (13) является уравнение непрерывности тока

$$\text{div} (\mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s) = 0 . \quad (14)$$

Система уравнений должна быть дополнена граничным условием для параметра порядка и граничными условиями для потенциалов \mathbf{A} и Φ . Здесь мы пренебрегаем малыми эффектами, связанными с перераспределением плотности заряда ρ в сверхпроводнике [23, 25].

В дальнейшем в ряде случаев для удобства мы будем использовать систему безразмерных уравнений, в которой мы вводим следующие единицы для измерения физических величин:

- $\Psi_0(T) = \sqrt{-a(T)/b}$ — значение однородного параметра порядка в отсутствии магнитного поля — единица измерения параметра порядка Ψ ,
- $\xi(T) = \sqrt{-\hbar^2/[4m^*a(T)]}$ — длина когерентности — единица длины,
- $\hbar^2\sigma_n b/(8e^2a^2\xi^2)$ — единица времени,
- $4ea^2\xi^2/(\hbar\sigma_n b)$ — единица скалярного потенциала Φ ,
- $\phi_0/(2\pi\xi)$ — единица векторного потенциала, соответственно,
- $H_{c2}(T) = \phi_0/(2\pi\xi^2)$ — верхнее критическое магнитное поле (максимальное поле, при котором исчезает сверхпроводимость в массивном сверхпроводнике II-го рода) — единица магнитной индукции и
- $4ea^2\xi/(\hbar b)$ — единица плотности тока. При этом безразмерный ток распаривания, при котором исчезает сверхпроводимость, равен $2/(3\sqrt{3}) \simeq 0.3849$.

Для определённой таким образом системы единиц безразмерные уравнения нестационарной теории ГЛ запишутся в виде:

$$u \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi \right) \Psi = \Psi - |\Psi|^2\Psi + (\nabla + i\mathbf{A})^2 \Psi , \quad (15)$$

$$\mathbf{j}_s = \text{Im} \{ \Psi^* (\nabla + i\mathbf{A}) \Psi \} , \quad (16)$$

$$\mathbf{j}_n = -\nabla\Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \quad (17)$$

$$\text{rot} \mathbf{A} = -\frac{1}{\kappa^2} (\mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s) , \quad (18)$$

$$\text{div} (\mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s) = 0 . \quad (19)$$

Граничное условие (4) принимает вид:

$$\mathbf{n} (\nabla + i\mathbf{A}) \Psi = 0 . \quad (20)$$

Здесь введены параметры: характерное безразмерное время $u = 2e^2\hbar\eta/(m^*\sigma_n b)$, параметр ГЛ $\kappa = \lambda/\xi$, где $\lambda = \sqrt{-m^*c^2b/(8\pi e^2a)}$ — лондоновская глубина проникновения магнитного поля. В выбранных нами единицах глубина проникновения магнитного поля есть κ . Вводя a^2/b как единицу плотности энергии, мы можем записать безразмерную плотность свободной энергии в виде:

$$f = -|\Psi|^2 + \frac{|\Psi|^4}{2} + |(\nabla + i\mathbf{A}) \Psi|^2 + \kappa^2 \mathbf{B}^2 . \quad (21)$$

Феноменологические коэффициенты, входящие в теорию ГЛ, в рамках микроскопической теории определяются через параметры электронной структуры [15, 23, 25].

2.3. Вихри в массивном сверхпроводнике

В зависимости от значения параметра ГЛ κ , определенного в рассмотренной выше феноменологической теории, различают сверхпроводники I (II) рода, в которых $\kappa < 1/\sqrt{2}$ ($\kappa > 1/\sqrt{2}$). Наиболее наглядно различие между ними проявляется в поведении во внешнем магнитном поле. При постепенном увеличении магнитного поля от нуля сначала в сверхпроводниках I рода, и II рода наблюдается эффект Мейсснера, когда магнитное поле проникает в сверхпроводящий образец лишь на лондоновскую длину λ . Затем, при достижении критического значения поля, сверхпроводник переходит в состояние, характеризующееся одновременным наличием нормальных и сверхпроводящих областей. В сверхпроводниках I рода появление нормальной фазы является фазовым переходом I рода. В этом случае сверхпроводник расслаивается на нормальные и сверхпроводящие домены, конфигурация которых зависит от геометрии образца. В отличие от сверхпроводников I рода, сверхпроводники II рода в достаточно сильных магнитных полях ведут себя принципиально другим образом. Когда внешнее поле становится больше некоторого значения, называемого нижним критическим полем H_{c1} , в сверхпроводнике появляются области нормальной фазы, имеющие вид квантованных вихревых нитей, получивших название вихрей Абрикосова [1]. Вихревое состояние сверхпроводников II рода существует в интервале полей от H_{c1} до верхнего критического поля H_{c2} . При этом происходит постепенное увеличение концентрации вихрей с ростом магнитного поля и плавное подавление сверхпроводящего параметра порядка. При достижении поля H_{c2} сверхпроводимость исчезает в объёме сверхпроводника и происходит фазовый переход II рода в нормальное состояние. При поле $H_{c3} > H_{c2}$ исчезает сверхпроводимость на границе (для плоской границы $H_{c3} \simeq 1.69H_{c2}$).

Вихрь представляет собой топологическую особенность сверхпроводящего параметра порядка, вокруг которой циркуляция градиента фазы φ параметра порядка отлична от нуля и кратна 2π . Топологической характеристикой вихря является завихренность M , определяемая циркуляцией градиента фазы вдоль контура \mathcal{L} , охватывающего особенность:

$$\oint_{\mathcal{L}} \nabla \varphi d\mathbf{l} = 2\pi M. \quad (22)$$

Фактически, именно существование ненулевой завихренности $M \neq 0$ вокруг особой линии и является определением вихря. Следствием существования такой особенности является обращение в ноль комплексного параметра порядка на оси вихря. Представляя параметр порядка для изолированного аксиально-симметричного вихря с завихренностью M в виде $\Psi = f(r) \exp(iM\theta)$, получим для модуля параметра порядка уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \left(\frac{M}{r} + A(r) \right)^2 f + f - f^3 = 0.$$

Здесь (r, θ) — полярные координаты с центром на оси вихря и выбрана калибровка $\mathbf{A} = A(r)\theta_0$. Вблизи центра вихря магнитное поле почти однородно и можно пренебречь векторным потенциалом. Модуль параметра порядка вблизи особой линии аксиально симметричен и степенным образом зависит от расстояния от оси вихря: $f = |\Psi| \propto r^{|M|}$. Знак завихренности определяется направлением магнитного поля. По мере удаления от центра вихря модуль параметра порядка монотонно возрастает и на расстояниях порядка ξ от центра вихря выходит на своё равновесное значение $|\Psi| = 1$. Область

размером порядка ξ , где параметр порядка существенно меньше единицы называется кором (сердцевиной) вихря.

Учитывая что вне кора вихря, т.е., при $r \gg 1$ модуль параметра порядка практически равен единице, запишем уравнение Максвелла для магнитного поля в виде:

$$-\kappa^2 \text{rot rot } \mathbf{B} = 2\pi M \delta(r) - \mathbf{B}.$$

Здесь мы учли, что $\text{rot } \nabla \theta = 2\pi \delta(r)$. Решение этого уравнения даёт нам распределение магнитного поля вне кора вихря:

$$\mathbf{B} = \mathbf{z}_0 M K_0(r/\kappa),$$

где K_n — функция Макдональда n -го порядка. В коре магнитное поле почти однородно.

Отметим приближенные формулы, полученное с помощью вариационного метода [27, 28]:

$$f = f_\infty \frac{r}{\sqrt{r^2 + \xi_v^2}}, \quad (23)$$

$$B_z = f_\infty \frac{K_0(f_\infty \sqrt{r^2 + \xi_v^2}/\kappa)}{\kappa \xi_v K_1(\xi_v/\kappa)}, \quad (24)$$

хорошо описывающие структуру одноквантового вихря. Здесь f_∞ и ξ_v — вариационные параметры. Параметр f_∞ учитывает подавление параметра порядка внешним магнитным полем в вихревой решётке, параметр ξ_v — размер кора вихря (при $\kappa \rightarrow \infty$: $\xi_v \rightarrow \sqrt{2}$). Качественный вид зависимостей модуля параметра порядка и магнитного поля от r для одноквантового вихря приведён на Рис. 1.

В однородном массивном сверхпроводнике II рода энергетически выгодными являются одноквантовые вихри с $M = 1$, которые отталкиваются друг от друга и образуют правильную треугольную решётку. Вихревая решётка имеет такой период, что через ячейку проходит один квант магнитного потока. Период решётки $a_H \sim \sqrt{\phi_0/H}$ убывает с увеличением магнитного поля и при поле $H = H_{c2}$ расстояние между вихрями становится порядка единицы ξ — размера нормального кора. В таком сильном поле вихри настолько сближаются, что их нормальные коры перекрываются и сверхпроводимость исчезает.

Неустойчивость многоквантового вихря с $M > 1$ в безграничном сверхпроводнике является очевидным фактом в случае больших параметров $\kappa \gg 1$ [29]. Для произвольных значений параметра κ вопрос устойчивости многоквантовых конфигураций требует отдельного рассмотрения (см., например, [29] и приведенные там ссылки). Аксиально-симметричные решения для многоквантовых вихрей устойчивы, если вторая вариация функционала ГЛ строго положительна. Заметим, что вторая вариация является линейным самосопряженным оператором в соответствующем Гильбертовом пространстве, так что ее положительность означает, что спектр этого оператора ограничен снизу некоторой положительной константой. Нулевые собственные значения при этом должны быть исключены из рассмотрения, поскольку они соответствуют симметричным преобразованиям решения (трансляции, вращения, калибровочные преобразования). Строгое математическое исследование спектра второй вариации функционала ГЛ в окрестности M -квантового вихря при всех значениях параметра κ проведено в [30]. Результаты этого исследования можно сформулировать следующим образом.

- (1) Вихри с $M = \pm 1$ устойчивы для всех значений параметра κ .
- (2) Многоквантовые вихри ($|M| \geq 2$) устойчивы при $\kappa < 1/\sqrt{2}$ и неустойчивы при $\kappa > 1/\sqrt{2}$.

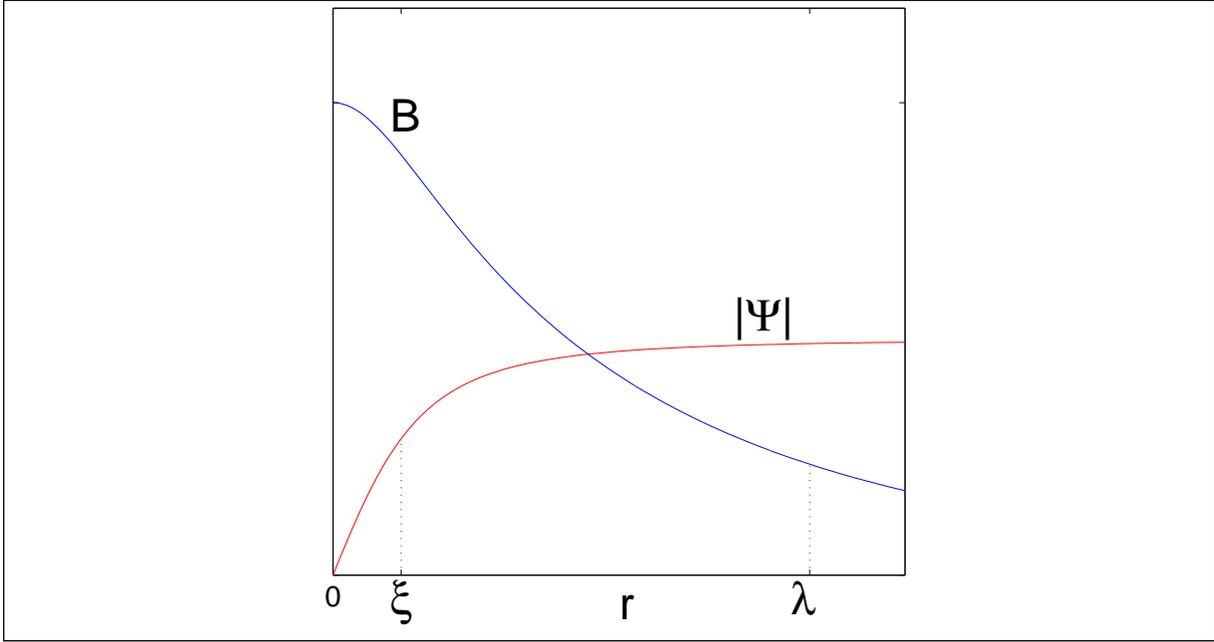


Рис. 1: Качественный вид пространственного распределения модуля параметра порядка и магнитного поля для изолированного одноквантового вихря.

Эти результаты остаются справедливыми и для динамической теории устойчивости вихрей в рамках различных нестационарных вариантов уравнений ГЛ [31].

Случай $\kappa = 1/\sqrt{2}$ является выделенным. Приведем здесь точное решение для параметра порядка и векторного потенциала при этом критическом значении параметра ГЛ в отсутствие внешнего магнитного поля. Рассмотрим уравнения ГЛ в цилиндрической области с сечением Ω с граничным условием $|\Psi|_{\partial\Omega} = 1$. Все n -вихревые абсолютные минимумы функционала ГЛ описываются в этом случае следующим образом ([32]; строгое математическое доказательство приведено в [33]). Ниже для определенности мы выбираем $n > 0$.

Пусть область Ω в плоскости ограничена набором контуров Γ_i , $i = 0, 1, \dots, m$, таких, что контура Γ_i , $i = 1, \dots, m$ лежат внутри контура Γ_0 . Пусть n – целое неотрицательное число и числа $N_0, N_1, \dots, N_m \in \mathbb{Z}$ таковы, что $N_0 + N_1 + \dots + N_m = n$. Пусть точки $z_1, \dots, z_k \in \Omega$, $z_s = x_s + iy_s$, и $\zeta_l = \xi_l + i\eta_l$ принадлежит внутренности контура Γ_l , $l = 1, \dots, m$. Пусть, наконец, $n_1, \dots, n_k \geq 1$ – целые числа, такие что $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ (если $n = 0$, по определению полагаем, что множество $\{z_1, \dots, z_k\}$ пусто). Полагая $z = x + iy$, определим функцию $a(z)$ в области Ω соотношением

$$a(z) = \prod_{j=1}^k |z - z_j|^{2n_j} \prod_{s=1}^m |z - \zeta_s|^{2N_s}$$

и на множестве $\Gamma = \bigcup_{s=0}^m \Gamma_s = \partial\Omega$ функцию φ соотношением

$$\varphi = -\ln a|_{\Gamma}$$

Пусть далее функция u в области Ω есть решение краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta u + ae^u = 1, \\ u|_{\Gamma} = \varphi \end{cases}$$

Можно доказать, что решение этой краевой задачи существует и единственно. Любое решение системы ГЛ с полным числом вихрей n в области Ω , отвечающее абсолютному минимуму функционала ГЛ калибровочно эквивалентно решению вида

$$\begin{cases} \Psi(z) = \prod_{j=1}^k (z - z_j)^{n_j} \prod_{s=1}^m (z - \zeta_s)^{N_s} e^{u(z)/2}, \\ A(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{cases}$$

Сами эти решения калибровочно не эквивалентны друг другу при несовпадающих наборах $\{(z_j, n_j), j = 1, \dots, k\}$ и N_0, N_1, \dots, N_m . Положение точек ζ_s внутри контуров Γ_s роли не играет: эти точки могут быть выбраны и зафиксированы раз и навсегда. Тот факт, что координаты вихрей z_j могут быть выбраны произвольно, означает, что в случае $\kappa = 1/\sqrt{2}$ вихри не взаимодействуют между собой и с границей образца.

2.4. Вихри в мезоскопическом сверхпроводнике

Мы ограничимся рассмотрением тонкоплёночных односвязных мезоскопических сверхпроводников, помещенных в магнитное поле. Толщину плёнки d будем считать малой ($d \lesssim \xi$), что позволит пренебречь зависимостью параметра порядка от координаты поперёк плёнки. Таким образом, здесь мы не будем рассматривать трёхмерные мезоскопические сверхпроводники (см., например, [34, 35, 36] и приведённые там ссылки) и учитывать эффекты, связанные с искривлением вихрей. Полагая при этом, что $d \ll \lambda$ мы можем ограничиться рассмотрением только перпендикулярной к поверхности плёнки составляющей магнитного поля. Отметим, что в этом случае эффективная глубина проникновения магнитного поля существенно возрастает и свойства, характерные для сверхпроводников II рода, могут проявляться и для пленок, изготовленных из сверхпроводящих материалов с $\kappa < 1/\sqrt{2}$. Также мы ограничимся случаем односвязных сверхпроводников (особенности поведения неодносвязных образцов в магнитном поле освещены, например, в книгах [17, 16, 37]) и однородного магнитного поля, не рассматривая свойства вихревого состояния, специфичные для случая неоднородных полей, индуцированных, например, ферромагнетиками [38, 39].

Мы сосредоточимся на случае $\kappa \rightarrow \infty$, когда длина когерентности ξ конечна, а масштаб экранировки магнитного поля $\lambda \rightarrow \infty$. В этом пределе можно пренебречь экранировкой магнитного поля и считать во всём образце магнитное поле однородным. Рассматривая образцы, достаточно большие по сравнению с размерами вихревого кора ξ , можно воспользоваться лондоновским приближением ($|\Psi| = const$) и полностью определить вихревую структуру [40, 41, 42, 7]. Здесь мы сосредоточимся на анализе систем существенно меньшего латерального размера $L \sim \xi$, когда необходимо учитывать неоднородность параметра порядка.

– *Вход/выход вихрей*

В сверхпроводниках макроскопических размеров число вихрей определяется магнитным потоком ϕ , проходящим через поперечное сечение образца площадью S : $N \sim \phi/\phi_0 \sim HS/\phi_0$. Изменение числа вихрей на единицу (вход/выход вихря) происходит при изменении магнитного поля на малую величину $\Delta H \sim \phi_0/S \ll H_{c2}$. Для мезоскопических сверхпроводников, с размерами порядка ξ , $\Delta H \sim H_{c2}$. Число вихрей в таком мезоскопическом сверхпроводнике всегда мало. Более того, диамагнитные экранирующие токи, текущие вдоль границ стремятся сдвинуть вихри вглубь сверхпроводника и тем самым препятствуют выходу вихрей из образца при понижении магнитного поля. Это приводит к появлению *метастабильных состояний*, когда в относительно слабом магнитном поле реализуется состояние с N вихрями, отвечающее локальному, а не абсолютному минимуму свободной энергии. Как следствие существования метастабильных состояний в мезоскопическом сверхпроводнике поле входа $N + 1$ -го вихря $H_{N \rightarrow N+1}$ не

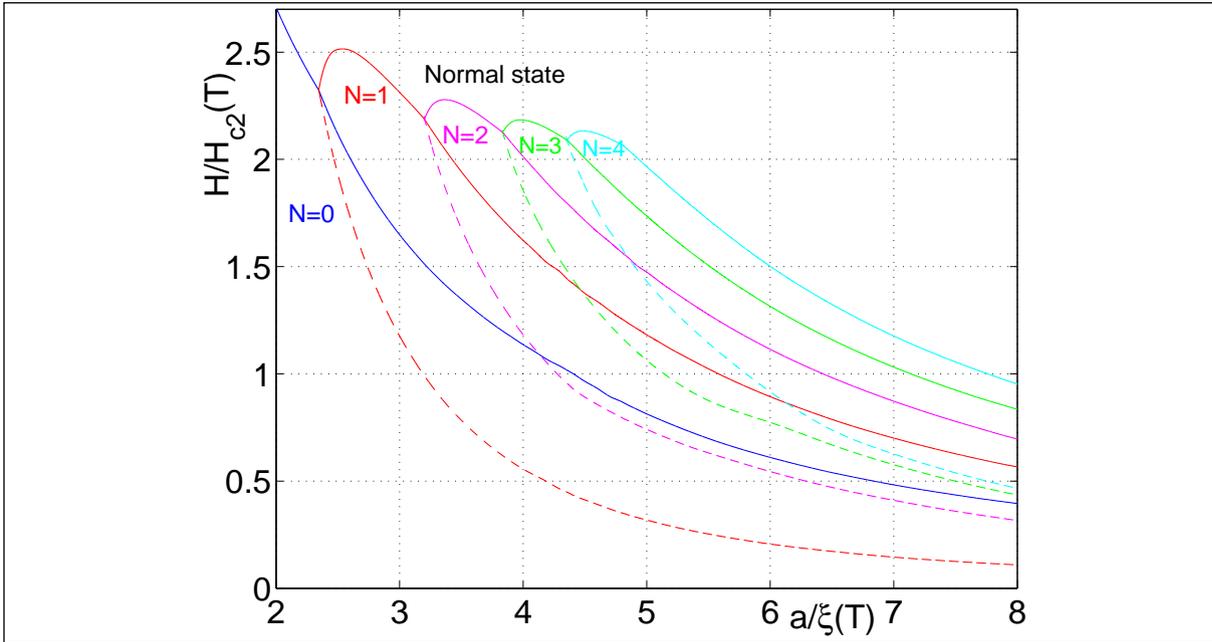


Рис. 2: Фазовая диаграмма вихревых состояний в на плоскости $H - a$ для сверхпроводника квадратной формы (a — сторона квадрата). Показаны состояния с числом вихрей $N = 0, \dots, 4$. Поля ввода $H_{N \rightarrow N+1}$ изображены сплошными линиями, поля выхода $H_{N+1 \rightarrow N}$ — штриховыми. Также на рисунке изображено поле перехода в нормальное состояние (Normal state). Диаграмма рассчитана методом моделирования нестационарного уравнения ГЛ на прямоугольной сетке (см. Раздел 2.5).

совпадает с полем выхода $N + 1$ -го вихря $H_{N+1 \rightarrow N}$ (см. Рис. 2). При этом вход/выход вихря является фазовым переходом I рода. Поля $H_{N \rightarrow N+1}$ и $H_{N+1 \rightarrow N}$ существенным образом зависят не только от размера сверхпроводника, но и от его формы (см., например, работы, где рассчитаны поля входа/выхода вихрей для образцов круглой [43, 44], квадратной [45, 44, 46] и треугольной [44] формы).

Разница в значениях полей ввода и выхода вихрей проявляется в явлении гистерезиса по магнитному полю для различных физических величин (например, кривой намагничивания мезоскопических образцов $M(H)$). Так как при входе/выходе вихрей в сверхпроводник происходят фазовые переходы первого рода, это приводит к тому, что кривая намагничивания состоит из отдельных ветвей, каждая из которых относится к определенному числу вихрей [47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 44].

— *Переход в нормальное состояние: осцилляции Литтла–Паркса*

Фазовый переход мезоскопических сверхпроводников в нормальное состояние также существенно отличается от случая макроскопических образцов. Тот факт, что в мезоскопическом сверхпроводнике реализуются состояния с малым числом вихрей, позволяет наблюдать осцилляции зависимости критической температуры от магнитного поля, аналогичные осцилляциям Литтла–Паркса в полом цилиндре [55]. Появление осцилляций $T_c(H)$ связано со входом (или выходом) вихрей в мезоскопический образец, т.е. с изменением завихренности всего образца. Поскольку переход в нормальное состояние является фазовым переходом II рода, в области перехода можно пренебречь нелинейным слагаемым в уравнении ГЛ (3) и решать линеаризованное уравнение, имеющее вид уравнения Шрёдингера для заряженной частицы в магнитном поле с граничным условием (4). Такое уравнение в общем случае не решается аналитически и требует применения различных численных схем (см. раздел 2.5). Теоретически такие осцилляции рассматривались как для цилиндрических образцов [56, 57], так и для тонких пленок различной

геометрии (круглой, квадратной и треугольной формы) [44, 48, 49, 58, 59, 45, 54, 60]. Экспериментально осцилляции $T_c(H)$ наблюдаются с использованием техники резистивных измерений (см., например, [61, 62]).

— *Многоквантовые вихри и вихревые молекулы*

За счет сил, действующих на вихри со стороны экранирующего тока, стремящихся сместить вихри в центр образца, оказывается возможным существование связанных вихревых состояний (вихревых молекул с размером порядка длины когерентности) [44, 46] и многоквантовых вихрей с $|M| > 1$ [3, 5, 47, 63, 48, 49, 50, 53, 52, 64, 43, 65, 44, 46]. Вихревая молекула — это совокупность близко расположенных взаимодействующих одноквантовых вихрей, обладающих общим кором, то есть модуль параметра порядка между вихрями существенно меньше модуля параметра порядка вокруг вихревой молекулы. При этом расстояние между вихрями существенно меньше ξ , что практически невозможно достичь в макроскопическом образце без внутренних дефектов. При увеличении магнитного поля расстояние между вихрями уменьшается и обращается в нуль, что свидетельствует об образовании многоквантового вихря. Существование таких экзотических вихревых структур приводит к нетривиальным зависимостям транспортных и термодинамических характеристик мезоскопических сверхпроводников от магнитного поля. В частности, на некоторых ветвях кривой намагничивания мезоскопических дисков экспериментально были обнаружены особенности в поведении $M(H)$ (в частности, изломы) [52, 46], которые связываются с внутренней перестройкой вихревого состояния (распадом или образованием многоквантовых вихрей и вихревых молекул). Распад многоквантового вихря является фазовым переходом второго рода.

— *Структуры вихрь-антивихрь*

Необходимо отметить, что в сверхпроводниках с нарушенной аксиальной симметрией (в частности, сверхпроводниках квадратной формы) влияние граничных эффектов увеличивается по сравнению с аксиально симметричными образцами. В частности, в работе [45] было показано, что несовпадение тетрагональной симметрии сверхпроводника с симметрией решения трёхквантового вихря (или симметрией трёхвихревой молекулы) может привести к появлению в сильных полях тетрагонально симметричной вихревой структуры, состоящей из четырех вихрей и центрально расположенного антивихря (Рис. 3).

Такая компактная вихревая конфигурация малого размера ($0.19\xi \times 0.19\xi$ в случае приведенном на Рис. 3) представляет собой реализацию аналога трёхквантового вихря в квадратном сверхпроводнике. Представим структуру трёхквантового вихря в виде разложения по угловым гармоникам

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(r) e^{in\theta}.$$

В соответствии с тетрагональной симметрией граничных условий основная гармоника трёхквантового вихря $R_3(r) e^{3i\theta}$ генерирует дополнительные члены разложения вида $R_{3+4m}(r) e^{i(3+4m)\theta}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — целые числа). Поскольку на малых расстояниях ($r \ll \xi$) $R_n \propto r^{|n|}$, можно представить параметр порядка в центре образца в виде

$$\Psi \propto (r/L_H)^3 e^{3i\theta} + \alpha (r/L_H) e^{-i\theta}, \quad (25)$$

где $L_H = \sqrt{\hbar c / (eH)}$ — магнитная длина, причем вблизи верхнего критического поля $L_H \lesssim \xi$. Такое разложение описывает антивихрь в центре образца и четыре окружающих его вихря, образующих квадрат.

В то же время, при полях близких к критическому полю H_{c3} параметр порядка может быть представлен как суперпозиция четырех гауссовых зародышей расположенных в вершинах квадратного сверхпроводящего образца, с определенной фазой $\varphi_n = -3\pi n/2$

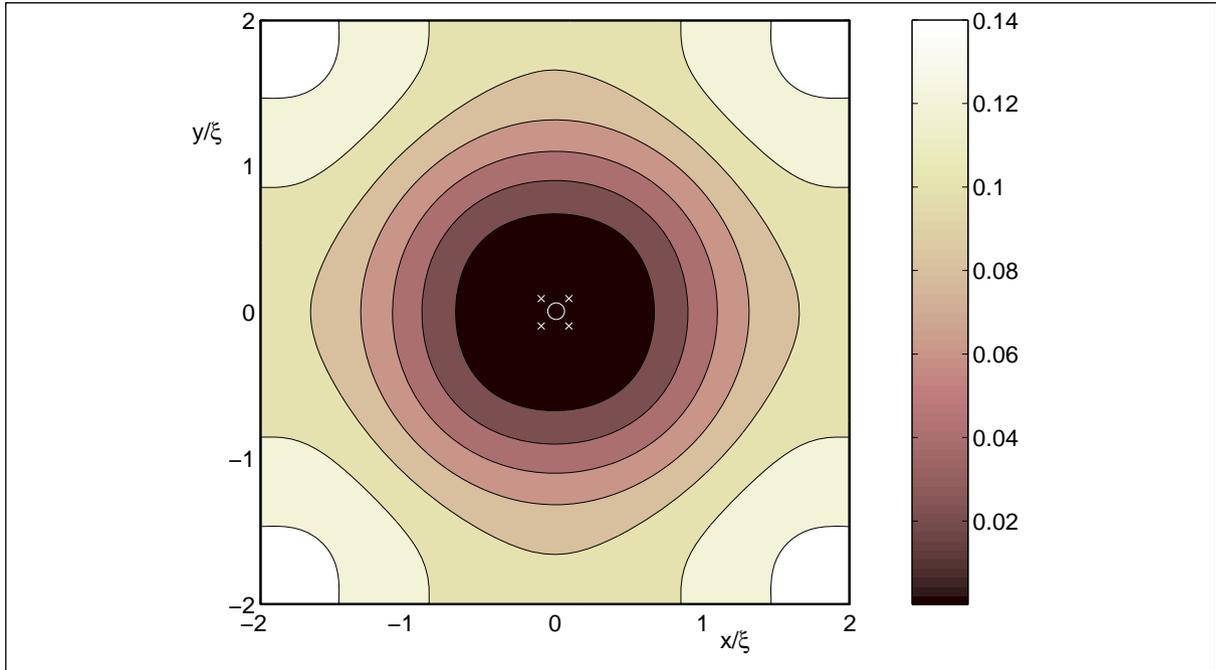


Рис. 3: (из работы [46]). Линиями уровня показаны распределения модуля параметра порядка $|\Psi|$ для $H = 2.15H_{c2}$, $L = 4\xi$ в идеальном квадратном сверхпроводнике. Белыми крестиками обозначены одноквантовые вихри, белым кругом обозначен antivихрь в центре образца.

($n = 0, 1, 2, 3$), определяемой общей завихренностью образца: $\sum \varphi_n = 2\pi\mathcal{M}$ (в данном случае $\mathcal{M} = 3$). Вблизи центра вихря такая суперпозиция дает выражение для гармоники R_{-1} с коэффициентом $\alpha \sim L/L_H \exp(-L^2/4L_H^2)$. Теперь из выражения (25) можно найти координаты четырех вихрей и таким образом определить размер r_0 вихревого состояния с antivихрём:

$$r_0/L_H \sim \sqrt{L/L_H} \exp(-L^2/8L_H^2). \quad (26)$$

Такое вихревое состояние существует только в сильных магнитных полях близких к H_{c2} , а значит $L_H \sim \xi$. Таким образом, во всем диапазоне значений $L/\xi(T)$, при которых в мезоскопическом сверхпроводнике существует вихревой комплекс с antivихрём [45, 46, 66], его размер будет существенно меньше длины когерентности, что затрудняет его экспериментальное обнаружение. Другим существенным фактором, приводящим к распаду подобного экзотического вихревого решения, являются нарушения идеальной тетрагональной симметрии, например, за счет внутренних дефектов сверхпроводника, шероховатости границ [46] и тепловых флуктуаций параметра порядка.

Необходимо отметить, что, аналогично образованию нетривиальной структуры трёхквантового вихря в квадратном сверхпроводнике, двухквантовый вихрь в треугольном сверхпроводнике также содержит antivихрь в окружении трех вихрей, как это было показано в работе [67].

В образцах некруглой формы за счёт симметричных эффектов, связанных с граничными токами, возможны и другие фазовые переходы без изменения общей завихренности образца (числа вихрей), когда при изменении магнитного поля меняется положение вихрей внутри сверхпроводника. Так например, два вихря в сверхпроводнике квадратной формы в относительно слабых полях выстраиваются вдоль диагонали образца, а при понижении поля вихри сдвигаются и выстраиваются вдоль одной из сторон квадрата. При этом такой фазовой переход является переходом I рода: координаты вихрей меняются скачком. Такой фазовой переход приводит к появлению особенностей (скачка) на ветви кривой намагниченности [46].

2.5. Конечномерные аппроксимации для уравнений и функционала Гинзбурга-Ландау

В литературе используется несколько подходов к построению конечномерных аппроксимаций при численном моделировании уравнений ГЛ: (i) разностные, или сеточные аппроксимации, используемые в подавляющем большинстве работ; (ii) разложение по собственным функциям линеаризованной задачи; (iii) метод конечных элементов. Последний численный метод используется сравнительно редко (см, например [68, 69]). Главным недостатком этого метода является то, что соответствующие конечномерные аппроксимации не обладают, как правило, характерными свойствами непрерывной модели, в частности, калибровочной инвариантностью. Поэтому для его применения необходимо зафиксировать калибровку.

Ниже мы остановимся на первых двух подходах.

— *Сеточные аппроксимации*

Одной из проблем сеточных аппроксимаций применительно к уравнению ГЛ является проблема сохранения важных свойств непрерывной задачи, среди которых следует в первую очередь отметить *калибровочную инвариантность*. Другая проблема, связанная с дискретным аналогом уравнений ГЛ, это проблема определения вихрей. В непрерывной двумерной задаче, как уже говорилось, вихри обладают тем свойством, что циркуляция градиента фазы параметра порядка вокруг них есть целое кратное 2π . С математической точки зрения, поскольку фаза комплексного числа определена неоднозначно, под циркуляцией фазы следует понимать интеграл вида

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{\text{Im}(\psi^* \nabla \psi)}{|\psi|^2} d\mathbf{l}, \quad (27)$$

который, как нетрудно проверить, действительно принимает значения равные целочисленному кратному 2π .

Заметим, что определение вихря как нуля параметра порядка становится совершенно неудовлетворительным, поскольку сеточная функция общего положения нулей не имеет. Обе проблемы — калибровочная инвариантность разностной схемы и определение вихрей в решеточной модели ГЛ — решаются одновременно введением так называемых "переменных связи" (*link variables*) [70].

Приведем конструкцию разностных уравнений ГЛ. Для простоты ограничимся случаем прямоугольной двумерной сетки (Рис. 4). Обозначим $V = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}\}$ множество узлов прямоугольной сетки с шагами h_x, h_y на плоскости, $E = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in V, |\alpha - \beta| = 1\}$ множество "ребер" этой сетки и $C = \{((i + \frac{1}{2}), (j + \frac{1}{2})) : i, j \in \mathbb{Z}\}$ — множество "ячеек" сетки.

Границей ячейки c_{ij} будем называть упорядоченный набор ребер

$$\partial c_{ij} = \{((i, j), (i, j + 1)); ((i, j + 1), (i + 1, j + 1)); ((i + 1, j + 1), (i + 1, j)); ((i + 1, j), (i, j))\}. \quad (28)$$

Для ребра $e = (\alpha, \beta)$ вершину α будем называть началом ребра, а вершину β — концом ребра. По заданному (приведенному к обратной длине) векторному потенциалу $\mathbf{A}(x, y)$ определим функции A и U на множестве ребер E :

$$A(e) = \int_{\alpha(e)}^{\beta(e)} \mathbf{A} d\mathbf{l},$$

$$U(e) = e^{iA(e)}.$$

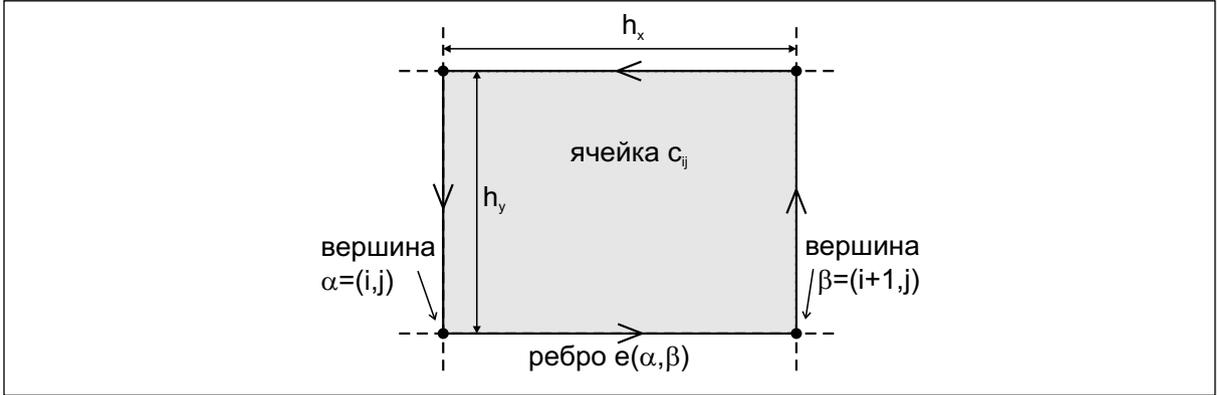


Рис. 4: Вершины, рёбра и элементарная ячейка прямоугольной сетки.

В физической литературе величины $U(e)$ называются *переменными связи* [70]. С математической точки зрения, векторный потенциал следует рассматривать как связность в комплексном одномерном линейном расслоении над плоскостью. Тогда отображение

$$\psi(\alpha(e)) \mapsto U^* \psi(\beta(e))$$

является разностным аналогом оператора параллельного переноса, а отображение ∇_A пространства функций на вершинах в пространство функций на ребрах, определенное соотношением

$$(\nabla_A \psi)(e) = \frac{1}{h(e)} [U^*(e) \psi(\alpha(e)) - \psi(\beta(e))]$$

— разностным аналогом ковариантной производной. Здесь $h(e)$ — длина ребра e . Имеется также аналог оператора “ротор” (с математической точки зрения — оператор вычисления кривизны связности, в данном случае совпадающей с величиной магнитного поля). Этот оператор действует из пространства функций на ребрах в пространство функций на ячейках по правилу

$$(\text{rot} A)(c) = \frac{1}{S(c)} \sum_{e \in \partial c} A(e),$$

где $S(c)$ — площадь ячейки c . Из определения функции A и теоремы Грина нетрудно видеть, что при малых шагах сетки $(\text{rot} A)(c) \simeq \mathbf{z}_0 \text{rot} \mathbf{A}(x) = B_z(x)$, где x — центральная точка ячейки c , \mathbf{z}_0 — единичный вектор, перпендикулярный плоскости сетки.

Теперь можно определить разностный (дискретный) функционал ГЛ

$$F_d(\psi, A) = \sum_e S(e) |(\nabla_A \psi)(e)|^2 + \sum_v S(v) \left(-|\psi(v)|^2 + \frac{|\psi(v)|^4}{2} \right) + \kappa^2 \sum_c S(c) |B(c)|^2.$$

Для прямоугольной сетки $S(e) = S(v) = S(c) = h_x h_y$. Этот функционал является дискретным аналогом непрерывного функционала ГЛ с плотностью свободной энергии (21).

Для того, чтобы получить дискретные уравнения ГЛ по схеме, аналогичной непрерывному случаю, следует использовать вместо вариационных производных частные производные по $\psi(v)$ и $A(e)$, с множителем $1/S$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \Psi} &\mapsto \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial \psi(v)}, \\ \frac{\delta}{\delta \mathbf{A}} &\mapsto \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial A(e)}. \end{aligned}$$

Дискретное уравнение ГЛ для параметра порядка выглядят тогда следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi(v) \right) \psi(v) = (\nabla_A^\dagger \nabla_A \psi)(v) - \psi(v) + \psi(v)|\psi(v)|^2 .$$

Плотность нормального и сверхпроводящего тока определяется, соответственно, как

$$\begin{aligned} j_n(e) &= -\frac{1}{h(e)} [\Phi(\beta(e)) - \Phi(\alpha(e))] + \frac{\partial A(e)}{\partial t} , \\ j_s(e) &= \text{Im} \{ \psi^*(\alpha(e)) U^*(e) \psi^*(\beta(e)) \} . \end{aligned} \quad (29)$$

Для того, чтобы определить дискретные калибровочные преобразования, нам понадобится еще оператор ∇ , действующий из пространства функций на вершинах в пространство функций на ребрах — разностный аналог градиента:

$$\nabla f(e) = \frac{1}{h(e)} [f(\beta(e)) - f(\alpha(e))] .$$

Нетрудно проверить, что для любой функции f , определённой на вершинах, преобразование

$$\psi(v) \mapsto e^{if(v)} \psi(v), \quad A(e) \mapsto A(e) - \nabla f(e)$$

сохраняет как дискретный функционал, так и дискретные уравнения ГЛ, в полной аналогии с калибровочными преобразованиями в непрерывной модели.

Для определения понятия вихря в дискретной модели ГЛ обратимся снова к формуле (27). Аналог этой формулы в дискретной модели выглядит следующим образом:

$$2\pi N(\Omega) = \sum_{e \in \partial\Omega} \arg(\psi(\beta(e)) \psi^*(\alpha(e))) ,$$

где Ω — конечное множество ячеек, $\partial\Omega$ — объединение границ ячеек из Ω (см. определение (28)), и $\arg(z)$ — фаза комплексного числа z , принимающая значения в интервале $(-\pi, \pi]$. В этой формуле предполагается, что функция ψ не обращается в нуль ни в одной из вершин ребер, принадлежащих границе Ω , что для дискретной модели выполняется практически всегда. Функция \arg удовлетворяет соотношению $\arg(z^*) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$, из которого следует, что $N(\Omega)$ — целое число, которое следует называть *алгебраическим числом вихрей* в Ω . Если Ω состоит из одной ячейки, то алгебраическое число вихрей в этой ячейке может быть, в случае прямоугольной сетки, равно нулю или ± 1 . В этом смысле в дискретной модели ГЛ отсутствуют многоквантовые вихри. Ясно также, что определенное таким образом понятие дискретного вихря является калибровочно-инвариантным.

— *Метод разложения по собственным функциям*

Ещё одним методом конечномерных аппроксимаций, используемым для численного решения стационарных уравнений ГЛ является метод разложения по собственным функциям. Систему собственных функций можно выбирать различными способами. Один из вариантов метода использует разложение по собственным функциям *линеаризованного уравнения ГЛ* [50, 54]:

$$-(\nabla + i\mathbf{A})^2 \Psi_L(r) e^{iL\theta} = \epsilon_L \Psi_L(r) e^{iL\theta} \quad (30)$$

с граничным условием (20). Здесь мы рассматриваем случай аксиально-симметричных образцов. При разложении параметра порядка по собственным ортонормированным функциям

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_L C_L \Psi_L(r) \frac{e^{iL\theta}}{\sqrt{2\pi}} \quad (31)$$

ограничивается набором квантовых чисел L . При этом, очевидно, что максимальное значение L ограничивает класс рассматриваемых вихревых структур (число вихрей не будет превосходить это значение). Кроме выбора конечного числа угловых гармоник, ограничивается и набором радиальных квантовых чисел.

Подставляя разложение (31) в функционал (21) мы получим свободную энергию как функцию конечного числа комплексных переменных C_L . Для реализации этого метода необходимо предварительно с помощью некоего численного метода решить задачу (30). Сама же процедура минимизации функционала по C_L в случае конечных κ будет носить итерационный характер. На каждом шаге необходимо по полученному решению для параметра порядка вычислить распределение плотности сверхпроводящего тока (16) и решив уравнение Максвелла (18) (положив при этом $\mathbf{j}_n = 0$) найти векторный потенциал, после чего снова вернуться к решению линейной задачи.

Другой вариант метода [62] заключается в решении линеаризованного уравнения в отсутствие магнитного поля:

$$-\nabla^2 \Psi_n(\mathbf{r}) = \epsilon_n \Psi_n(\mathbf{r}) \quad (32)$$

с граничным условием

$$\mathbf{n} \nabla \Psi = 0 .$$

В такой постановке систему собственных функций достаточно найти один раз.

При использовании такого базиса возникает проблема, связанная с тем, что в присутствии магнитного поля собственные функции задачи Неймана (32) не удовлетворяют, вообще говоря, граничным условиям для параметра порядка (20). Это приводит к необходимости использования очень большого числа базисных функций для получения хорошей аппроксимации параметра порядка в присутствии магнитного поля.

Для решения этой проблемы можно потребовать, чтобы на границе нормальная компонента векторного потенциала обращалась в нуль:

$$\mathbf{n} \mathbf{A} = 0 . \quad (33)$$

Такой выбор калибровки возможен для сверхпроводящей плёнки любой формы в произвольном магнитном поле. Для случая прямоугольника и правильного многоугольника в *однородном* магнитном поле векторный потенциал, удовлетворяющий такой калибровке, может быть найден аналитически. Ортонормированные функции базиса найдены аналитически для прямоугольника и правильного треугольника [62, 71].

С помощью такого метода авторами работ [62, 71] была решена задача о линии $T_c(H)$ фазового перехода сверхпроводник/нормальный металл для сверхпроводников прямоугольной и треугольной формы и найдены вихревые структуры, содержащие антивихрь.

3. Анализ микроскопической структуры вихревых состояний

Наряду с детальным исследованием структуры параметра порядка в новых вихревых конфигурациях, реализующихся в мезоскопических сверхпроводниках, представляет интерес также и развитие теории электронных состояний в таких системах. Данный раздел посвящен анализу теоретических работ, посвященных как особенностям спектра квазичастиц в вихревых структурах, рассмотренных в предыдущей части, так и тепловому транспорту, который определяется электронной структурой вихрей.

3.1. Аномальные ветви в спектре квазичастиц

Изучение электронной структуры вихревого состояния является одной из фундаментальных задач физики смешанного состояния сверхпроводников. Из теории Бардина–Купера–Шриффера [72] следует, что природа сверхпроводимости тесно связана с нали-

чем энергетической щели в спектре квазичастичных возбуждений вблизи поверхности Ферми. В однородном сверхпроводнике энергия квазичастиц имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2(\mathbf{k})},$$

где $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar V_F(k - k_F)$, $\hbar\mathbf{k}$ — импульс квазичастицы, $\hbar k_F$ — импульс Ферми, $\Delta(\mathbf{k})$ — энергетическая щель, которая, вообще говоря, зависит от направления импульса $\hbar\mathbf{k}$. Симметрия сверхпроводящего состояния определяет структуру щели в импульсном пространстве, в частности, наличие нулей в спектре возбуждений [73, 74]. Большинство обычных сверхпроводников, обладающих s -типом симметрии параметра порядка, характеризуются конечным значением щели на всей поверхности Ферми $\Delta(\mathbf{k}) = \Delta_0$. Однако, если к сверхпроводнику приложено магнитное поле, подобное описание спектра квазичастиц хорошо работает, только когда сверхпроводник находится в мейсснеровском состоянии. Переход в вихревое состояние в достаточно сильном магнитном поле $H > H_{c1}$ сопровождается существенным подавлением щели, что связано с появлением состояний, локализованных вблизи центров вихрей. Интерес к исследованию таких состояний, обусловлен тем, что именно они определяют низкотемпературное поведение термодинамических и транспортных характеристик сверхпроводников в магнитном поле. Как было впервые показано в классической работе Кароли – де Жена – Матрикона [11], с каждым отдельным вихрем связана аномальная ветвь в спектре квазичастиц. Энергия подщелевых уровней $\varepsilon(\mu)$, соответствующих этой ветви, меняется в пределах от $-\Delta_0$ до $+\Delta_0$ при изменении проекции μ углового момента квазичастиц на ось вихря от $-\infty$ до $+\infty$. Здесь угловой момент определён относительно оси вихря. В области низких энергий $|\varepsilon| \ll \Delta_0$ спектр является линейной функцией μ : $\varepsilon(\mu) \simeq -\mu\omega$, где $\omega \approx \Delta_0/(k_{\perp}\xi)$, Δ_0 — щель в спектре возбуждений сверхпроводника вдали от оси вихря, $k_{\perp} = \sqrt{k_F^2 - k_z^2}$, k_z — проекция волнового вектора на ось вихря, $\xi = \hbar V_F/\Delta_0$ — длина когерентности, V_F — скорость Ферми и μ принимает полуцелые значения. Заметим, что в большинстве сверхпроводников длина когерентности значительно превышает атомные масштабы: как правило, $k_F\xi \sim 10^2 - 10^3 \gg 1$. Таким образом, минимальная энергия возбуждений в вихревом состоянии сверхпроводника намного меньше, чем в отсутствии магнитного поля: $\omega_0 \sim \Delta_0/(k_F\xi) \ll \Delta_0$. Энергия состояний, принадлежащих аномальной ветви, зависит только от проекций волнового вектора k_z и углового момента μ на ось вихря. Что же касается радиального квантового числа n , то оно равно нулю для спектра Кароли – де Жена – Матрикона. Существуют также подщелевые спектральные ветви, соответствующие $n \neq 0$, найденные, например, в работе Минца и Рахманова в рамках полуклассического подхода [75]. Эти ветви сосредоточены вблизи края щели $\pm\Delta_0$ и практически сливаются с непрерывным спектром делокализованных состояний [76].

Наличие локализованных состояний является прямым следствием нетривиальной угловой зависимости параметра порядка в окрестности центра вихря: $\Delta \propto e^{i\theta}$, где θ — полярный угол в системе отсчета с началом координат в центре вихря (см. Рис.5(а)). Нагляднее всего это можно продемонстрировать, используя квазиклассическое описание движения квазичастиц вдоль прямолинейных траекторий [25]. Применимость квазиклассического приближения определяется условием $k_F\xi \gg 1$, означаящим, что длина волны электронов в металле $\lambda_F = 2\pi/k_F$ намного меньше длины когерентности ξ . Каждая траектория в плоскости, перпендикулярной оси вихря, характеризуется двумя параметрами: направлением, которое определяется импульсом квазичастиц $\mathbf{k}_{\perp} = k_{\perp}(\cos\theta_p, \sin\theta_p)$, и прицельным параметром (расстоянием до центра вихря) $b = -\mu/k_{\perp}$ (см. Рис.5(б)). Дискретность спектра Кароли – де Жена – Матрикона в квазиклассическом приближении не учитывается, и аномальная ветвь спектра в этом случае является непрерывной функцией $\varepsilon_v(b) = \Delta_0(b/\xi)$ [25, 77]. Спектральная задача вдоль траекторий, проходящих через центр вихря, полностью аналогична задаче о квазичастичном спектре короткого

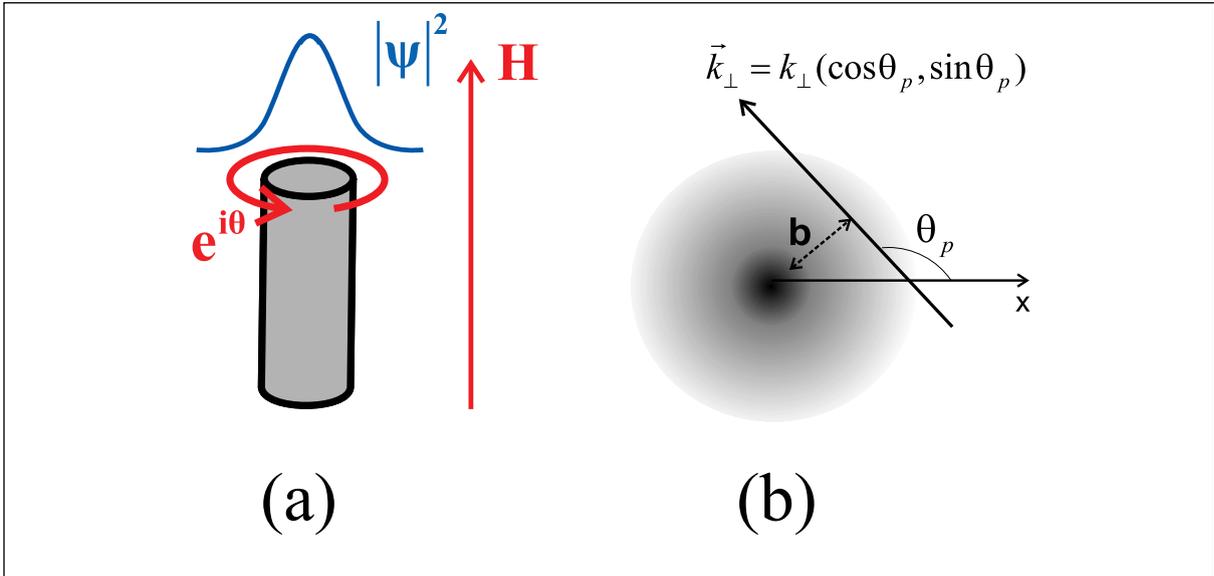


Рис. 5: (а) Схематичное изображение вихря, ориентированного вдоль магнитного поля, и огибающей волновой функции локализованного состояния Кароли – де Жена – Матрикона; (б) квазиклассическая прямолинейная траектория квазичастиц. Направление траектории определяется вектором \mathbf{k}_\perp , прицельный параметр траектории (расстояние до центра вихря) - проекцией углового момента на ось вихря: $b = -\mu/k_\perp$.

джозефсоновского контакта (длина которого меньше ξ) с разностью фаз сверхпроводящих берегов $\varphi_J = \pi$ [78]. Положение подщелевых уровней в таком контакте зависит от разности фаз φ_J как $\varepsilon_J = -\Delta_0 \cos(\varphi_J/2)$ (где $0 < \varphi_J < 2\pi$). Таким образом, при $\varphi_J = \pi$ спектральные ветви пересекают уровень Ферми. Аналогию с вихревыми состояниями нетрудно проследить, если заметить, что вдоль траектории, проходящей точно через центр вихря скачок фазы параметра порядка равен $\varphi_J = \pi$, поэтому $\varepsilon_v(b=0) = \varepsilon_J(\varphi_J = \pi) = 0$. Для траекторий, проходящих на некотором расстоянии $b \neq 0$ от центра вихря, разность фаз $\varphi_J \neq \pi$, что приводит к отстройке уровней энергии от нуля.

Перекрытие волновых функций, локализованных на соседних вихрях, приводит к искажению спектра Кароли – де Жена – Матрикона, которое выражается в частности в появлении энергетических зон для периодической вихревой решетки [79] и угловой модуляции профиля локальной плотности состояний [80, 81]. Заметим, что расстояние между уровнями Кароли – де Жена – Матрикона можно оценить следующим образом: $\omega_0 \sim \hbar\omega_H H_{c2}/H$, где $\omega_H = |e|H/mc$ – циклотронная частота, e и m – заряд и масса электрона. С увеличением концентрации вихрей в высоких магнитных полях, близких к верхнему критическому полю H_{c2} , расстояние между уровнями Кароли – де Жена – Матрикона сравнивается с расстоянием между уровнями Ландау. В этом случае должен происходить переход к движению квазичастиц по замкнутым циклотронным орбитам, что в конечном итоге приводит к полному подавлению сверхпроводимости и формированию спектра Ландау нормального металла в магнитном поле [82].

В области больших магнитных полей $H \gg H_{c1}$ на сегодняшний день спектр хорошо исследован в предельном случае плотной вихревой решетки [73, 74], когда магнитное поле близко к H_{c2} . В то же время, представляется интересным изучить, как при увеличении магнитного поля происходит переход от изолированных квазичастичных уровней Кароли – де Жена – Матрикона к делокализованным состояниям в вихревой решетке, характеризующихся бесщелевым спектром. Понимание механизма этого перехода позволило бы объяснить результаты экспериментов в которых наблюдались

осцилляции де Гааза–ван Альфена даже в области достаточно низких магнитных полей $H \sim (0.3 - 0.4)H_{c2}$ [83]. В качестве первого шага при расчете квазичастичного спектра в вихревой решетке необходимо рассмотреть задачу о трансформации спектра за счет интерференции состояний, локализованных в корах соседних вихрей при образовании вихревых конфигураций конечных размеров. При этом представляется необходимым выполнить обобщение теории Кароли – де Жена – Матрикона на случай многовихревых конфигураций, с учетом как межвихревого туннелирования квазичастиц, так и образования многоквантовых вихрей. Также для корректного описания электронной структуры мезоскопического сверхпроводника надо учесть эффекты, связанные с нормальным рассеянием квазичастиц на границах образца. Волновые функции, соответствующие подщелевым уровням энергии, локализованы в окрестности кора вихря благодаря андреевскому отражению квазичастиц от неоднородного профиля параметра порядка. Любое дополнительное нормальное рассеяние квазичастиц должно приводить к модификации аномальной ветви. Как было показано в работе Ларкина и Овчинникова [84], существенная модификация может быть вызвана даже малым количеством примесей атомарных размеров. В случае, когда вихрь расположен около плоской границы, искажение локальной плотности состояний исследовалось в работе [85] на основе численного решения уравнений Эйленбергера как для s , так и для d симметрии параметра порядка. Естественно ожидать, что роль нормального рассеяния на границах образца должна быть особенно важной при рассмотрении спектра вихрей в мезоскопическом сверхпроводнике малых размеров. В случае, когда в центре сверхпроводящего диска расположен одноквантовый вихрь, трансформация спектра была проанализирована в работах [13, 86], где было показано, что когда радиус диска R меньше критического значения $R_c \sim \xi \ln(k_F \xi)$, спектр квазичастиц становится бесщелевым.

Механизм трансформации спектра при изменении вихревого состояния образца связан с перестройкой аномальных спектральных ветвей, пересекающих уровень Ферми. В случае, когда расстояние между вихрями велико, аномальные ветви спектра описываются в рамках теории Кароли – де Жена – Матрикона для изолированного вихря [11]. С уменьшением расстояния между вихрями, становятся существенными эффекты, связанные с перекрытием волновых функций квазичастиц, локализованных на разных вихрях. Это приводит, в частности, к модификации аномальных ветвей спектра [12]. Затем, когда вихри сближаются настолько, что их коры перекрываются, образуется многоквантовый (гигантский) вихрь с завихренностью $M > 1$. Число аномальных ветвей спектра (в расчете на одну проекцию спина) при переходе от M отдельных вихревых линий к M -квантовому вихрю не изменяется [87] и все время остается равным общему значению завихренности M . Поведение аномальных ветвей спектра в многоквантовом вихре исследовалось численно [88, 89, 90, 91, 92, 93] и аналитически для частной модели вихревого кора (с кусочно-постоянным профилем параметра порядка) [94]. Для вихрей с четной завихренностью все аномальные ветви пересекают уровень Ферми при конечном значении прицельного параметра $b = -\mu/k_{\perp}$:

$$\varepsilon(\mu) \sim -(\mu \pm \mu_j)\Delta_0/(k_{\perp}\xi), \quad (34)$$

где $j = 1 \dots M/2$, $\mu_{M/2} \sim k_{\perp}\xi$. В случае нечетного значения завихренности существует спектральная ветвь, пересекающая уровень Ферми при $b = 0$.

Экспериментальное исследование особенностей электронной структуры может быть осуществлено, например, с использованием сканирующей туннельной спектроскопии (СТМ) [81, 95, 96], или с помощью измерений характеристик теплового транспорта вдоль направления магнитного поля [97, 98]. Современные методы СТМ позволяют исследовать локальный профиль плотности состояний на уровне Ферми, который определяется как раз аномальными ветвями спектра [94]. Как нетрудно видеть, подавление щели в спектре возбуждений при возникновении вихрей приводит к появлению плотно-

сти состояний на уровне Ферми, соответствующей плотности состояний в нормальном металле. Действительно, если пренебречь дискретностью спектра Кароли – де Жена – Матрикона, то легко найти, что плотность состояний (в расчете на единицу длины вихря и проекцию спина) равна $\nu_0 = k_F/(4\omega_0) \sim \xi^2(m/\hbar^2)$, где m/\hbar^2 – плотность состояний в нормальном металле, а ξ^2 – характерная площадь локализации вихревых состояний. Поскольку в однородном сверхпроводнике плотность состояний на уровне Ферми равна нулю, наличие в корах вихрей состояний Кароли – де Жена – Матрикона проявляется в виде пиков локальной плотности состояний, наблюдаемых в местах расположения вихревых особенностей.

Что касается измерений характеристик теплового транспорта вдоль вихревых линий, то важным преимуществом этой методики является чувствительность к дисперсии квазичастичного спектра как функции k_z . В частности, малая по сравнению с V_F величина групповой скорости квазичастичных мод $V_g = \hbar^{-1}\partial\varepsilon/\partial k_z$, распространяющихся вдоль оси вихря [86, 99], является причиной существенного подавления теплового кондактанса $\kappa_v \sim T^2 k_F \xi / (\hbar \Delta_0)$ по сравнению с шарвиновским значением $\kappa_{Sh} \sim T(k_F \xi)^2 / \hbar$, характеризующим тепловой транспорт в нормальном канале с поперечными размерами порядка длины когерентности ξ при некотором значении температуры T :

$$\frac{\kappa_v}{\kappa_{Sh}} \sim \frac{1}{k_F \xi} \frac{T}{\Delta_0} \ll 1. \quad (35)$$

В рамках подхода Ландауэра (см., например, книги [100, 101]), подобное подавление эффективности теплового транспорта может быть интерпретировано как следствие сильного уменьшения эффективного числа проводящих мод $N_v = \kappa_v / \kappa_0$, где $\kappa_0 = \pi T / (3\hbar)$ – квант теплового кондактанса, приходящийся на одну распространяющуюся моду [102]. Заметим, что квантование теплопроводности, связанное с изменением числа проводящих мод в канале, является экспериментально подтвержденным фактом [103, 104], наряду с хорошо известным эффектом квантования проводимости [101]. С учетом того, что минимальное расстояние между квазичастичными уровнями в коре вихря есть $\omega_0 \approx \Delta_0 / (k_F \xi)$ при $k_z = 0$, легко получить оценку $N_v \sim T / \omega_0$, которая согласуется с формулой (35). Таким образом, число проводящих мод определяется характеристиками квазичастичного спектра, и следовательно должно определяться эффектами как нормального рассеяния квазичастиц на границах образца, так и интерференции состояний, локализованных в корах близко расположенных вихрей. В частности, когда одноквантовый вихрь расположен в центре сверхпроводящего цилиндра, рассеяние на границах образца приводит к существенному увеличению теплового кондактанса [86]. В общем случае произвольной вихревой конфигурации тепловой кондактанс мезоскопического сверхпроводника должен зависеть от общего числа и относительного расположения вихрей в образце.

3.2. Квазиклассическое приближение в уравнениях Боголюбова – де Жена: уравнения Андреева

Квантовая механика квазичастичных возбуждений в сверхпроводнике может быть описана в рамках уравнений Боголюбова–де Жена:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \varepsilon_{\perp} \right] u + V(\mathbf{r})u + \Delta(\mathbf{r})v = \varepsilon u \quad (36)$$

$$- \left[\frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \varepsilon_{\perp} \right] v - V(\mathbf{r})v + \Delta^*(\mathbf{r})u = \varepsilon v \quad (37)$$

Здесь u и v – амплитуды электронной и дырочной компонент, $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$, $\Delta(\mathbf{r})$ – параметр порядка, $V(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия, связанная, например, с рассеянием квазичастиц. Мы предполагаем, что система однородна вдоль оси z , поэтому в урав-

нениях (36) рассматривается движение квазичастиц в плоскости (x, y) , перпендикулярной вихревым линиям. Эффективная энергия Ферми $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_F - \hbar^2 k_z^2 / (2m) = \hbar^2 k_{\perp}^2 / (2m)$ характеризует движение частиц в плоскости xy . Далее для простоты мы будем рассматривать уравнения (36) в области, где потенциальная энергия равна нулю. Сначала перейдем к импульсному представлению:

$$\check{\Psi}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} \check{\psi}(\mathbf{p}) d^2\mathbf{p}, \quad (38)$$

где $\mathbf{p} = p(\cos\theta_p, \sin\theta_p) = p\mathbf{p}_0$. Оператор пространственной координаты может быть записан следующим образом:

$$\hat{\mathbf{r}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} = i\hbar \left(\mathbf{p}_0 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{i}{p} \{[\mathbf{z}_0, \mathbf{p}_0], \hat{\mu}\} \right)$$

или покомпонентно:

$$\hat{x} = i\hbar \cos\theta_p \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial}{\partial p} \sqrt{p} - \frac{i\hbar}{2p} \left\{ \sin\theta_p, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right\}, \quad (39)$$

$$\hat{y} = i\hbar \sin\theta_p \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial}{\partial p} \sqrt{p} + \frac{i\hbar}{2p} \left\{ \cos\theta_p, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right\}, \quad (40)$$

где $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ — антикоммутирует операторов \hat{A} и \hat{B} . Заметим, что каждое слагаемое в уравнениях (39, 40) является эрмитовым оператором. Далее мы будем предполагать, что волновые функции квазичастиц представляют собой узкие волновые пакеты, локализованные вблизи значения импульса $\hbar k_{\perp}$: $p = \hbar k_{\perp} + q$ ($|q| \ll \hbar k_{\perp}$). По сути, такое предположение означает переход к квазиклассике. Квазиклассические аппроксимации операторов координат имеют следующий вид:

$$\hat{x} \simeq i\hbar \cos\theta_p \frac{\partial}{\partial q} - \frac{i}{2k_{\perp}} \left\{ \sin\theta_p, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right\}, \quad (41)$$

$$\hat{y} \simeq i\hbar \sin\theta_p \frac{\partial}{\partial q} + \frac{i}{2k_{\perp}} \left\{ \cos\theta_p, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right\}. \quad (42)$$

Далее, переходя к Фурье образу по отстройке q импульса от значения $\hbar k_{\perp}$:

$$\check{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{k_{\perp}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqs/\hbar} \check{\psi}(s, \theta_p) ds \quad (43)$$

мы получаем:

$$\hat{q} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial s},$$

$$\hat{x} \simeq s \cos\theta_p - \frac{i}{2k_{\perp}} \left\{ \sin\theta_p, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right\}, \quad (44)$$

$$\hat{y} \simeq s \sin\theta_p + \frac{i}{2k_{\perp}} \left\{ \cos\theta_p, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right\}. \quad (45)$$

Заметим, что переменная s имеет смысл координаты вдоль квазиклассической траектории, определяемой импульсом квазичастицы. В предположении, что магнитное поле направлено вдоль оси z и однородно на масштабах рассматриваемой системы $\mathbf{H} = -H\mathbf{z}_0$, линейное по H слагаемое в уравнениях (36) может быть записано в виде:

$$\frac{e}{2mc} \{\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{A}\} \simeq \frac{\hbar e H}{2mc} \hat{\mu}, \quad (46)$$

где мы использовали радиальную калибровку векторного потенциала $\mathbf{A} = [\mathbf{H}, \mathbf{r}]/2$ и оператор z -проекции углового момента

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\hbar}[\mathbf{r}, \mathbf{p}]z_0 = -i\frac{\partial}{\partial\theta_p}. \quad (47)$$

В итоге, уравнение (36) вдоль квазиклассической траектории в координатах (s, θ_p) выглядит следующим образом:

$$-i\hat{\tau}_3\hbar V_{\perp}\frac{\partial}{\partial s}\check{\psi} + \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix}\check{\psi} = \left(\varepsilon + \hat{\mu}\frac{\hbar\omega_H}{2}\right)\check{\psi}, \quad (48)$$

где $\omega_H = |e|H/mc$ — циклотронная частота, $V_{\perp} = \hbar k_{\perp}/m$, а $\hat{\tau}_{1,2,3}$ — матрицы Паули в пространстве Намбу (электрон-дырка).

Заметим, что в уравнении (48) опущены члены, квадратичные по H , которые являются пренебрежимо малыми в силу предполагаемой малости размеров системы по сравнению с циклотронным радиусом электронов в металле $r_H = V_F/\omega_H$. Волновая функция в реальном пространстве может быть записана следующим образом [86, 12]:

$$\check{\Psi}(r, \theta) = \int_0^{2\pi} e^{ik_{\perp}r\cos(\theta-\theta_p)}\check{\psi}(r\cos(\theta-\theta_p), \theta_p)\frac{d\theta_p}{2\pi}, \quad (49)$$

где введена цилиндрическая система координат (r, θ, z) с осью z , совпадающей с осью вихря. Для того, чтобы получить из (48) уравнения вдоль определенной траектории, надо еще раз использовать квазиклассическое приближение, на этот раз для угловой зависимости волновой функции:

$$\check{\psi}(s, \theta_p) = e^{iS_e(\theta_p)}\check{g}(s, \theta_p),$$

где $S_e(\theta_p)$ — угловой эйконал, а прицельный параметр траектории равен

$$b(\theta_p) = -\frac{1}{k_{\perp}}\frac{\partial S_e}{\partial\theta_p}.$$

В результате система квазиклассических уравнений Андреева принимает следующий вид:

$$-i\hat{\tau}_3\hbar V_{\perp}\frac{\partial}{\partial s}\check{g} + \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix}\check{g} = \left(\varepsilon + k_{\perp}b\frac{\hbar\omega_H}{2}\right)\check{g}, \quad (50)$$

где $\Delta = \Delta(x, y)$ и

$$\begin{aligned} x &= s\cos\theta_p - b\sin\theta_p, \\ y &= s\sin\theta_p + b\cos\theta_p. \end{aligned} \quad (51)$$

3.3. Многоквантовые вихри: число аномальных ветвей спектра

Анализ подщелевого спектра вихревых конфигураций в мезоскопических системах мы начнем с наиболее простого случая многоквантового вихря, число аномальных ветвей в котором оказывается равным завихренности в расчете на одну проекцию спина возбуждений [87]. Для доказательства этого важного утверждения удобно ввести так называемый индекс асимметрии спектра, равный разнице числа положительных и отрицательных собственных значений. Изменение этого индекса при изменении прицельного параметра и определяет число аномальных ветвей. Для полноты изложения здесь мы приведем подробное доказательство этого свойства в несколько упрощенном виде для многоквантового вихря в обыкновенном сверхпроводнике с s -симметрией параметра порядка, с использованием градиентного разложения гриновских функций для уравнений Андреева [105].

Рассмотрим уравнение (50) с параметром порядка, определяемым следующим выражением в случае многоквантового вихря:

$$\Delta = D_M(r)e^{iM\theta}, \quad (52)$$

или в переменных (s, θ_p) :

$$\Delta = \Delta_M(s, b)e^{iM\theta_p} = D_M \left(\sqrt{s^2 + b^2} \right) \left[\frac{s + ib}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right]^M. \quad (53)$$

В силу цилиндрической симметрии зависимость функции \check{g} от переменной θ_p можно исключить с помощью калибровочного преобразования:

$$\check{g} = \exp(iM\hat{\sigma}_z\theta_p/2)\check{f}. \quad (54)$$

Тогда квазиклассические уравнения принимают вид:

$$-i\hat{\tau}_3\hbar V_\perp \frac{\partial \check{f}}{\partial s} + \begin{pmatrix} 0 & \Delta_M \\ \Delta_M^* & 0 \end{pmatrix} \check{f} = \varepsilon \check{f}. \quad (55)$$

Пусть ε_λ — набор всех собственных чисел уравнения (55), а $\check{f}_\lambda = (u_\lambda, v_\lambda)^T$ соответствующие собственные функции (T означает транспонирование). Условие нормировки собственных функций имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|u_\lambda|^2 + |v_\lambda|^2) ds = 1, \quad (56)$$

а условие полноты гласит:

$$\sum_\lambda \check{f}_\lambda^{*T}(s)\check{f}_\lambda(s') = \delta(s - s')\hat{\tau}_0, \quad (57)$$

где $\hat{\tau}_0$ - единичная матрица. Поскольку

$$\check{f}_\lambda^{*T}(s)\check{f}_\lambda(s') = \begin{pmatrix} u_\lambda^*(s')u_\lambda(s) & v_\lambda^*(s')u_\lambda(s) \\ u_\lambda^*(s')v_\lambda(s) & v_\lambda^*(s')v_\lambda(s) \end{pmatrix},$$

условие полноты (57) может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_\lambda u_\lambda^*(s')u_\lambda(s) &= \delta(s - s'), \\ \sum_\lambda u_\lambda(s)v_\lambda^*(s') &= 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Определим далее нормальную $G(s, s')$ и аномальную $F(s, s')$ функции Грина следующим образом:

$$\begin{aligned} G(s, s') &= \sum_\lambda \frac{u_\lambda(s)u_\lambda^*(s')}{\varepsilon - \varepsilon_\lambda}, \\ F(s, s') &= \sum_\lambda \frac{v_\lambda(s)u_\lambda^*(s')}{\varepsilon - \varepsilon_\lambda}. \end{aligned}$$

Из уравнения (55) и условий полноты (58) следуют уравнения для гриновских функций:

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon + i\hbar V_\perp \frac{\partial}{\partial s} \right) G(s, s') - \Delta_M(s, b)F(s, s') &= \delta(s - s'), \\ \left(\varepsilon - i\hbar V_\perp \frac{\partial}{\partial s} \right) F(s, s') - \Delta_M^*(s, b)G(s, s') &= 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Заметим, что уравнение (55) обладает следующей симметрией: $u_\lambda \rightarrow v_\lambda^*$, $v_\lambda \rightarrow u_\lambda^*$. Поэтому гриновские функции должны обладать следующим свойством: $G, F(s, s') = \tilde{G}, \tilde{F}(s, s')$, где

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s, s') &= \sum_\lambda \frac{v_\lambda^*(s)v_\lambda(s')}{\varepsilon - \varepsilon_\lambda}, \\ \tilde{F}(s, s') &= \sum_\lambda \frac{u_\lambda^*(s)v_\lambda(s')}{\varepsilon - \varepsilon_\lambda}. \end{aligned}$$

Из уравнения (55) и условий полноты (58) следуют уравнения для гриновских функций:

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon + i\hbar V_{\perp} \frac{\partial}{\partial s} \right) G(s, s') - \Delta_M(s, b) F(s, s') &= \delta(s - s'), \\ \left(\varepsilon - i\hbar V_{\perp} \frac{\partial}{\partial s} \right) F(s, s') - \Delta_M^*(s, b) G(s, s') &= 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Заметим, что уравнение (55) обладает следующей симметрией: $u_{\lambda} \rightarrow v_{\lambda}^*$, $v_{\lambda} \rightarrow u_{\lambda}^*$. Поэтому гриновские функции должны обладать следующим свойством: $G, F(s, s') = \tilde{G}, \tilde{F}(s, s')$, где

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s, s') &= \sum_{\lambda} \frac{v_{\lambda}^*(s) v_{\lambda}(s')}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda}}, \\ \tilde{F}(s, s') &= \sum_{\lambda} \frac{u_{\lambda}^*(s) v_{\lambda}(s')}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda}}. \end{aligned}$$

Затем, используя условие нормировки (56), мы получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [G(s, s) + \tilde{G}(s, s)] ds = 2 \int_{-\infty}^{\infty} G(s, s) ds = \sum_{\lambda} \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda}}.$$

Делая замену $\varepsilon \rightarrow i\omega$ проинтегрируем предыдущее соотношение по ω :

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} G(s, s) ds d\omega = -\frac{N_a}{4}, \quad (60)$$

где

$$N_a = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\lambda} \frac{d\omega}{i\omega - \varepsilon_{\lambda}} = \sum_{\lambda} \text{sign}(\varepsilon_{\lambda})$$

— индекс асимметрии спектра, определяющий разницу между числом положительных и отрицательных собственных значений энергии. Для того, чтобы вычислить N_a удобно перейти в смешанное представление:

$$G_q, F_q(S, q) = \int_{-\infty}^{\infty} G, F(S, s_r) e^{-iqs_r} ds_r,$$

где $S = (s + s')/2$, $s_r = s - s'$. Таким образом, мы получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} G(s, s) ds d\omega = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} G(S, s_r = 0) dS d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} G(S, q) dS dq d\omega. \quad (61)$$

Далее удобно ввести безразмерные величины:

$$s \rightarrow s(\hbar V_{\perp} / \Delta_0), \quad q \rightarrow q(\Delta_0 / \hbar V_{\perp}), \quad \Delta_M \rightarrow \Delta_0 \Delta_M.$$

Поскольку

$$s = S + \frac{s_r}{2} \rightarrow S + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q}; \quad \frac{\partial}{\partial s} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S} + iq,$$

то мы получаем следующие уравнения для $G_q, F_q(S, q)$:

$$\left[i\omega - \left(q - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial S} \right) \right] G_q + \Delta_M \left(S + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q} \right) F_q = 1, \quad (62)$$

$$\left[i\omega + \left(q - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial S} \right) \right] F_q + \Delta_M^* \left(S + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q} \right) G_q = 0. \quad (63)$$

Предполагая, что функция $\Delta_M(s)$ достаточно медленная, можно использовать разложение в ряд Тейлора:

$$\Delta_M \left(S + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q} \right) = \Delta_M(S) + \Delta_M'(S) \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q}.$$

При условии, что пространственная неоднородность мала, в нулевом порядке можно пренебречь градиентными слагаемыми ∂_S, ∂_q . Тогда, решая в нулевом приближении уравнения для функций G_q, F_q , мы находим, что

$$G_{q0} = -\frac{i\omega + q}{\omega^2 + q^2 + |\Delta_M|^2}, \quad (64)$$

$$F_{q0} = -\frac{\Delta_M^*}{\omega^2 + q^2 + |\Delta_M|^2}. \quad (65)$$

Однако, подставив функцию G_{q0} в выражение (61), мы получим что интеграл в левой части (60) обращается в нуль из-за нечетности G_{q0} по ω . Таким образом, чтобы найти правильное выражение для индекса асимметрии N_a , необходимо найти функции Грина в следующем порядке малости по градиентам. Из уравнений (62),(63) получаем:

$$(i\omega - q) G_{q1} - \Delta_M F_{q1} = -\frac{i}{2} \frac{\partial G_{q0}}{\partial S} + \Delta_M' \frac{i}{2} \frac{\partial F_{q0}}{\partial q},$$

$$(i\omega + q) F_{q1} - \Delta_M^* G_{q1} = \frac{i}{2} \frac{\partial F_{q0}}{\partial S} + \Delta_M'^* \frac{i}{2} \frac{\partial G_{q0}}{\partial q}.$$

После несложных преобразований мы приходим к следующему равенству:

$$(\omega^2 + q^2 + |\Delta_M|^2) G_{q1} = -\frac{i}{2} \left(\Delta_M \frac{\partial}{\partial S} + (i\omega + q) \frac{\partial \Delta_M}{\partial S} \frac{\partial}{\partial q} \right) F_{q0} - \frac{i}{2} \left(\Delta_M \frac{\partial \Delta_M^*}{\partial S} \frac{\partial}{\partial q} - (i\omega + q) \frac{\partial}{\partial S} \right) G_{q0}.$$

Правая часть этого уравнения может быть переписана в следующем виде:

$$-\frac{i}{2} \left[\frac{|\Delta_M|^2}{i\omega + q} - (i\omega + q) \right] \frac{\partial G_{q0}}{\partial S} - \frac{i}{2} \left[\Delta_M \frac{\partial \Delta_M^*}{\partial S} \left(\frac{G_{q0}}{i\omega + q} + \frac{\partial G_{q0}}{\partial q} \right) + (i\omega + q) \Delta_M^* \frac{\partial \Delta_M}{\partial S} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{G_{q0}}{i\omega + q} \right) \right].$$

Слагаемое в первых скобках дает нуль при интегрировании по S . Выражение во вторых квадратных скобках может быть записано как

$$\frac{i}{4} \frac{\partial |\Delta_M|^2}{\partial S} \frac{\partial G_{q0}}{\partial q} + \frac{i}{2} \frac{G_{q0}}{i\omega + q} \left(\Delta_M \frac{\partial \Delta_M^*}{\partial S} - c.c. \right).$$

Первый член также дает нуль при интегрировании по S в выражении (61). В итоге мы получаем, что ненулевой вклад в интеграл (61) дает следующая часть функции G_g :

$$\tilde{G}_{q1} = -\frac{|\Delta_M^2|}{(\omega^2 + q^2 + |\Delta_M|^2)^2} \frac{\partial \varphi}{\partial S},$$

где $\varphi(S) = -M \arctan(s/b)$ - фаза параметра порядка $\Delta_M(s, b)$ (напомним, что M - значение завихренности). Теперь мы можем вычислить интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} G(S, q) dS d\omega dq.$$

Интегрирование по переменным ω и q удобнее провести в полярных координатах: $d\omega dq = 2\pi r dr$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} G(S, q) dS d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} G_{1q}(S, q) dS d\omega dq = M \frac{\text{sign}(b)}{4}.$$

Таким образом, индекс асимметрии равен: $N_a = -M \text{sign}(b)$. Это означает, что в M -квантовом вихре имеется M аномальных спектральных ветвей, которые пересекают

уровень Ферми при некоторых значениях прицельного параметра b . Заметим, что изложенная теория позволяет лишь сделать вывод о количестве аномальных веток. Для того, чтобы более точно найти вид спектра, необходимо учесть все члены градиентного разложения функций Грина $G, F(S, q)$, или, что то же самое, решить спектральную задачу для уравнения (55). В общем случае, спектральная задача может быть решена только численно. Однако, в случае малых энергий $|\varepsilon| \ll \Delta_0$, оказывается возможным найти аналитическое выражение для аномальных ветвей, которое очень хорошо совпадает с численными результатами.

3.4. Многоквантовые вихри: аналитическое решение уравнений Андреева

Процедура нахождения спектра Кароли – де Жена – Матрикона для уравнения (55) была разработана в работе [87] для случая одноквантового вихря ($M = 1$) и фактически основана на использовании теории возмущений по малому параметру $|\varepsilon|/\Delta_0$. С помощью функций $G_R = \text{Re}\Delta_M, G_I = \text{Im}\Delta_M$, уравнение (55) может быть переписано в следующем виде:

$$-i\hat{\tau}_3 \frac{\hbar^2 k_\perp}{m} \frac{\partial \check{f}}{\partial s} + \hat{\tau}_1 G_R \hat{f} - \hat{\tau}_2 G_I \check{f} = \varepsilon \check{f}. \quad (66)$$

Заметим, что уравнение (66) имеет точное решение при $\varepsilon = 0$ и $G_I \equiv 0$:

$$\check{f}_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \exp\left(\pm \frac{m}{\hbar^2 k_\perp} \int_0^s G_R ds\right). \quad (67)$$

При условии, что G_R является нечетной функцией s , стремящейся к конечному значению при $|s| \rightarrow \infty$, одно из этих решений затухает как при положительных, так и при отрицательных значениях s . Используя это локализованное решение как нулевое приближение, спектр можно найти в первом порядке теории возмущений, предполагая $|\varepsilon| \ll \Delta_0$.

Для произвольного значения завихренности функция G_R не обязательно является нечетной. Для того, чтобы воспользоваться теорией возмущений, необходимо проделать калибровочное преобразование [106, 107]

$$\check{f} = \left(\frac{s + i\hat{\sigma}_z b}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right)^\beta \check{w}, \quad (68)$$

где новая волновая функция \check{w} удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left[-i\hat{\tau}_3 \frac{\hbar^2 k_\perp}{m} \frac{\partial}{\partial s} + \hat{\tau}_1 G_R^{(\beta)} - \hat{\tau}_2 G_I^{(\beta)} + \varepsilon_d \right] \check{w} = \varepsilon \check{w}. \quad (69)$$

Здесь

$$\varepsilon_d = -\beta \frac{\hbar^2 k_\perp}{m} \frac{b}{s^2 + b^2} \quad (70)$$

— доплеровский сдвиг энергии, а

$$\begin{aligned} G_R^{(\beta)} &= D_M \left(\sqrt{s^2 + b^2} \right) \text{Re} \left\{ \left[\frac{s + ib}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right]^{M-2\beta} \right\}, \\ G_I^{(\beta)} &= D_M \left(\sqrt{s^2 + b^2} \right) \text{Im} \left\{ \left[\frac{s + ib}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right]^{M-2\beta} \right\} \end{aligned} \quad (71)$$

действительная и мнимая части недиагонального потенциала соответственно. Выбирая β таким образом, чтобы значение $M - 2\beta$ было нечетным, можно добиться того, чтобы $G_R^{(\beta)}(s)$ будет нечетной функцией. Сравнивая (69) и (66) нетрудно видеть, что в результате такого калибровочного преобразования в уравнении появляется доплеровский сдвиг уровней энергии (70). В принципе, слагаемые ε_d и $G_I^{(\beta)}$ по отдельности

не обязательно малы по сравнению с Δ_0 . Поэтому теория возмущений работает только тогда, когда поправки для энергии уровней от членов $\hat{\sigma}_y G_I^{(\beta)}$ и ε_d почти компенсируют друг друга. Аномальные ветви спектра пересекают уровень Ферми при некоторых значениях прицельного параметра $-\mu_j/k_\perp$, поэтому теория возмущений должна работать вблизи этих точек.

Итак, в качестве функции нулевого приближения мы используем

$$\check{w}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \exp \left(-\frac{m}{\hbar^2 k_\perp} \int_0^s G_R^{(\beta)} ds \right).$$

Подставляя \check{w}_β в уравнение (69), умножая слева на \check{w}_β^+ , мы получаем выражение для спектра

$$\varepsilon_M^{(\beta)} = \frac{\int_0^\infty [\varepsilon_d + G_I^{(\beta)}(s)] e^{-K(s)} ds}{\int_0^\infty e^{-K(s)} ds}, \quad (72)$$

где

$$K(s) = \frac{2m}{\hbar^2 k_\perp} \int_0^s G_R^{(\beta)}(t) dt. \quad (73)$$

Для одноквантового вихря ($M = 1$) надо положить $\beta = 0$, тогда выражение (72) дает спектр Кароли – де Жена – Матрикона [11]. Чтобы получить спектр двухквантового вихря ($M = 2$), необходимо выбрать значение параметра $\beta = 1/2$, спектр трёхквантового вихря ($M = 3$) получается при $\beta = 0$ и $\beta = 1$, и т. д.

Типичное поведение аномальных веток для случаев $M = 1, 2, 3$ показано на Рис. 6. Сравнивая спектры $\varepsilon_M^{(\beta)}$ с результатами численного решения спектральной задачи для уравнения (66), нетрудно видеть, что аналитический метод, основанный на теории возмущений дает очень точное выражение для аномальных веток спектра в области малых энергий.

Чтобы перейти от непрерывной квазиклассической переменной b к дискретным значениям μ надо учесть квантование углового момента $\mu = -k_\perp b$ с помощью правила Бора–Зоммерфельда, примененного к паре канонических переменных (μ, θ_p) [108, 109]:

$$\int_0^{2\pi} \mu(\theta_p) d\theta_p = 2\pi(n + \eta), \quad (74)$$

где n - целое число, а $\eta = \{M/2\}$, где $\{\dots\}$ - взятие дробной части. В случае нечетного (четного) значения завихренности M получаем $\mu = n + 1/2$ ($\mu = n$).

3.5. Трансформация аномальных ветвей спектра в мезоскопическом сверхпроводнике

Как уже обсуждалось выше, существуют два механизма трансформации аномальных веток спектра в многовихревых конфигурациях: (i) туннелирование квазичастиц между состояниями, локализованными на близко расположенных вихрях; (ii) нормальное рассеяние квазичастиц, которое начинает играть существенную роль, когда вихри расположены достаточно близко к границе образца. Для того, чтобы изучить оба этих механизма, рассмотрим две модельные задачи: (i) электронная структура многовихревой конфигурации, расположенной достаточно далеко от границ образца, так, что можно пренебречь граничными эффектами; (ii) изменение электронной структуры вихря при его приближении к границе сверхпроводника.

– *Переход от многоквантового вихря к вихревой молекуле*

В этом разделе мы рассмотрим модификацию квазичастичного спектра многовихревой конфигурации при изменении расстояния между вихрями от 0 (что соответствует многоквантовому вихрю) до значений, намного превышающих размер вихревого кора,

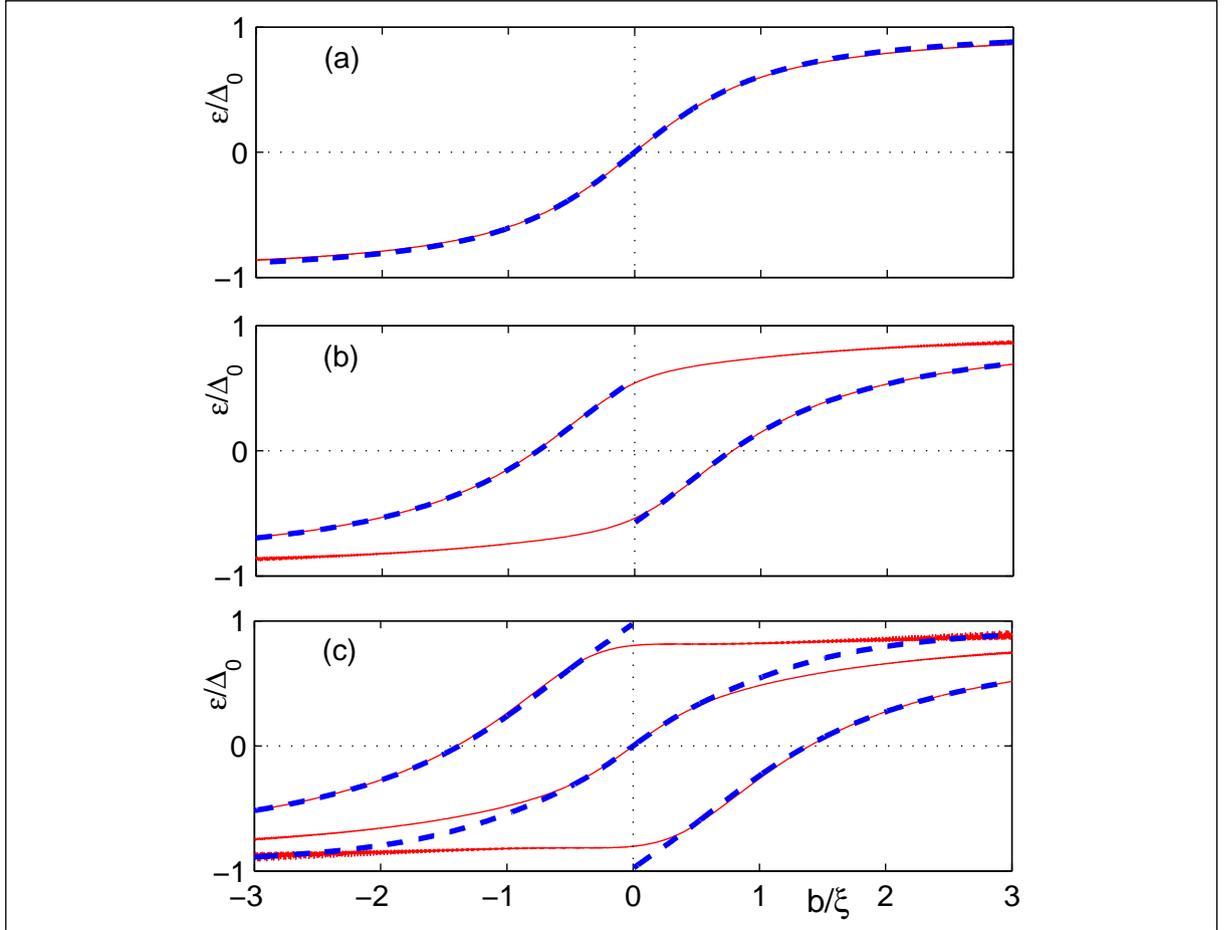


Рис. 6: Аномальные ветви спектра как функции прицельного параметра b для $k_z = 0$, полученные из уравнения (72) (пунктирные линии) для $M = 1$ (a), $M = 2$ (b), $M = 3$ (c). Аномальные ветви, полученные с помощью численного решения уравнений (55), показаны сплошными линиями. Профиль параметра порядка задается функцией: $D_M(r) = \Delta_0(r/\sqrt{r^2 + \xi^2})^M$, значение параметра $k_F \xi = 200$.

когда вихри могут считаться практически изолированными. Чтобы избежать излишней сложности рассмотрения, мы сосредоточимся на случае, когда вихревая конфигурация состоит из двух вихрей, расположенных на расстоянии a , которое контролируется внешним магнитным полем.

Предполагается, что вихри ориентированы вдоль оси z , тогда в плоскости (xy) координаты сингулярностей фазы параметра порядка можно выбрать следующим образом $\mathbf{r}_{1,2} = (\pm a/2, 0)$. Для квазичастиц, распространяющихся вдоль квазиклассических траекторий можно определить проекции углового момента $\mu = [\mathbf{r}, \mathbf{k}_F] \cdot \mathbf{z}_0 = k_F r \sin(\theta_p - \theta)$ на ось вихря, расположенного в точке \mathbf{r}_i . Если пренебречь туннелированием квазичастиц между вихрями, то волновая функция может быть представлена в виде суперпозиции состояний, локализованных на различных вихрях с энергиями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{v1} &= -\omega[\mu - (k_{\perp} a/2) \sin \theta_p], \\ \varepsilon_{v2} &= -\omega[\mu + (k_{\perp} a/2) \sin \theta_p]. \end{aligned}$$

Рассмотрим окрестность точки вырождения спектра, например, $\theta_p = 0$ (см. Рис. 7(a)). Траектория с углом ориентации $|\theta_p| \ll \xi/a$ проходит через коры обоих вихрей, и поэтому трансформация спектра за счет перекрытия волновых функций может быть найдена в рамках стандартной теории возмущений для почти вырожденной двухуровневой системы [110]:

$$(\varepsilon - \varepsilon_{v1})(\varepsilon - \varepsilon_{v2}) = (\delta\varepsilon)^2, \quad (75)$$

Трансформация спектра (75) приводит к расщеплению изоэнергетических линий на плоскости $\mu - \theta$ в окрестности точки вырождения спектра ($\theta_p = 0$ в нашем случае).

$$\omega\mu = -\varepsilon \pm \sqrt{\omega^2(k_F a/2)^2 \theta_p^2 + (\delta\varepsilon)^2}. \quad (76)$$

Туннелирование квазичастиц между вихрями определяется экспоненциально малым перекрытием волновых функций, локализованных в окрестности коров, таким образом, что расщепление уровней энергии определяется фактором $\delta\varepsilon \sim \Delta_0 \exp(-a/\xi)$. Таким образом, оценка расщепления $\delta\mu \simeq \delta\varepsilon/\omega$ изоэнергетических линий на плоскости (μ, θ_p) имеет вид:

$$\delta\mu(a) \sim k_F \xi \exp\left(-\frac{a}{\xi}\right). \quad (77)$$

Приведенное выше рассмотрение справедливо в случае, когда изменение спектра за счет перекрытия волновых функций не слишком велико. Это означает, что вихри не должны быть расположены слишком близко, то есть мы имеем ограничение на расстояние между вихрями $a \gg \xi$.

Для того, чтобы исследовать трансформацию спектра в области расстояний $a \leq \xi$ необходимо численно решить квазиклассические уравнения Андреева (50) и найти таким образом изоэнергетические линии на плоскости $\mu - \theta_p$. Получающиеся в результате квазиклассические орбиты в системе состоящей из двух вихрей показаны на Рис. 7(a) для $a = 2.5\xi$ и $a = 1.5\xi$. Из Рис. 7 видно, что расщепление квазиклассических орбит растет по мере уменьшения a . Когда $a \sim \xi$, расщепление становится настолько большим ($\delta\varepsilon \sim \Delta_0$), что простые уравнения (76),(91) уже не работают, так как спектр искажается на всем интервале углов $0 < \theta_p < 2\pi$, а не только в окрестности точек вырождения. Таким образом, при уменьшении расстояния a , орбиты $b = \pm(a/2) \sin \theta_p$, соответствующие двум изолированным вихрям, переходят в две линии $\mu = \pm\mu_0$, соответствующие двух-квантовому вихрю (показаны коротким пунктиром на Рис. 7(a)).

При больших расстояниях $a \geq \xi$ расщепление квазиклассических орбит в точках вырождения спектра мало. Начиная с некоторого расстояния необходимо учитывать туннелирование Ландау–Зинера между классическими орбитами (μ, θ_p) плоскости, вероятность которого определяется следующим образом [110]:

$$W = \exp\left(-4\text{Im} \int_0^{i\theta_p^*} \mu(\theta_p) d\theta_p\right), \quad (78)$$

где $\theta_p^* = 2\delta\varepsilon/(\omega k_{\perp} a)$ и $\mu(\theta_p)$ находится из уравнения (76) с нижним знаком. В результате получаем следующее выражение для вероятности туннелирования между квазиклассическими орбитами:

$$W = \exp(-2\pi(\delta\mu/\Delta\mu)^2), \quad (79)$$

где $\Delta\mu = \sqrt{k_{\perp} a}$ — квантово-механическая неопределенность углового момента. Таким образом, туннелированием между квазиклассическими орбитами можно пренебречь, если $\delta\mu \gtrsim \Delta\mu$.

Изложенные выше результаты для системы двух вихрей могут быть непосредственным образом обобщены на систему M вихрей. В этом случае мы имеем M квазиклассических орбит на плоскости (μ, θ_p) . Расстояние между орбитами в точках вырождения, то есть при таких значениях параметров, когда траектория проходит через несколько вихрей одновременно, зависит от расстояния между соответствующими вихрями. Следуя работам [108, 109], дискретные уровни энергии могут быть получены с помощью правила квантования Бора–Зоммерфельда для канонически сопряженных переменных μ и θ_p :

$$\int_0^{2\pi n\theta} \mu(\theta_p) d\theta_p = 2\pi(n + \eta), \quad (80)$$

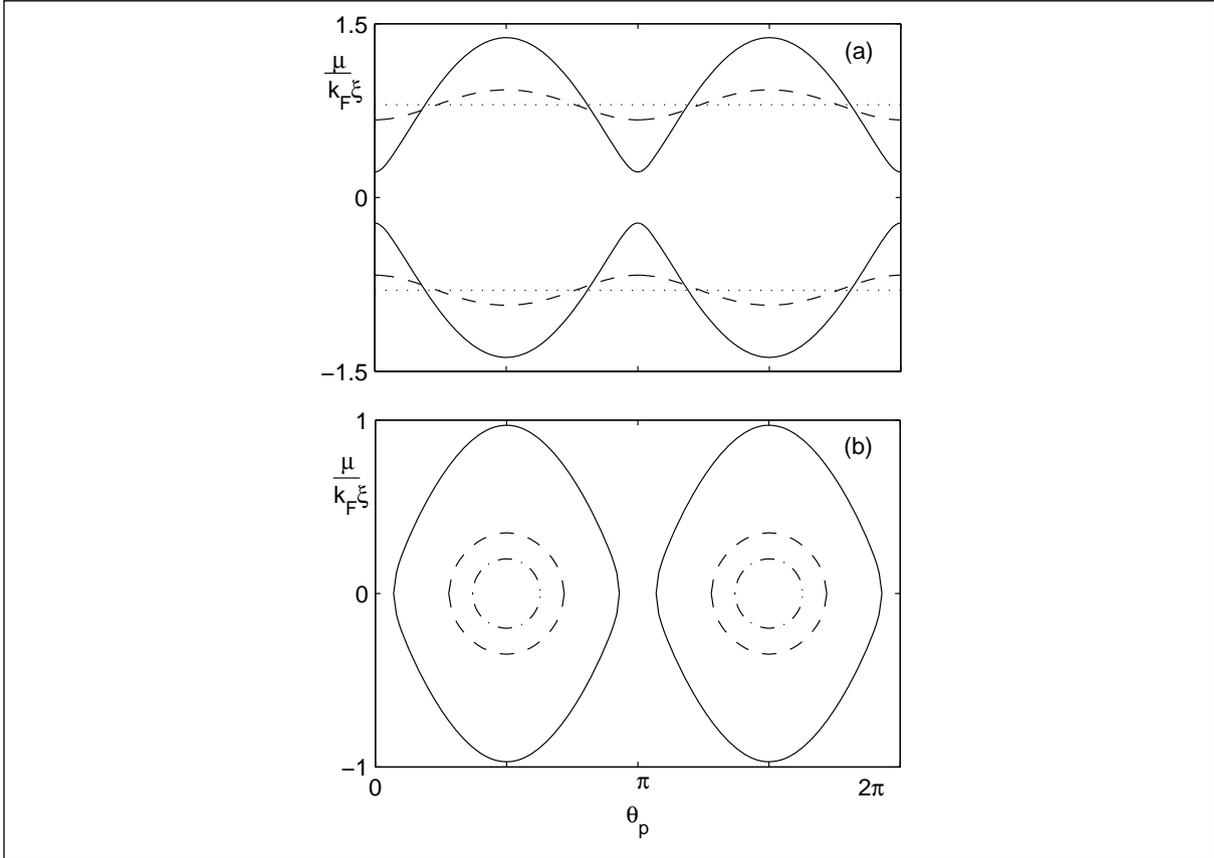


Рис. 7: Квазиклассические орбиты на плоскости $\mu - \theta_p$ для случая $\varepsilon = 0$. (а): система из двух вихрей на расстоянии $a = 2.5\xi$ (сплошные линии) и $a = 1.5\xi$ (пунктирные линии). Коротким пунктиром показаны орбиты, соответствующие двухквантовому вихрю, то есть $a = 0$. (б): система вихрь–антивихрь, $a = 2.5\xi$ (сплошные линии), $a = 1.7\xi$ (пунктирные линии) и $a = 1.6\xi$ (штрих-пунктирные линии).

где n и n_θ - целые числа, $2\pi n_\theta$ - период функции $\mu(\theta_p)$ ($1 \leq n_\theta \leq M$), а η - некоторое число порядка 1. Заметим, что период $\mu(\theta_p)$ может быть больше, чем 2π ($n_\theta > 1$), если нельзя пренебречь переходами Ландау–Зинера между некоторыми орбитами. В зависимости от отношения $\delta\mu(a_{ij})/\Delta\mu$ правило квантования (80) должно применяться к орбитам $\mu_i(\theta_p)$ или $\mu_i^*(\theta_p)$. В интервале импульсов

$$k_F \sqrt{1 - [\min(a_{ij})/a_c]^2} \ll |k_z| < k_F \quad (81)$$

расщепление изоэнергетических линий несущественно, поскольку $\delta\mu(a_{ij}) \ll \Delta\mu$. Поэтому уравнение (80), примененное к орбитам $\mu_i(\theta_p)$, определяет спектр Кароли – де Жена – Матрикона, характеризующийся минищелью на уровне Ферми $\omega_0/2 = \omega(k_z = 0)/2$. В случае $\min(a_{ij}) > a_c$ ответ Кароли – де Жена – Матрикона справедлив во всем интервале импульсов квазичастиц. Если же вихри образуют кластер, появляется некоторый интервал импульсов $|k_z| < k_z^*$,

$$k_z^* = k_F \sqrt{1 - [\min(a_{ij})/a_c]^2}, \quad (82)$$

где квазичастичное туннелирование между вихрями приводит к качественной перестройке спектра. В этом случае спектр может быть получен применением правила квантования (80) к модифицированным орбитам $\mu_i^*(\theta_p)$:

$$\varepsilon_{ni}(k_z) \approx \frac{\Delta_0}{\xi} \left[\frac{n + \zeta}{k_\perp} + b_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M) \right], \quad (83)$$

где $i = 1, \dots, M$. Легко видеть, что спектр (83) переходит в спектр многоквантового вихря [87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94] в пределе $a_{ij} \rightarrow 0$, когда $|b_i| \lesssim \xi$. Значения эффективных прицельных параметров $b_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M)$ определяются геометрией и размерами вихревого кластера. Рассматривая в качестве примера двух (трех)-вихревую конфигурацию, мы получаем, что $b_{1,2} \sim \pm a$ ($b_{1,3} \sim \pm a$, $b_2 = 0$). Следует отметить, что выражение (83) лишь качественно описывает трансформацию спектра системы M вихрей в режиме, когда можно пренебречь туннелированием между квазиклассическими орбитами. Как уже было отмечено выше, туннелирование необходимо учесть для того, чтобы описать переход к спектру изолированных вихрей. При этом, оказывается недостаточно квазиклассической формулы для вероятности туннелирования (78), справедливой только для $W \ll 1$. В следующем разделе на примере системы двух вихрей будет решена задача о спектре квазичастиц с учетом межвихревого туннелирования. Из результатов решения этой задачи будет видно, каким образом происходит переход от спектра изолированного вихря к спектру многоквантового вихря при уменьшении расстояния между вихрями.

— Система двух вихрей: решение задачи о спектре

В случае, если изолированный одноквантовый вихрь расположен в точке $\mathbf{r} = 0$, а распределение параметра порядка имеет вид $\Delta_1(\mathbf{r}) = D_1(r)e^{i\theta}$, стандартное решение уравнений Андреева, описывающее квазичастицы, локализованные в коре вихря имеет вид: $\check{\psi} = \exp(i\mu\theta_p)\check{\psi}_0(s, \theta_p)$, где

$$\check{\psi}_0(s, \theta_p) = \exp\left(\frac{i}{2}\hat{\tau}_3\theta_p\right) \sqrt{\frac{\Delta_0}{2\hbar V_\perp \Lambda}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-K(s)},$$

$$K(s) = \frac{1}{\hbar V_\perp} \int_0^s \frac{t D_1(t)}{|t|} dt, \quad \Lambda = \frac{2\Delta_0}{\hbar V_\perp} \int_0^{+\infty} e^{-2K(t)} dt.$$

Следующий наш шаг состоит в том, чтобы найти волновую функцию в системе из двух вихрей, расположенных в точках $\mathbf{r}_\pm = (\pm a/2, 0)$. Мы будем рассматривать предел больших расстояний между вихрями $a > \xi$, поскольку, как было показано в предыдущем разделе, именно при таких расстояниях становится существенным туннелирование между квазиклассическими орбитами и происходит формирование спектра изолированных вихрей. При таких предположениях естественно использовать приближение сильной связи для волновой функции квазичастиц:

$$\check{\psi} = c_+(\theta_p)\hat{T}_+\check{\psi}_0(s, \theta_p) + c_-(\theta_p)\hat{T}_-\check{\psi}_0(s, \theta_p), \quad (84)$$

где оператор

$$\hat{T}_\pm = \exp\left(\frac{i\hat{\tau}_3\varphi_\pm}{2} \mp \frac{a \cos \theta_p}{2} \left(ik_\perp + \frac{\partial}{\partial s}\right) \pm \frac{ik_\perp a}{2}\right)$$

сдвигает состояния Кароли – де Жена – Матрикона, соответствующие изолированному вихрю в точки $\mathbf{r}_\pm = (\pm a/2, 0)$, φ_\pm - регулярная часть фазы параметра порядка в центре правого (левого) вихря. Коэффициенты разложения c_\pm удовлетворяют условию $c_\pm(\theta_p + 2\pi) = -c_\pm(\theta_p)$, которое обеспечивает однозначность волновой функции. В угловых интервалах $|\sin \theta_p| > \xi/a$ траектория квазичастиц проходит только через один вихрь, поэтому состояния локализованы лишь на одном из вихрей: $c_+ = 0$ или $c_- = 0$.

Угловые интервалы $|\sin \theta_p| < \xi/a$ требуют отдельного рассмотрения, поскольку в этом случае траектория может проходить через центры двух вихрей одновременно. Подставляя выражение (84) в квазиклассические уравнения с гамильтонианом (48), умножая на функции $(\hat{T}_\pm\check{\psi}_0)^\dagger$, и интегрируя по s , мы получаем:

$$-\omega\hat{\mu}\check{c} - te^{i\hat{\tau}_3 k_\perp a(\cos \theta_p - 1)}\hat{\tau}_1\check{c} = \varepsilon\check{c}, \quad (85)$$

где $\check{c} = (c_+, c_-)$. Для траекторий с углами θ_p , близкими к 0 или π приближенное выражение для амплитуды туннелирования между вихрями имеет вид: $t \simeq \Delta_0 e^{-ak_F/(\xi k_\perp)}$. Для дальнейших вычислений удобно ввести функцию $\check{b} = \exp(i\varepsilon\theta_p/\omega - ik_\perp a \hat{\tau}_3 (\cos \theta_p - 1)/2) \check{c}$. Тогда в интервале углов $|\theta_p| \ll \xi/a$ уравнение (85) имеет вид :

$$-\omega \hat{\mu} \check{b} + \frac{k_\perp a \omega}{2} \theta_p \hat{\tau}_3 \check{b} - t \hat{\tau}_1 \check{b} = 0 . \quad (86)$$

Последнее уравнение описывает межзонное туннелирование в полупроводниках [111], а также одномерное движение дираковского электрона в однородном электрическом поле. Его решение может быть выражено через функции параболического цилиндра $D_{i\alpha}(\sigma)$:

$$\check{b} = \begin{pmatrix} d_1 D_{i\alpha}(\sigma) + d_2 D_{i\alpha}(-\sigma) \\ \sqrt{-i\alpha} (d_1 D_{i\alpha-1}(\sigma) - d_2 D_{i\alpha-1}(-\sigma)) \end{pmatrix}, \quad (87)$$

где $\alpha = t^2/(\omega^2 k_\perp a) \sim (\delta\mu(a)/\Delta\mu)^2$, и $\sigma = \theta_p \sqrt{k_\perp a}/i$. Рассматривая асимптотики функций $D_{i\alpha}(\sigma)$ при значениях аргумента $\max[\alpha, 1]/\sqrt{k_\perp a} \ll |\theta_p| < \xi/a$ получаем: $\check{b}(\theta_p > 0) = \hat{S} \check{b}(\theta_p < 0)$, где

$$\hat{S} = e^{-\pi\alpha} \hat{I} + i e^{i\hat{\tau}_3 \gamma} (\hat{\tau}_2 \text{Re}\tau + \hat{\tau}_1 \text{Im}\tau) e^{-i\hat{\tau}_3 \gamma},$$

$$\tau = \tau(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-i\alpha)}{\sqrt{-2\pi i\alpha}} e^{-\pi\alpha/2} \sinh(\pi\alpha),$$

\hat{I} – единичная матрица $\gamma = k_\perp a \theta_p^2/4 + \alpha \ln(|\theta_p| \sqrt{k_\perp a})$, и $\Gamma(x)$ - гамма функция. При углах θ_p , близких к π ($|\theta_p - \pi| \ll \xi/a$) решение может быть получено из решения для углов близких к нулю ($|\theta_p| \ll \xi/a$): $\check{b}(|\theta_p - \pi|) = \hat{\tau}_1 \check{b}(|\theta_p|)$. Сшивая волновые функции в различных угловых интервалах и используя условие периодичности $\check{c}(\theta_p) = -\check{c}(\theta_p + 2\pi)$ получаем выражение для спектра:

$$\cos(\pi\varepsilon/\omega) = \pm e^{-\pi\alpha/2} \sqrt{2 \sinh(\pi\alpha)} \sin(\pi\chi), \quad (88)$$

где $\pi\chi = k_\perp a + \alpha \ln(k_\perp \xi^2/a) + \arg(\Gamma(1-i\alpha)) + \pi/4$. Обобщение процедуры сшивки на случай M - квантового вихря представляется очевидным. Спектр, рассчитанный на основе уравнения (88) показан на Рис. 8(a) для типичного значения параметра $k_F \xi = 200$ при расстоянии между вихрями $a > a_c$ (Рис.8(a)) и $a < a_c$ (Рис.8(b)).

Легко видеть, что трансформация спектра $\varepsilon(k_z)$ согласуется с результатами качественного рассмотрения в предыдущем разделе. При уменьшении расстояния, когда a становится меньше a_c , начинается переход к спектру двухквантового вихря в области

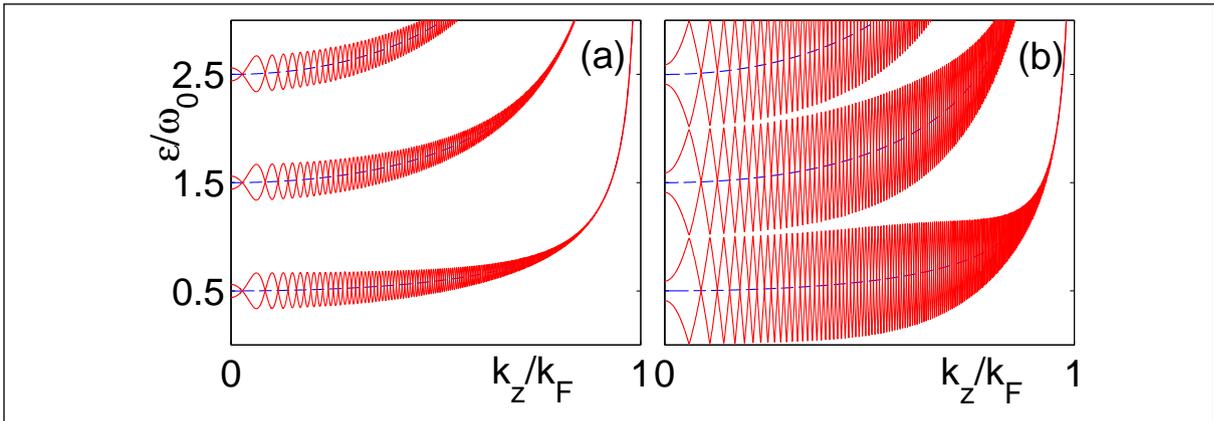


Рис. 8: Квазичастичный спектр системы из двух вихрей, рассчитанный с помощью выражения (88) для $a = 5\xi$ (a) и $a = 3.5\xi$ (b). Спектр Кароли – де Жена – Матрикона показан пунктирными линиями.

малых k_z , удовлетворяющих условию $\alpha > 1$. При $\alpha \ll 1$ мы получаем спектр Кароли – де Жена – Матрикона с малыми осциллирующими поправками

$$\varepsilon - \omega(n + 1/2) \simeq \mp (-1)^n \omega \sqrt{2\alpha/\pi} \sin(k_{\perp} a + \pi/4). \quad (89)$$

Эффективное значение минищели $\varepsilon_{min} = \omega_0(1/2 - \sqrt{2\alpha/\pi})$ обращается в ноль при $a \sim a_c$. Для промежуточных значений $\sqrt{k_{\perp} \xi^2/a} \gg \alpha \gg 1$ спектр имеет вид (83), если принять $b_{1,2} = \pm \chi/k_{\perp}$. Это выражение совпадает с результатом решения уравнения (85) в рамках стандартного квазиклассического приближения в пределе $\alpha \gg 1$

$$\frac{\pi \chi}{k_{\perp} a} = 1 + \int_0^{\xi/a} \left(\sqrt{\theta_p^2 + \frac{4\alpha}{k_{\perp} a}} - \theta_p \right) d\theta_p. \quad (90)$$

Как будет показано в следующих разделах, описанная здесь трансформация спектра за счет туннелирования квазичастиц между вихрями приводит к существенному изменению таких экспериментально измеримых характеристик, как плотность состояний и тепловой кондактанс вдоль вихревых линий.

— *Нормальное рассеяние квазичастиц: вихрь около границы образца*

Напомним, что обсуждая в предыдущей секции поведение аномальных ветвей спектра, мы пренебрегали эффектами, связанными с нормальным рассеянием квазичастиц, предполагая, что вихри находятся достаточно далеко от границ сверхпроводника. Это предположение, естественно, нарушается в случае, когда расстояние между вихрями становится сравнимым с размерами сверхпроводящего образца. С ростом размера вихревого кластера L_v некоторые из вихрей могут приблизиться к поверхности настолько, что их спектр будет определяться нормальным отражением от границы. Если размеры сверхпроводника достаточно малы, влияние нормального отражения квазичастиц от границы будет существенным даже в случае, когда вихрь расположен в центре образца [13, 86]. Для того, чтобы разделить эффекты, связанные с межвихревым туннелированием и нормальным отражением, мы рассмотрим модельную задачу, когда расстояние между вихрями настолько велико (т.е. $a_{ij} > a_c$), что вихревые квазичастичные состояния практически не взаимодействуют. Таким образом, мы будем исследовать модификацию аномальной ветви спектра в случае, когда один вихрь расположен вблизи границы сверхпроводник/изолятор (вакуум). Предполагается, что граница является гладкой и зеркально отражающей в плоскости xy , перпендикулярной вихревой линии.

На плоскости (μ, θ_p) мы можем определить изоэнергетические линии, соответствующие падающей и отраженной траекториям. Пересечение этих линий в области углов $|\theta_p| \ll 1$ соответствует ситуации, когда обе траектории проходят через кор вихря. Вырождение в точке пересечения должно быть снято за счет расщепления уровней из-за взаимодействия состояний на падающей и отраженной траекториях.

Для того, чтобы обрисовать качественную картину трансформации вихревого спектра, в данном разделе мы рассмотрим более детально простейшую ситуацию, когда вихрь расположен в точке $(-a/2, 0)$ вблизи плоской границы сверхпроводника, занимающего полуплоскость $x < 0$. Если пренебречь отражением квазичастиц от границы, изоэнергетическая линия на плоскости (μ, θ_p) определяется уравнением $\mu_v(\theta_p) = -\varepsilon/\omega - (k_{\perp} a/2) \sin \theta_p$. Для плоской поверхности параметры падающих и отраженных траекторий соотносятся следующим образом: $\tilde{b} = -b$ и $\tilde{\theta}_p = \pi - \theta_p$. В результате мы получаем еще одну изоэнергетическую линию: $\mu_{av}(\theta_p) = -\mu_v(\pi - \theta_p) = \varepsilon/\omega + (k_{\perp} a/2) \sin \theta_p$, которая соответствует отраженным траекториям. Заметим, что $\mu_{av}(\theta_p)$ совпадает с изоэнергетической линией, соответствующей мнимому антивихрю, расположенному в точке $(0, a/2)$ вне сверхпроводящей области. Это означает, что спектр вихря около плоской поверхности может быть получен из рассмотрения спектра системы вихрь–антивихрь. В самом деле, параметр порядка, соответствующий системе вихрь–антивихрь не изменяется при операции отражения в плоскости $x = 0$: $\Delta(x, y) = \Delta(-x, y)$, что озна-

чают соответствующую симметрию волновых функций: $\check{\Psi}(x, y) = \pm \check{\Psi}(-x, y)$. Нечетные волновые функции удовлетворяют граничным условиям на плоской поверхности $\check{\Psi}(0, y) = 0$. Что касается четных волновых функций, то они удовлетворяют другому условию: $\partial \check{\Psi}(0, y) / \partial x = 0$, и соответствующие уровни энергии должны быть исключены, для того, чтобы получить спектр вихря около плоской границы.

Изоэнергетические линии $\mu_{v,av}(\theta_p) = \pm[\varepsilon/\omega + (k_{\perp}a/2) \sin \theta_p]$ пересекаются в некоторых точках, в частности, при $\theta_p = \pi n$ в случае $\varepsilon = 0$, где n — целое число. Вырождение в точках пересечения снимается за счет расщепления, аналогично случаю системы двух вихрей. Рассматривая взаимодействие двух состояний с близкими энергиями $\varepsilon_v = -\omega[\mu + (k_{\perp}a/2) \sin \theta_p]$ и $\varepsilon_{av} = \omega[\mu - (k_{\perp}a/2) \sin \theta_p]$, мы снова получаем секулярное уравнение (75) с $\varepsilon_{v1} = \varepsilon_v$ и $\varepsilon_{v2} = \varepsilon_{av}$. Таким образом, квазиклассические орбиты в окрестности точки вырождения $\theta_p = 0$ определяются следующим выражением:

$$\varepsilon = \pm \sqrt{(\omega\mu)^2 + (\delta\varepsilon)^2} - \omega(k_{\perp}a/2)\theta_p. \quad (91)$$

Классически запрещенная область углов при $\varepsilon = 0$ имеет ширину $\delta\theta_p = 4\delta\varepsilon/(\omega k_{\perp}a)$. Можно предположить, что появление такой запрещенной области углов объясняет провал в профиле локальной плотности состояний, который наблюдался при численном исследовании спектра вихря вблизи плоской границы [85]. Как будет показано ниже, появление запрещенной области углов действительно приводит к подавлению плотности состояний на уровне Ферми.

На Рис. 7б показаны изоэнергетические линии в системе вихрь–антивихрь с расстояниями $a = 2.5\xi$, $a = 1.7\xi$, и $a = 1.6\xi$. Из этого рисунка видно, что в отличие от случая пары вихрей, уменьшение расстояния между вихрем и антивихрём приводит к сжатию квазиклассических орбит. При значении расстояния $a/\xi = 1.5$ квазиклассические орбиты, соответствующие энергии $\varepsilon = 0$ стягиваются в точку $\theta_p = \pm\pi/2$, $\mu = \pm a/2$, что соответствует значительному подавлению плотности состояний на уровне Ферми.

В области больших расстояний $a \gg \xi$ расщепление квазиклассических орбит мало, также как и для пары вихрей. Для того, чтобы оценить вероятность туннелирования между квазиклассическими орбитами, используем теорию переходов Ландау–Зинера. В данном случае вероятность туннелирования равна:

$$W = \exp\left(-4\text{Im} \int_0^{i\mu^*} \theta_p(\mu) d\mu\right), \quad (92)$$

где $\mu^* = \delta\varepsilon/\omega$ и $\theta_p(\mu)$ определяется уравнением (91) с верхним знаком. В итоге мы получаем оценку для вероятности туннелирования $W \sim \exp(-2\pi(\delta\theta_p/\Delta\theta_p)^2)$, где $\Delta\theta_p \sim (k_{\perp}a)^{-1/2}$ -квантово–механическая неопределенность угла ориентации траектории. Таким образом, туннелирование между квазиклассическими орбитами несущественно пока $\delta\theta_p \gtrsim \Delta\theta_p$, т.е. при $d < d_c$, где $d_c \sim (\xi/2) \ln(k_{\perp}\xi)$ - критическое расстояние вихря от поверхности.

В случае вихря около плоской границы возможно также и более строгое решение задачи о спектре в рамках подхода, изложенного в предыдущем разделе для пары вихрей. Общий сценарий трансформации спектра при приближении вихря к поверхности показан на Рис. 9.

Таким образом, в случае если вихрь находится вблизи границы сверхпроводника, спектр квазичастиц, локализованных в коре вихря, существенным образом искажается. Причиной такого поведения спектра является интерференция квазичастичных волн при отражении от границы. Следует отметить, что хотя мы рассмотрели только простейший случай плоской границы сверхпроводника, качественный вид спектра, изображенного на Рис. 9, а также вывод о том, что при приближении вихря к поверхности происходит подавление плотности состояний, справедливы также и для границ, характеризующихся конечным значением кривизны. Однако, в ходе нашего анализа мы сделали существенное предположение о том, что сверхпроводник является полубес-

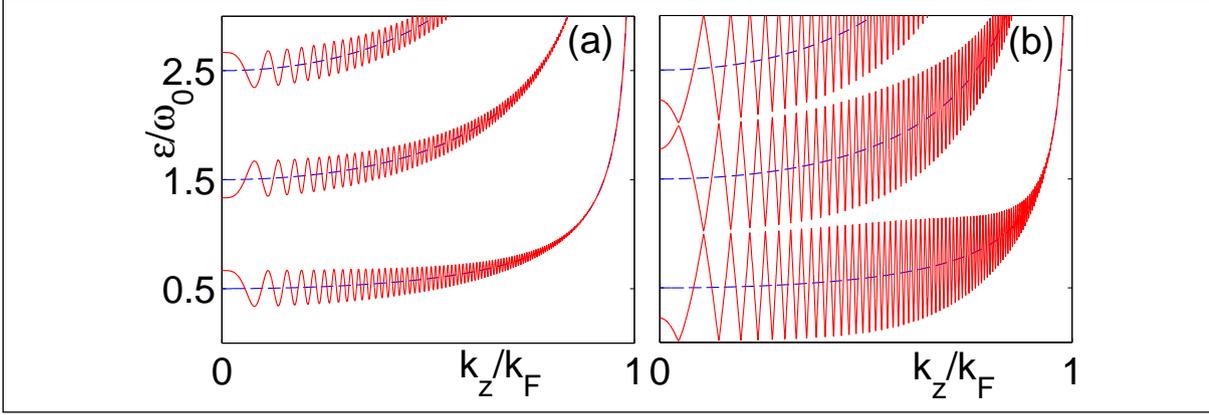


Рис. 9: Квазичастичный спектр для вихря около плоской границы на расстоянии $d = 2.5\xi$ (a), $d = 1.75\xi$ (b). Спектр Кароли – де Жена – Матрикона показан пунктирными кривыми.

конечным. Иными словами, мы рассмотрели лишь однократное нормальное отражение квазичастичной волны. Очевидно, что это предположение в общем случае не справедливо в сверхпроводящих образцах конечных размеров, где квазичастицы могут испытывать многократное рассеяние на границах. Чтобы понять, к каким последствиям приводит многократное рассеяние на границе, в следующем разделе мы рассмотрим модельную задачу о спектре квазичастиц в случае, когда вихрь находится в центре мезоскопического сверхпроводника, имеющего форму диска.

– *Вихрь в мезоскопическом диске*

Задача о спектре низкоэнергетических состояний, локализованных в коре вихря, расположенного в центре мезоскопического диска радиуса $R \gtrsim \xi$ рассматривалась в работах [13, 86]. Напомним, что в окрестности центра вихря распределение параметра порядка имеет вид $\Delta(\mathbf{r}) = D_M(r)e^{iM\theta}$, где $M = \pm 1$ – завихренность, $D_M(r)$ – модуль параметра порядка, (r, ϕ) – система полярных координат, причем начало координат $r = 0$ совпадает с центром диска. Все отличие данной задачи от рассмотренного выше случая вихря в бесконечном сверхпроводнике состоит в том, что теперь на границе диска при $r = R$ должно выполняться условие:

$$\check{\Psi}(R, \theta) = 0. \quad (93)$$

Заметим, что в силу выбора аксиально симметричной модельной геометрии задачи, одним из квантовых чисел, также как и в задаче о спектре вихря в бесконечном сверхпроводнике, является проекция углового момента на ось z . Таким образом, мы можем разделить переменные r и φ , что существенно упрощает задачу о нахождении спектра. Еще одно упрощение связано с использованием квазиклассического подхода, развитого в Разделе 3.2.

Благодаря аксиальной симметрии задачи, квазиклассическое уравнение Андреева (50) допускает разделение переменных s и θ_p таким образом, что волновую функцию можно записать в виде

$$\check{\psi}(s, \theta_p) = e^{i\mu\theta_p + iM\hat{\tau}_3\theta_p/2} \check{G}_\mu(s), \quad (94)$$

где $\mu = n + \chi/2$ – проекция углового момента на ось z , n – целое число, M – завихренность. Мы будем рассматривать траектории, проходящие близко к центру вихря, т.е., имеющие малый прицельный параметр $b \ll \xi$, что соответствует $|\mu| \ll k_F\xi$. Тогда оператор щели $\hat{\Delta}$ в (s, θ_p) представлении имеет вид:

$$\hat{\Delta} = \frac{D_M(s)}{2|s|} \{(s + M\hat{\mu}/k_F), e^{iM\theta_p}\}. \quad (95)$$

Соответственно, функция G_μ удовлетворяет следующему уравнению:

$$-i\hbar V_F \hat{\tau}_3 \frac{\partial}{\partial s} \check{G}_\mu + \hat{U}(s) \check{G}_\mu = \left(\varepsilon - \frac{\mu}{k_F \xi} \hat{W}(s) \right) \check{G}_\mu, \quad (96)$$

где матрицы $\hat{U}, \hat{W}(s)$ определены при $-R < s < R$:

$$\hat{U}(s) = D_M(s) \frac{s}{|s|} \hat{\tau}_1$$

$$\hat{W}(s) = D_M(s) \frac{\xi}{|s|} \hat{\tau}_2$$

Для того, чтобы вывести граничное условие для функции вдоль траектории $G_\mu(s)$ преобразуем выражение (49) с помощью метода стационарной фазы. Для данного значения μ мы получаем:

$$\check{\Psi}(R, \theta) = e^{i(k_F s^* - \pi/4)} \psi(s^*, \theta_1) + e^{i(\pi/4 - k_F s^*)} \check{\psi}(-s^*, \theta_2),$$

где $s^* = \sqrt{R^2 - (\mu/k_F)^2}$, а точками стационарности являются $\theta_1 = \theta + \arcsin(\mu/k_F R)$ и $\theta_2 = \theta + \pi - \arcsin(\mu/k_F R)$. Таким образом, при $|\mu| \ll k_F \xi$ мы получаем граничное условие для $G_\mu(s)$:

$$\check{G}_\mu(R) = e^{i\alpha - i\hat{\tau}_3 \varphi} \check{G}_\mu(-R) \quad (97)$$

где $\alpha = (\mu - 1/2)\pi - 2k_F R$ и $\varphi = M[\mu/(k_F R) - \pi/2]$.

Мы будем предполагать, что размер диска достаточно большой: $R > \xi$, поэтому естественно искать решение уравнения (96), дополненного граничными условиями (97) с помощью приближения сильной связи. Для этого рассмотрим продолжение функции $\check{G}_\mu(s)$ и коэффициентов $\hat{U}, \hat{W}(s)$ уравнения (96) на всю ось $-\infty < s < \infty$ используя условия периодичности:

$$\check{G}_\mu(s + 2R) = e^{i\alpha - i\hat{\tau}_3 \varphi} \check{G}_\mu(s)$$

$$\hat{U}, \hat{W}(s + 2R) = e^{-2i\hat{\tau}_3 \varphi} \hat{U}, \hat{W}(s).$$

Решение уравнения (96) будем искать в виде суперпозиции функций, локализованных при $s_n = 2nR$, которые описывают квазичастицы в коре вихря:

$$\check{G}_\mu = \sum_n \check{V}_n, \quad (98)$$

где общий член ряда равен:

$$\check{V}_n(s) = e^{in(\alpha - \hat{\tau}_3 \varphi)} e^{-K_M(s - s_n)} e^{i\hat{\tau}_3 \pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$K_M(s - s_n) = \int_{s_n}^s D_M(s - s_n) \text{sign}(s - s_n) \frac{ds}{\xi}.$$

Следуя стандартному методу сильной связи, мы подставляем решение в виде (98) в уравнение (96), умножаем на V_n^* слева и интегрируем по s , учитывая перекрытие лишь ближайших соседей. Опуская детали вычислений, приведем лишь итоговое выражение для спектра в виде

$$\varepsilon_\mu = \varepsilon_\mu^{(0)} + \delta \cos \alpha, \quad (99)$$

где $\delta = \Delta_0 / (\Lambda \cosh[2K(R)])$,

$$\Lambda = \frac{2m\Delta_0}{\hbar^2 k_r} \int_0^\infty e^{-2K(r)} dr.$$

и $\varepsilon_\mu^{(0)} = -\omega\mu$ – спектр Кароли – де Жена – Матрикона для вихря в бесконечном сверхпроводнике. На Рис. 10 показаны типичные спектры, вычисленные по формуле (99) для типичных значений параметров сверхпроводника $\Delta_0/E_F = 0.01$ или $k_F\xi \approx 200$. В расчётах был использован модельный профиль параметра порядка $|\Delta(r)| = \Delta_0 r / \sqrt{r^2 + \xi^2}$, хотя качественно спектр, описываемый выражением (99) не зависит от конкретного распределения $|\Delta(r)|$.

Последнее слагаемое уравнении (99) описывает мезоскопические флуктуации уровней энергии. Их амплитуда $\delta(k_r)$ может намного превышать расстояние между соседними уровнями Кароли – де Жена – Матрикона $\omega(k_r) \sim \Delta_0^2/E_F$ если R не намного превышает ξ . Ветви спектра, соответствующие различным μ могут пересекаться, а также пересекать уровень Ферми для не слишком больших μ . Амплитуда флуктуаций $\delta(k_r)$ уменьшается по мере того, как k_z приближается к k_F поскольку фактор $\cosh(2K(R))$ экспоненциально растёт с уменьшением k_r . Критическое значение радиуса R_c определяется из условия, что максимальное значение амплитуды $\delta(k_F)$ составляет половину расстояния между уровнями Кароли – де Жена – Матрикона $\omega_0 \equiv \omega(k_F)$. На Рис. 10(b) радиус $R = 4\xi_0$ близок к R_c для $\Delta_0/E_F = 0.01$.

Рассмотренная выше задача о спектре квазичастиц может быть также решена численно. Для численных расчетов в работах [13, 86] использовалось матричное представление операторов Боголюбова – де Жена в базисе собственных функций нормального (не сверхпроводящего) цилиндра радиуса R . Бесконечные матрицы обрезались так, чтобы число собственных состояний в базисе оставалось намного большим, чем число распространяющихся мод в волноводе из нормального металла. Для получающейся матрицы решалась задача на собственные значения. Следует отметить, что результаты численных расчётов находятся в очень хорошем согласии с приближенной аналитической теорией, описанной выше.

3.6. Плотность состояний

Используя результаты анализа квазичастичного спектра мы теперь можем исследовать измеряемые характеристики, например, плотность состояний

$$\nu(\varepsilon) = \sum_n \delta(\varepsilon - \varepsilon_n). \quad (100)$$

Во многих экспериментах по исследованию электронной структуры вихревого состояния с использованием сканирующей туннельной спектроскопии измеряемой величиной является не полная, а локальная плотность состояний

$$N(\mathbf{r}, \varepsilon) = \sum_n |u_n(\mathbf{r})|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_n), \quad (101)$$

где $u_n(\mathbf{r})$ – электронная компонента волновой функции квазичастиц, соответствующая уровню энергии ε_n (при этом, суммирование ведется по положительным и отрицательным уровням энергии ε_n). Собственные функции нормированы условием:

$$\int (|u_n(\mathbf{r})|^2 + |v_n(\mathbf{r})|^2) d^2\mathbf{r} = 1.$$

Обсудим локальную плотность состояний в вихревых структурах в мезоскопических сверхпроводниках. При этом мы будем пренебрегать дискретностью спектра квазичастиц. В этом случае можно использовать квазиклассическое приближение для описание движения квазичастиц (см. Раздел 3.2). На основе квазиклассического приближения был развит метод расчета локальной плотности состояний с помощью численного решения уравнений Эйленбергера для квазиклассических функций Грина [112]. Эф-

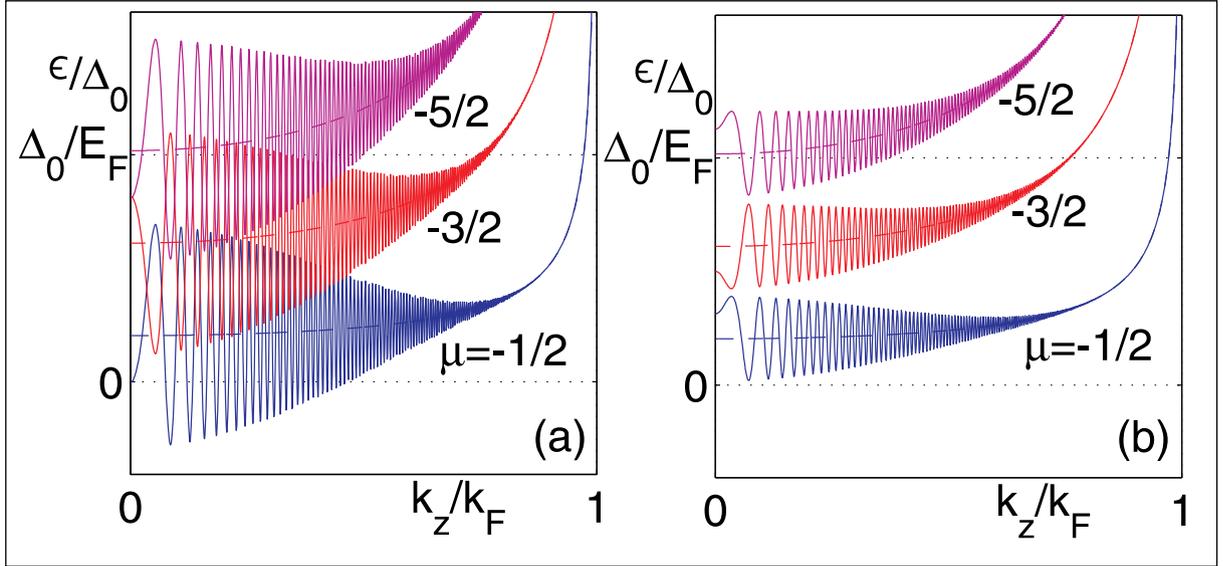


Рис. 10: Спектр уровней энергии состояний, локализованных в коре вихря в сверхпроводящем цилиндре радиуса $R/\xi_0 = 3.5$ (a) и $R/\xi_0 = 4.0$ (b) в зависимости от проекции импульса квазичастиц $k_z = \sqrt{k_F^2 - k_r^2}$ (сплошные линии). Спектр Кароли – де Жена – Матрикона показан пунктирными линиями.

эффективность численного решения уравнений Эйленберга существенно повышается благодаря представлению квазиклассических гриновских функций [113, 114] в виде:

$$\begin{pmatrix} G(\mathbf{r}, \mathbf{k}_F) & F(\mathbf{r}, \mathbf{k}_F) \\ \bar{F}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_F) & \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_F) \end{pmatrix} = \frac{-i\pi}{1+ab} \begin{pmatrix} 1 - a(x')b(x') & 2ia(x') \\ -2ib(x') & -1 + a(x')b(x') \end{pmatrix}. \quad (102)$$

Такая параметризация сводит систему четырех линейных уравнений первого порядка (уравнений Эйленберга) к двум независимым уравнениям первого порядка типа Риккати:

$$\begin{aligned} \hbar v_F \frac{\partial}{\partial x'} a(x') + [2\tilde{\omega}_n + \Delta^* a(x')] a(x') - \Delta &= 0, \\ \hbar v_F \frac{\partial}{\partial x'} b(x') - [2\tilde{\omega}_n + \Delta b(x')] b(x') + \Delta^* &= 0, \end{aligned} \quad (103)$$

где $x' = (\mathbf{k}_F \mathbf{r})/k_F = r \cos(\theta_p - \theta)$ представляет собой координату вдоль траектории, $\Delta(\mathbf{r}) = |\Delta| e^{i\Phi}$, $\Phi(\mathbf{r})$ — фаза параметра порядка, $i\tilde{\omega}_n = i\omega_n + m\mathbf{v}_F \mathbf{v}_s$, $\omega_n = \pi T(2n + 1)$ — мацубаровские частоты и

$$\mathbf{v}_s = \frac{1}{2m} \left(\hbar \nabla \Phi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)$$

— калибровочно инвариантная скорость сверхпроводящего конденсата. Выражение локальной плотности состояний в данной параметризации имеет вид [115]

$$N(\mathbf{r}, \varepsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \text{Re} \left\{ \frac{1-ab}{1+ab} \right\}_{i\omega_n = \varepsilon + i\gamma}, \quad (104)$$

где ε — энергия квазичастиц, а γ — параметр, отвечающий за упругое рассеяние квазичастиц.

Уравнения Эйленберга позволяют исследовать распределение локальной плотности состояний в произвольных вихревых структурах. В применении к мезоскопическим сверхпроводникам мы рассмотрим два характерных случая, уже обсуждавшихся выше, а именно, молекулу, состоящую из двух вихрей, и пару вихрь–антивихрь. Последний

случай, как уже упоминалось в точности описывает вихрь, расположенный вблизи плоской границы сверхпроводника.

В результате численного решения уравнений (103) мы получили распределения локальной плотности состояний, показанные на Рис. 11 для пары вихрей на расстоянии $a = 1.5\xi$ (верхний рисунок) и $a = \xi$ (нижний рисунок), а также для пары вихрь-антивихрь, показанные на Рис. 12 для $a = 2\xi$ (верхний рисунок) и $a = 1.5\xi$ (нижний рисунок). На Рис. 11 показано, как профиль локальной плотности состояний постепенно трансформируется из двух острых пиков, соответствующих изолированным вихрям в кольцо, соответствующее двухквантовому вихрю. Положения точек сингулярности фазы отмечены крестами. Из рисунка видно, что даже когда расстояние между вихрями существенно превышает длину когерентности, то есть размер кора вихря, положения пиков локальной плотности состояний не совпадают с положениями особенностей фазы. По мере уменьшения расстояния между вихрями два пика плотности состояний размываются в анизотропное кольцо, которое становится симметричным при слиянии вихрей.

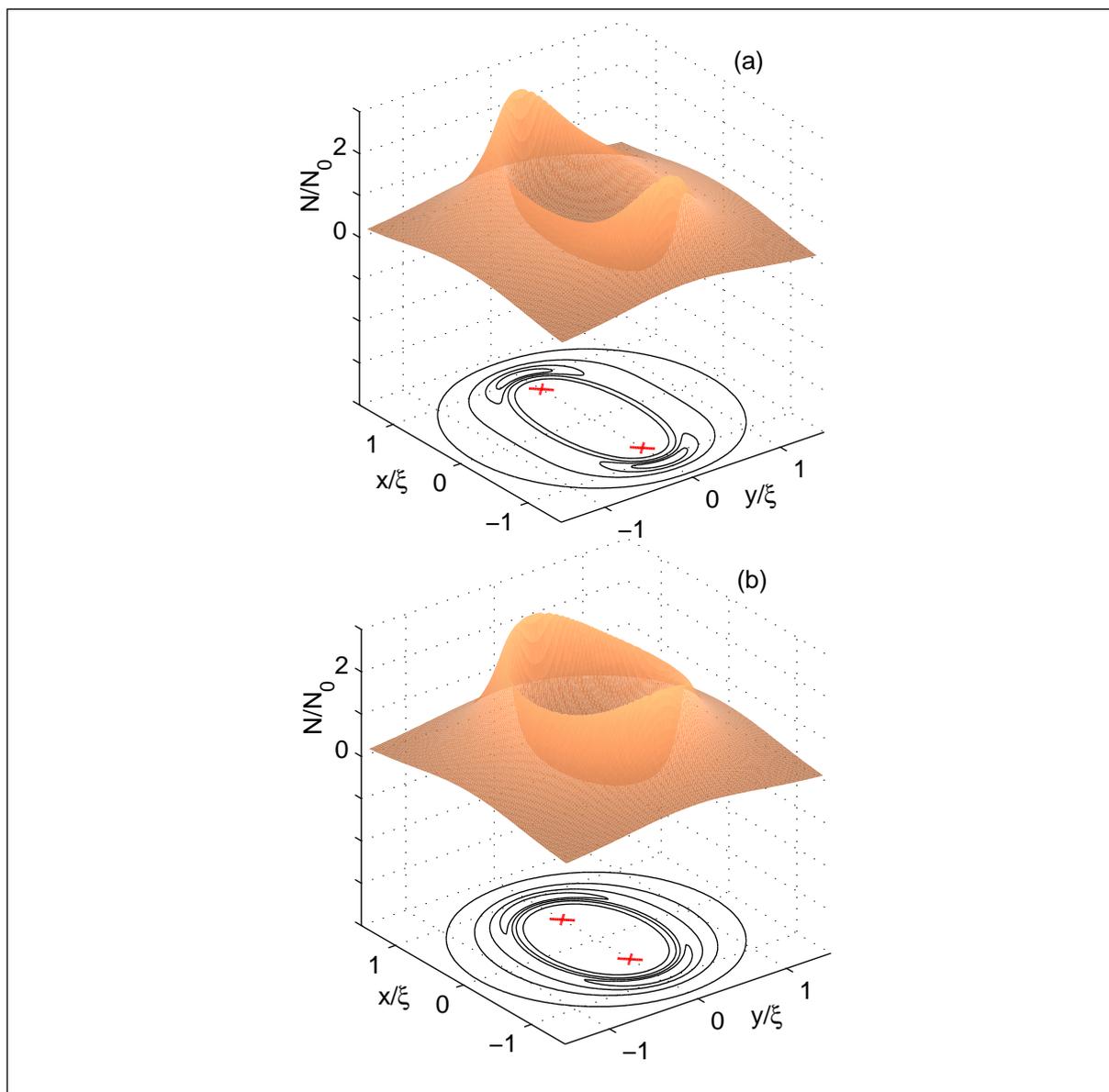


Рис. 11: Распределение локальной плотности состояний в двух-вихревой молекуле для $a/\xi = 1.5$ (a) и $a/\xi = 1$ (b). Положения вихрей отмечены крестиками.

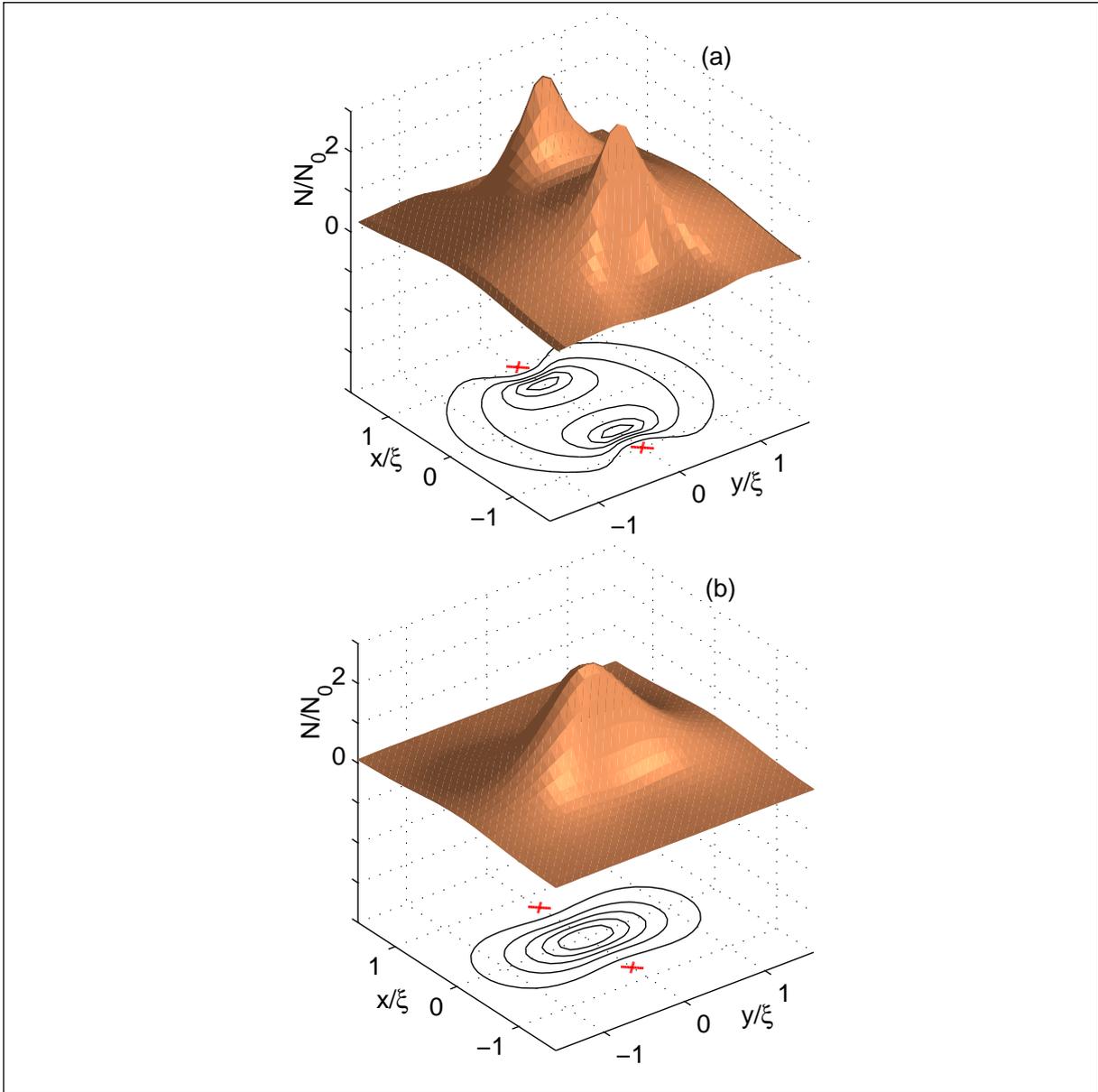


Рис. 12: Распределение локальной плотности состояний в системе вихрь–антивихрь для $a/\xi = 2$ (a) и $a/\xi = 1.5$ (b). Положения вихрей отмечены крестиками.

Модификация локальной плотности состояний в системе вихрь–антивихрь происходит по другому сценарию (см. Рис. 12). При сближении вихря и антивихря соответствующие им пики плотности состояний также сближаются. Когда расстояние становится меньше некоторого критического значения, $a_c/\xi \simeq 1.7$ два пика сливаются в один, расположенный посередине между вихрями (Рис. 12(b)). Как обсуждалось выше, это явление объясняется сжатием квазиклассических орбит на плоскости $\mu-\theta_p$. При дальнейшем уменьшении a амплитуда пика уменьшается, и в итоге пик исчезает при аннигиляции вихря и антивихря. Используя указанную выше связь задачи о паре вихрь–антивихрь и задачи о вихре около границы, можно сделать вывод о том, что пик плотности состояний расположен точно на границе сверхпроводника, если расстояние от вихря до границы составляет менее чем 0.85ξ .

В случае, если нам важна дискретность спектра, квазиклассический подход к расчету плотности состояний становится неприменим и необходимо использовать теорию,

описывающую трансформацию спектра в вихревых молекулах и вихрях вблизи границ, развитую в предыдущем разделе. В частности, для системы двух вихрей плотность состояний может быть найдена численно из выражений для спектра (88). Результаты этих вычислений показаны на Рис. 13 и 14. Чтобы сгладить особенности ван Хова, мы усреднили плотность состояний по малому интервалу энергии $0.1\omega_0$. В эксперименте такое усреднение может быть связано, например, с конечностью температуры или рассеянием квазичастиц на примесях.

Плотность состояний системы из двух вихрей (Рис. 13) в случае $a < a_c$ состоит из фона на уровне $2\nu_0$ (Рис. 13(b)) и двух серий пиков, сдвинутых относительно друг друга по энергии на расстояние $\omega_0(2\chi - [2\chi])$, где квадратные скобки обозначают взятие целой части. Пики являются усредненными особенностями ван Хова, соответствующими экстремумам спектральных веток при $k_z = 0$ (Рис. 8(b)). По мере увеличения расстояния между вихрями, плотность состояний приближается к удвоенной плотности состояний Кароли – де Жена – Матрикона для изолированного вихря, показанной на рисунке пунктирными линиями (Рис. 13(a)). Из выражения для спектра (88) нетрудно видеть,

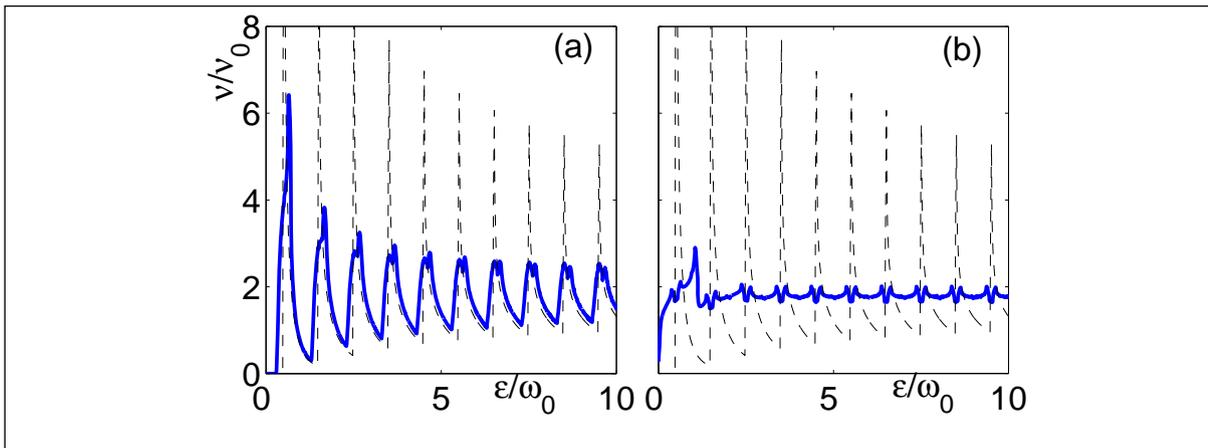


Рис. 13: Плотность состояний для системы из двух вихрей в случае $a = 5\xi$ (a), $a = 3.5\xi$ (b). Удвоенная плотность состояний для спектра Кароли – де Жена – Матрикона показана пунктирными линиями.

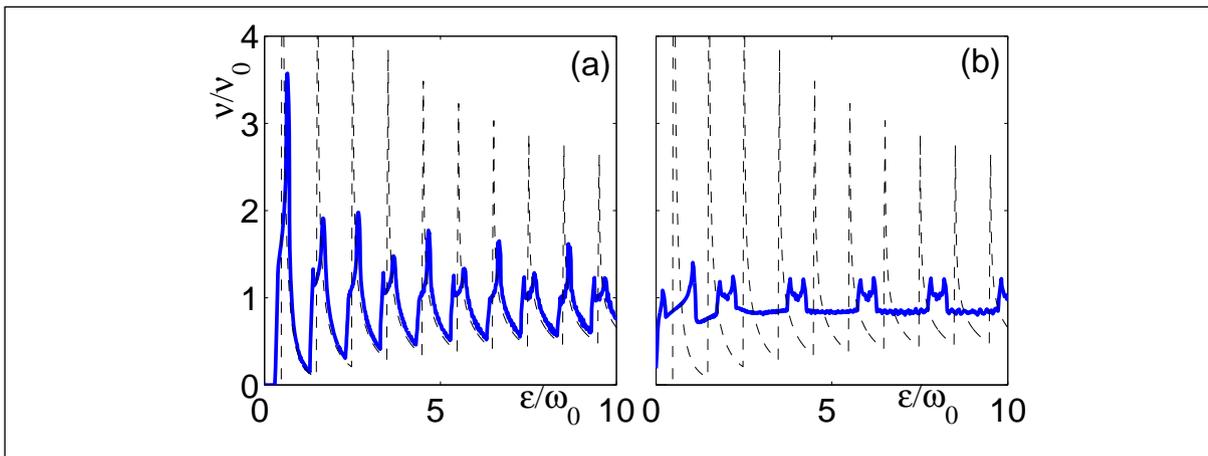


Рис. 14: Плотность состояний для вихря около плоской границы в случае $d = 2.5\xi$ (a), $d = 1.75\xi$ (b). Плотность состояний для спектра Кароли – де Жена – Матрикона показана пунктирными линиями.

что положение особенностей ван Хофа зависит от расстояния между вихрями. Поэтому плотность состояний на фиксированном уровне энергии (например, на уровне Ферми $\varepsilon = 0$) как функция расстояния между вихрями состоит из серии особенностей, следующих с периодом порядка λ_F по a (см. Рис.(15)).

Выражение для спектра вихря около границы похоже на спектр системы из двух вихрей, в котором отсутствует часть веток, соответствующих нижнему или верхнему знаку в уравнении (88). Плотность состояний в случае вихря около плоской границы показана на Рис. 14. Нетрудно видеть, что плотность состояний также состоит из фона и двух серий пиков, расстояние между которыми теперь составляет примерно $2\omega_0$.

3.7. Транспорт тепла вдоль вихревых линий

Этот раздел посвящен анализу характеристик теплового транспорта в мезоскопических сверхпроводниках в пределе низких температур $T \ll \Delta_0$, когда определяющим является вклад подщелевых квазичастиц, принадлежащих к аномальным ветвям спектра.

– *Полуклассический подход*

Для описания теплового транспорта через вихревые состояния можно использовать обобщение подхода Ландауэра для расчета электрического кондуктанса в квантовых каналах (см., например, книги [100, 101]. Следуя работам [86, 99], мы предполагаем, что в сверхпроводнике функция распределения квазичастиц, движущихся слева направо (см. Рис. 16) с групповой скоростью $V_g = \partial\varepsilon_n/\hbar\partial k_z > 0$, совпадает с равновесной функцией распределения в левом нормальном электроде $n_L(\varepsilon)$. Аналогично, квазичастицы, движущиеся справа налево с групповой скоростью $V_g = \partial\varepsilon_n/\hbar\partial k_z < 0$, обладают функцией распределения правого нормального электрода $n_R(\varepsilon)$. Такое предположение справедливо, до тех пор, пока мы можем пренебречь в сверхпроводнике эффектами, связанными с неупругими соударениями, приводящими к установлению теплового равновесия.

Рассмотрим распространение тепла вдоль вихревой линии, учитывая при этом эффекты, специфичные для мезоскопических образцов, связанные с рассеянием квазичастиц как на боковых границах, так и на границах раздела сверхпроводника с нор-

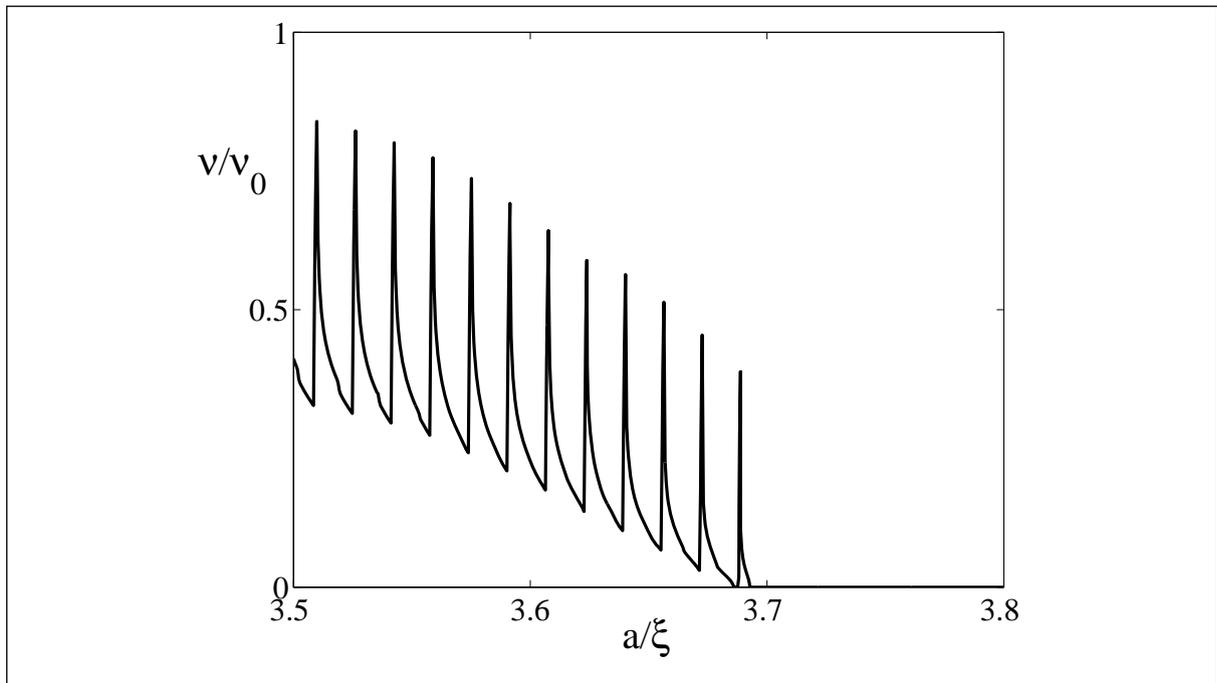


Рис. 15: Плотность состояний для системы из двух вихрей как функция расстояния a .

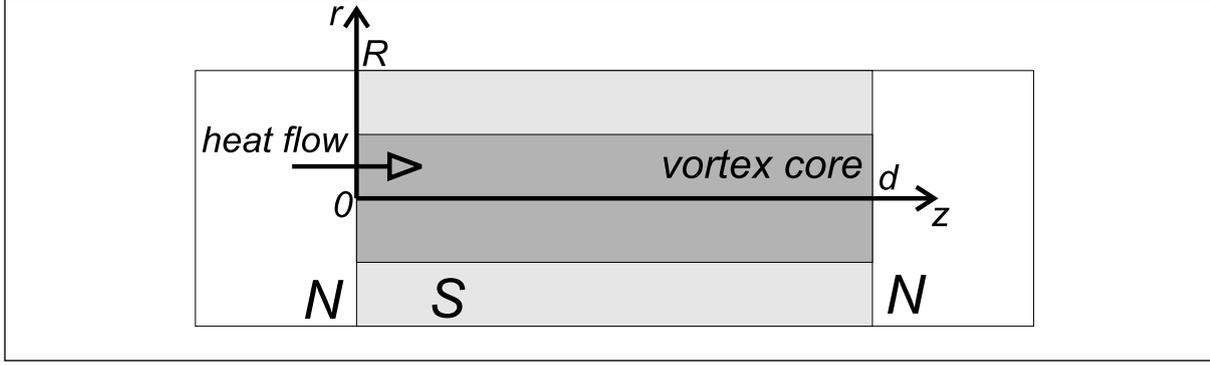


Рис. 16: Теплового транспорта в мезоскопическом сверхпроводящем цилиндре.

мальными электродами. Для анализа возьмём простейшую модельную задачу о потоке тепла вдоль цилиндрического сверхпроводника в магнитном поле, приложенном вдоль оси цилиндра (Рис. 16).

Общее выражение для потока энергии вдоль оси z записывается в следующем виде:

$$I_{\mathcal{E}} = \int d^2r \sum_{\mu} \int \frac{dk_z}{\pi m} \left[\varepsilon_{\mu} u_{\mu k_z}^* \left(\hbar k_z - \frac{e}{c} A_z \right) u_{\mu k_z} n(\varepsilon_{\mu}) - \varepsilon_{\mu} v_{\mu k_z}^* \left(\hbar k_z + \frac{e}{c} A_z \right) v_{\mu k_z} [1 - n(-\varepsilon_{\mu})] \right]. \quad (105)$$

Первое слагаемое соответствует электронам, переносящим энергию $+\varepsilon$ и имеющим функцию распределения $n(\varepsilon)$, второе слагаемое соответствует дыркам с энергией $-\varepsilon$ и функцией распределения $1 - n(-\varepsilon)$. Поскольку мы полагаем, что электроды находятся в термодинамическом равновесии, то $1 - n(-\varepsilon) = n(\varepsilon)$. Следовательно, функция распределения в сверхпроводнике удовлетворяет тому же соотношению. Сумма в (105) берётся по всем состояниям с $\varepsilon_{\mu} > 0$.

Используя уравнения Боголюбова – де Жена можно вывести важное равенство для волновых функций связанных состояний $u_{\mu k_z}$, $v_{\mu k_z}$ соответствующих собственному значению ε_{μ} при заданном волновом числе k_z [116]:

$$\int \left[u_{\mu k_z}^* \left(k_z - \frac{e}{\hbar c} A_z \right) u_{\mu k_z} - v_{\mu k_z}^* \left(k_z + \frac{e}{\hbar c} A_z \right) v_{\mu k_z} \right] d^2r = \frac{m}{\hbar^2} \frac{\partial \varepsilon_{\mu}}{\partial k_z}.$$

Используя это равенство, можно записать выражение для потока тепла в виде

$$I_{\mathcal{E}} = \sum_{\mu} \int_{-k_F}^{+k_F} \varepsilon_{\mu} n(\varepsilon_{\mu}) \frac{\partial \varepsilon_{\mu}}{\partial k_z} \frac{dk_z}{\pi \hbar}. \quad (106)$$

Уравнение (106) показывает, что в противоположность электрическому току, поток энергии определяется групповой скоростью.

Частицы, приходящие из левого электрода с энергией, совпадающей с уровнями состояний в коре вихря, проникают в кор с вероятностью P_{μ, k_z} и распространяются вдоль вихря к правому электроду. Возбуждения с положительной групповой скоростью $v_g = \partial \varepsilon_{\mu} / \hbar \partial k_z$ имеют функцию распределения $n_L P_{\mu, k_z}$ (см. [117, 118, 101]), где n_L — функция распределения частиц в левом электроде. Аналогично, возбуждения с отрицательной групповой скоростью обладают распределением $n_R P_{\mu, k_z}$, где n_R — их функция распределения в правом электроде. Поскольку ε_{μ} является четной функцией k_z мы получаем

$$I_{\mathcal{E}} = \sum_{\mu} \int_0^{k_F} \varepsilon_{\mu} [n_L(\varepsilon_{\mu}) - n_R(\varepsilon_{\mu})] P_{\mu, k_z} \left| \frac{\partial \varepsilon_{\mu}}{\partial k_z} \right| \frac{dk_z}{\pi \hbar}. \quad (107)$$

Определяя тепловой кондактанс как коэффициент пропорциональности между тепловым потоком и разницей температур:

$$I_{\mathcal{E}} = \kappa(T_L - T_R),$$

где $T_{L,R}$ — температуры левого и правого электродов, соответственно, имеем

$$\kappa = -\frac{1}{\pi T \hbar} \sum_{\mu} \int_0^{k_F} \varepsilon_{\mu}^2 \frac{dn(\varepsilon_{\mu})}{d\varepsilon_{\mu}} P_{\mu, k_z} \left| \frac{\partial \varepsilon_{\mu}}{\partial k_z} \right| dk_z. \quad (108)$$

Здесь мы предположили, что $T_L - T_R \ll T_{L,R} \approx T$. Используя понятие кванта теплового кондактанса $\kappa_0 = \pi T / (3\hbar)$ [102], можно определить эффективное число поперечных мод, распространяющихся вдоль вихря $N_{eff} = \kappa / \kappa_0$. Здесь мы пока пренебрежем квантово-механическими эффектами рассеяния возбуждений на границах между электродами и сверхпроводником, полагая $P_{\mu, k_z} = 1$. Такой подход соответствует случаю сверхпроводника бесконечной длины.

Для сверхпроводника большого радиуса $R \gg R_c$ для температур $\omega_0 \ll T \ll \Delta_0$ сумма в (108) может быть заменена интегралом по μ для состояний с положительными энергиями. Поскольку $dn/d\varepsilon = -(4T)^{-1} \cosh^{-2}(\varepsilon/2T)$ мы получаем, что

$$\kappa = \frac{9\zeta(3)}{2\pi} \frac{T^2}{\hbar \omega_0}.$$

Здесь $\zeta(n)$ — дзета-функция Римана. Таким образом,

$$N_{eff}^{(\infty)}(T) = \frac{27\zeta(3)}{2\pi^2} \frac{T}{\omega_0} \sim k_F \xi \frac{T}{T_c}.$$

При очень низких температурах $T \ll \omega_0$:

$$N_{eff}^{(\infty)}(T) = \frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{\omega_0}{T} \right)^2 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2T}\right). \quad (109)$$

будет отличен от нуля даже при экстремально малых температурах ($T \ll \omega_0$), поскольку в этом случае он будет определяться числом распространяющихся мод с заданной энергией $\varepsilon \sim T$. Температурная зависимость эффективного числа мод, вычисленная по формуле (108) с $P_{\mu, k_z} = 1$ приведена на Рис. 17. В пределе больших температур $T \gg \omega_0$ эффективное число мод линейно растёт по температуре:

$$N_{eff}^{(R)}(T) \simeq N^* + \frac{27\zeta(3)}{2\pi^2} \frac{T}{\omega_0}. \quad (110)$$

Здесь N^* не зависит от температуры и определяется осцилляционными характеристиками спектра: с увеличением радиуса N^* убывает. Зависимость эффективного числа мод от радиуса при фиксированной температуре, вычисленная по формуле (108) с $P_{\mu, k_z} = 1$, показана на Рис. 18.

— Численное решение квантово-механической задачи

Недостатком полуклассического подхода, рассмотренного выше, является то, что с его помощью невозможно рассчитать вероятности P_{μ, k_z} возбуждения квазичастичных мод, распространяющихся вдоль вихря, т.е. решить квантово-механическую задачу рассеяния квазичастиц от конца вихря на границе сверхпроводник/нормальный контакт. В этом разделе мы получим общее квантово-механическое выражение для теплового кондактанса непосредственно из уравнения(105), обобщая подход Ландауэра с учетом

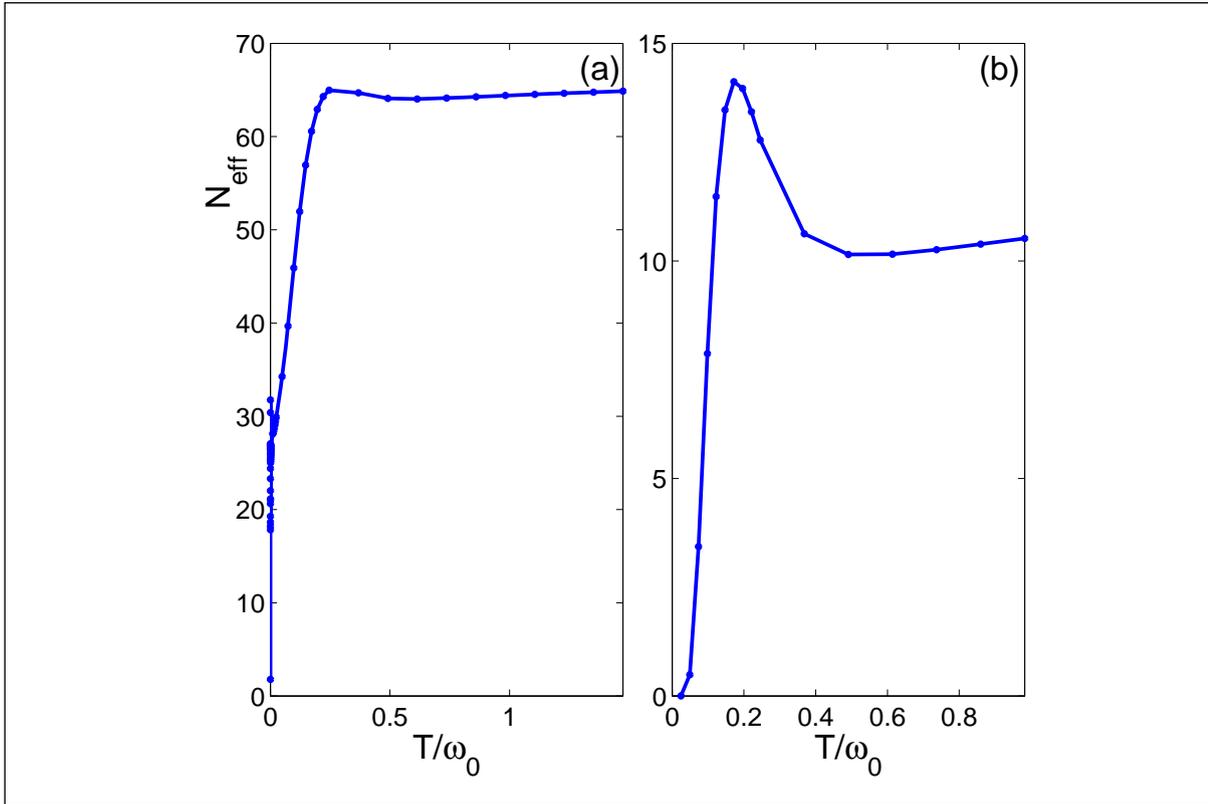


Рис. 17: Зависимость эффективного числа мод $N_{eff}(T)$ от температуры, рассчитанная по формуле (108) с $P_{\mu,kz} = 1$ для цилиндров с радиусом $R/\xi = 3.5$ (a) и $R/\xi = 4.5$ (b). Профиль щели аппроксимируется формулой (23), где $\xi_v = \xi$, $f_\infty = 1$, $k_F\xi = 200$.

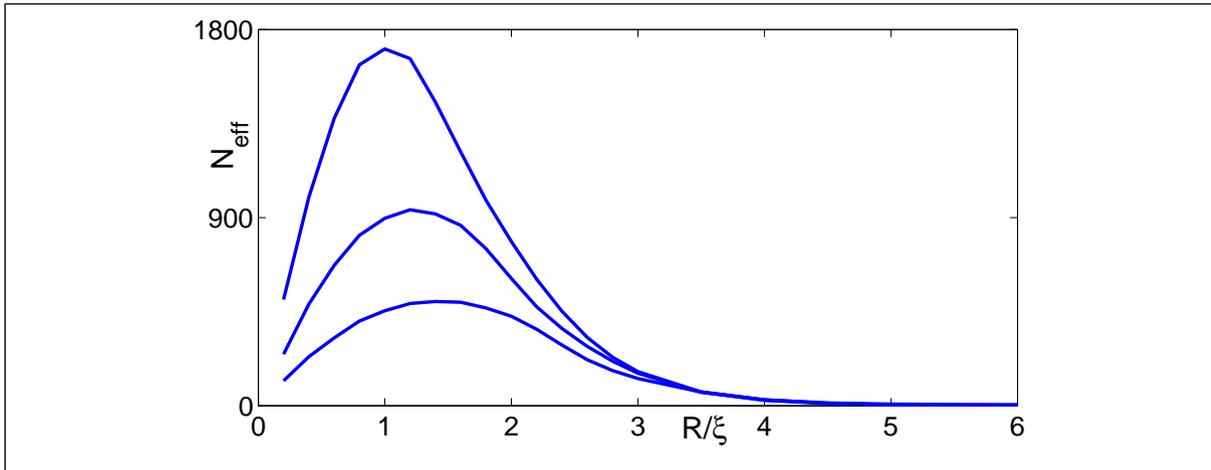


Рис. 18: Эффективное число мод N_{eff} в соответствии с уравнением (108) с $P_{\mu,kz} = 1$ как функция радиуса сверхпроводящего цилиндра для температур $T/\omega_0 = 0.3, 1.0, 3.0$ (снизу вверх). Профиль щели аппроксимируется формулой (23), где $\xi_v = \xi$, $f_\infty = 1$, $k_F\xi = 200$.

процессов рассеяния. Затем мы продемонстрируем, как применяется этот формализм для численного расчета теплового транспорта вдоль вихря.

Рассмотрим цилиндрический сверхпроводник длины d (Рис. 16), соединенный с двумя нормальными контактами (резервуарами). Для простоты предположим, что грани-

ца нормальный металл/сверхпроводник идеально прозрачная, т.е. на границе нет никакого дополнительного рассеивающего потенциала для квазичастиц. Магнитное поле (и соответственно вихрь) ориентированы вдоль оси цилиндра. Для расчёта теплового транспорта нам необходимо решить задачу рассеяния электронных (U) и дырочных (V) квазичастичных волн в рамках теории Боголюбова–де Жена. Удобно выделить четыре типа линейно независимых квантово–механических состояний, соответствующих четырем процессам рассеяния: (i) состояние (U_1, V_1) , соответствующее падающей электронной волне из левого контакта в отсутствие других падающих извне электронных и дырочных волн; (ii) состояние (U_2, V_2) , когда слева падает дырочная волна; (iii) состояние (U_3, V_3) с электронной волной, падающей из правого электрода; и (iv) состояние (U_4, V_4) , когда справа падает дырочная волна.

В левом контакте первое состояние (с падающей слева электронной волной) описывается следующим образом:

$$U_1 = \frac{e^{i(\mu+1/2)\theta}}{\sqrt{2\pi}} g_{u,\mu s}(r) e^{+ik_z z} + \frac{e^{i(\mu+1/2)\theta}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s'} r_{uu,ss'} g_{u,\mu s'}(r) e^{-ik'_z u z}, \quad (111)$$

$$V_1 = \frac{e^{i(\mu-1/2)\theta}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s'} r_{uv,ss'} g_{v,\mu s'}(r) e^{+ik'_z v z}. \quad (112)$$

Здесь $g_{u,\mu s}(r)$ and $g_{v,\mu s}(r)$ суть поперечные электронные и дырочные моды в нормальном металле с определенным угловым моментом μ и радиальным квантовым числом s соответственно. Поперечные моды для каждого μ удовлетворяют граничным условиям $g_{u,\mu s}(R) = g_{v,\mu s}(R) = 0$. Эти моды нормированы условиями

$$\int_0^R g_{u,\mu s} g_{u,\mu s'}^* r dr = \int_0^R g_{v,\mu s} g_{v,\mu s'}^* r dr = \delta_{s,s'},$$

и имеют следующий вид:

$$g_{u,\mu s} = \frac{\sqrt{2} J_{|\mu+1/2|} \left(j_s^{(|\mu+1/2|)} r/R \right)}{R J_{|\mu+1/2|+1} \left(j_s^{(|\mu+1/2|)} \right)}; \quad (113)$$

$$g_{v,\mu s} = \frac{\sqrt{2} J_{|\mu-1/2|} \left(j_s^{(|\mu-1/2|)} r/R \right)}{R J_{|\mu-1/2|+1} \left(j_s^{(|\mu-1/2|)} \right)}. \quad (114)$$

Здесь J_n — функция Бесселя n -го порядка, $j_s^{(n)}$ — s -ый корень уравнения $J_n(j_s^{(n)}) = 0$. Состояние, описываемое выражениями (111), (112) соответствует энергии

$$\varepsilon(\mu, s, k_z) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[k_z^2 + \left(j_s^{(|\mu+1/2|)} / R \right)^2 - k_F^2 \right]. \quad (115)$$

Волновые числа рассеянных электронных и дырочных волн обозначим $k'_{z,uv} \equiv k'_{z,uv}(\mu, s', i)$ где

$$k'_{z,u,v}(\mu, s', k_z) = \sqrt{k_F^2 - \left(j_{s'}^{(|\mu\pm 1/2|)} / R \right)^2 \pm 2m\varepsilon/\hbar^2}.$$

Величины $r_{uu,ss'}$ и $r_{uv,ss'}$ суть матрицы амплитуд вероятности нормального и андреевского отражения с большим и малым изменением продольной компоненты импульса, соответственно. Они недиагональны по индексам s и s' , что является следствием квантово–механического рассеяния с малым изменением поперечного импульса, вызванного неоднородностью профиля щели в радиальном направлении. Изменения ра-

диальной компоненты волнового вектора для заданной энергии ε приводят к малому изменению продольной компоненты, так что рассеянные волны обладают волновыми векторами k_{zu} и k_{zv} , слабо отличающимися от волнового вектора k_z падающей волны.

Аналогично состояние с падающей дырочной волной записывается как

$$U_2 = \frac{e^{i(\mu+1/2)\theta}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s'} r_{vu,ss'} g_{u,\mu s'}(r) e^{-ik'_{zu}z}, \quad (116)$$

$$V_2 = \frac{e^{i(\mu-1/2)\theta}}{\sqrt{2\pi}} g_{v,\mu s}(r) e^{-ik_z z} + \frac{e^{i(\mu-1/2)\theta}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s'} r_{vv,ss'} g_{v,\mu s'}(r) e^{+ik'_{zv}z}. \quad (117)$$

Энергия падающей дырки равна

$$\varepsilon(\mu, s, k_z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[k_z^2 + (j_s^{(|\mu-1/2|)})/R)^2 - k_F^2 \right]. \quad (118)$$

Прошедшие волны (iii) в левом контакте записываются как

$$U_3 = \frac{e^{i(\mu+1/2)\theta}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s'} t_{uu,ss'} g_{u,\mu s'}(r) e^{-ik'_{zu}z},$$

$$V_3 = \frac{e^{i(\mu-1/2)\theta}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s'} t_{uv,ss'} g_{v,\mu s'}(r) e^{+ik'_{zv}z}. \quad (119)$$

Волны U_4, V_4 состояния (iv) записываются таким же образом, достаточно только заменить $t_{uu,ss'} \mapsto t_{vv,ss'}$ и $t_{uv,ss'} \mapsto t_{vu,ss'}$. Величины $t_{uu,ss'}$ и $t_{vv,ss'}$ описывают прохождение дырки (электрона). Амплитуды вероятности прохождения $t_{uv,ss'}$ и $t_{vu,ss'}$ описывают процессы прохождения с большим изменением продольного импульса при наличии процессов нормального рассеяния.

Уравнения Боголюбова – де Жена (36) сохраняют поток частиц с плотностью

$$\mathbf{J}_{qp} = \frac{1}{2m} \left[u^* (-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A})u - v^* (-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A})v + c.c. \right].$$

Используя представление падающих и прошедших волн, описываемых уравнениями (111), (112), и т. д., можно из этого закона сохранения получить следующие правила сумм:

$$\sum_{s'} (k'_{zu} |r_{uu,ss'}|^2 + k'_{zv} |r_{uv,ss'}|^2 + k'_{zu} |t_{uu,ss'}|^2 + k'_{zv} |t_{uv,ss'}|^2) = k_z, \quad (120)$$

$$\sum_{s'} (k'_{zv} |r_{vv,ss'}|^2 + k'_{zu} |r_{vu,ss'}|^2 + k'_{zv} |t_{vv,ss'}|^2 + k'_{zu} |t_{vu,ss'}|^2) = k_z. \quad (121)$$

В квазиклассическом приближении поперечный импульс сохраняется, что означает

$$r_{uv,ss'} = r_{uv,s} \delta_{s,s'}, \quad r_{vu,ss'} = r_{vu,s} \delta_{s,s'}.$$

В то же время, процессы с большим изменением продольного момента запрещены:

$$r_{uu,ss'} = r_{vv,ss'} = t_{uv,ss'} = t_{vu,ss'} = 0.$$

Поток тепла через сечение цилиндра в левом электроде может быть представлен через состояния (i)–(iv):

$$I_{\mathcal{E}} = \sum_{\mu,s} \int \frac{dk_z}{2\pi} \int r dr d\theta \frac{\hbar}{m} \left\{ [\varepsilon \cdot \text{Im} \{U_1^* \nabla U_1\} n_L(\varepsilon) - \varepsilon \cdot \text{Im} \{V_1^* \nabla V_1\} \cdot (1 - n_L(-\varepsilon))] \right. \\ + [\varepsilon \cdot \text{Im} \{U_2^* \nabla U_2\} n_L(\varepsilon) - \varepsilon \cdot \text{Im} \{V_2^* \nabla V_2\} \cdot (1 - n_L(-\varepsilon))] \\ + [\varepsilon \cdot \text{Im} \{U_3^* \nabla U_3\} n_R(\varepsilon) - \varepsilon \cdot \text{Im} \{V_3^* \nabla V_3\} \cdot (1 - n_R(-\varepsilon))] \\ \left. + [\varepsilon \cdot \text{Im} \{U_4^* \nabla U_4\} n_R(\varepsilon) - \varepsilon \cdot \text{Im} \{V_4^* \nabla V_4\} \cdot (1 - n_R(-\varepsilon))] \right\}. \quad (122)$$

Сумма берётся по всем распространяющимся квазичастичным состоянием с $\text{Im } k_z = 0$ и $\varepsilon \geq 0$, учитывая как падающие электроны, так и падающие дырки.

Используя правила сумм (120), (121) и переходя к интегралу по энергии, получаем для теплового потока следующее выражение

$$I_{\mathcal{E}} = \frac{1}{\pi \hbar} \int_0^{\infty} \varepsilon [n_L(\varepsilon) - n_R(\varepsilon)] \mathcal{T}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (123)$$

$$\mathcal{T}(\varepsilon) = \sum_{\mu, s, s'} [|t_{uu,ss'}|^2 + |t_{uv,ss'}|^2 + |t_{vu,ss'}|^2 + |t_{vv,ss'}|^2]. \quad (124)$$

Окончательно для безразмерного теплового кондактанса (эффективного числа поперечных мод) получаем

$$N_{eff} = \frac{\kappa}{\kappa_0} = -\frac{3}{\pi^2 T^2} \int_0^{\infty} \varepsilon^2 \frac{dn(\varepsilon)}{d\varepsilon} \mathcal{T}(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (125)$$

Выражения (123), (124), (125) обеспечивают *точное* квантово-механическое описание транспорта тепла. Они соответствуют формуле Ландауэра [117], где вероятности прохождения определены через задачу о рассеянии квазичастиц в сверхпроводнике.

Матрицу рассеяния для волн, падающих на мезоскопический сверхпроводник с вихрём, можно рассчитать, представляя оператор Боголюбова – де Жена в базисе собственных функций нормального металла. Для этого необходимо решить систему линейных уравнений, описывающих граничные условия на границах нормальный металл/сверхпроводник и условия на бесконечности (условия излучения). Типичные зависимости коэффициентов матрицы рассеяния от волнового вектора рассеянных волн представлены на Рис. 19. Отчётливо выражены пики вблизи $k_{zu,v} = k_z$. Зависимость функции распространения $\mathcal{T}(\varepsilon)$ от энергии для различных длин сверхпроводящего цилиндра, рассчитанная с помощью уравнения (124) показана на Рис. 20. Линейное по ε/ω_0 слагаемое соответствует возрастанию числа мод Кароли – де Жена – Матрикона, дающих вклад в перенос тепла (у которых $|\mu|\omega_0 \leq \varepsilon$).

Температурная зависимость теплового кондактанса, рассчитанная по уравнению (125) изображена на Рис. 21. Как видно, тепловой кондактанс, рассчитанный численно, качественно совпадает с результатом полученным из полуклассической теории (см. Рис. 17). В частности наклон линейной асимптотики N_{eff} при $T > \omega_0$ хорошо описывается аналитической формулой. Однако, численное значение N_{eff} примерно в семь раз меньше аналитического значения полуклассической теории, вычисленного в приближении отсутствия рассеяния на границах нормальный металл/сверхпроводник. Такое расхождение очевидным образом связано с конечным значением вероятности прохождения $0 < P < 1$ или, что точнее, функцией распространения $\mathcal{T}(\varepsilon)$.

Строго говоря, функция распространения $\mathcal{T}(\varepsilon)$ описывает *все квантово-механические* процессы, включая отражения от концов вихря, возможное резонансное прохождение через состояния типа “стоячая волна”, образующихся вследствие ограничения длины сверхпроводника. Разница между результатами, полученными двумя разными подходами носит только количественный характер и не является принципиальной, поскольку обычно эффекты резонансного прохождения замываются из-за большого числа мод, содержащихся в интервале энергий $0 < \varepsilon < T$, которые вносят основной вклад в тепловой транспорт. Однако, необходимо отметить, что расхождение в результатах может становиться всё больше при уменьшении $k_F \xi$ или понижении температуры ниже минисцели. В принципе такая разница может стать существенна, как было отмечено в работе [119].

– *Тепловой кондактанс системы вихрей*

Для вычисления кондактанса вихрей, связанных туннелированием квазичастиц, мы воспользуемся результатами, полученными в разделе 3.5. Введем функцию $N(\varepsilon)$, которая определяет число спектральных веток, пересекающих заданный уровень энергии ε :

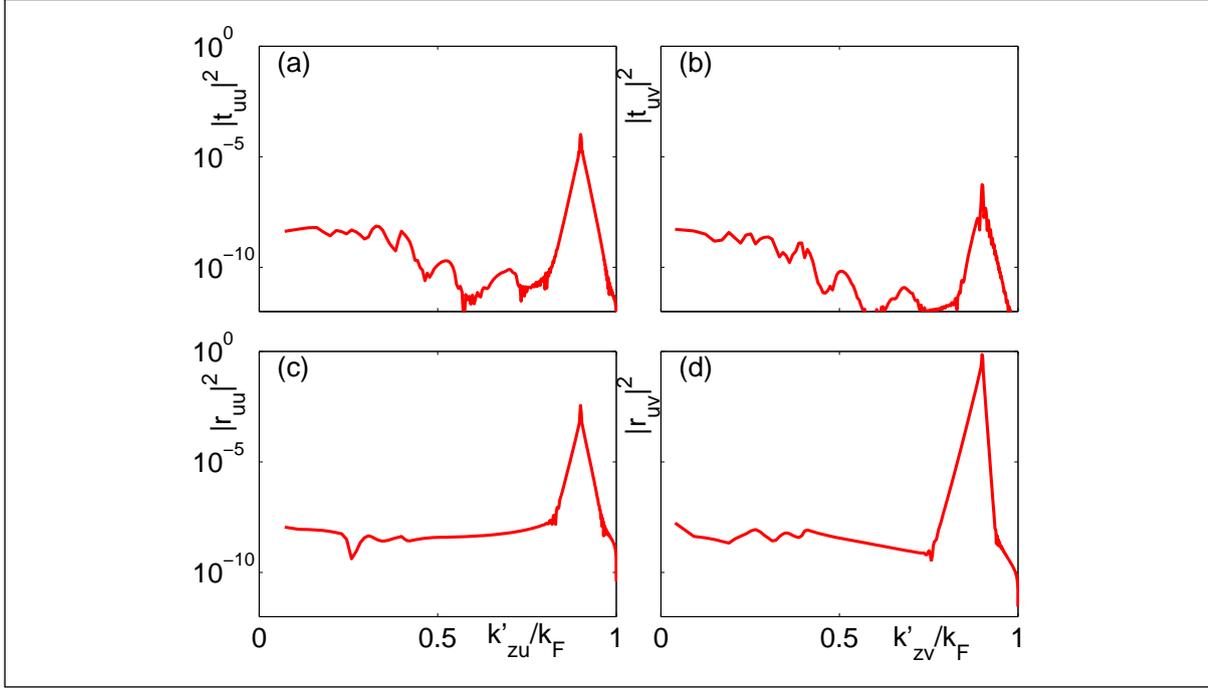


Рис. 19: (a), (b) Вероятности прохождения $|t_{uu}|^2$, $|t_{uv}|^2$ и (c), (d) отражения $|r_{uu}|^2$, $|r_{uv}|^2$ как функции волновых векторов k'_{zu} и k'_{zv} рассеянных волн для случая падающего электрона с $\mu = -1/2$, $k_z/k_F = 0.9$, и $\varepsilon = 0.49\omega_0$. Сверхпроводящий цилиндр имеет радиус $R = 4.5\xi$ и длину $d/\xi = 16$.

$$N_b(\varepsilon) = \sum_n \int_0^{k_F} \delta(\varepsilon - \varepsilon_n(k_z)) \left| \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial k_z} \right| dk_z. \quad (126)$$

Тогда, без учета эффектов, связанных с рассеянием квазичастиц на границах сверхпроводник/нормальный металл ($P_{\mu, k_z} = 1$), выражение для теплового кондактанса (108) может быть записано в следующем виде:

$$\kappa = \frac{1}{4\pi\hbar T^2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2 N_b(\varepsilon)}{\cosh^2(\varepsilon/2T)} d\varepsilon. \quad (127)$$

В интервале температур $\omega_0 \lesssim T \ll \Delta_0$ с хорошей точностью можно пренебречь дискретностью спектра. Для того, чтобы найти число состояний $N_b(\varepsilon)$, мы будем использовать квазиклассический подход, предполагая, что вероятность туннелирования между квазиклассическими орбитами $\mu_i(\theta_p)$ мала. В общем случае это предположение верно только в интервале импульсов $k_z < k_z^*$. В результате, в выражении (126) верхний предел интегрирования должен быть $k_z^* < k_F$. Пороговое значение импульса k_z^* можно оценить из условия равенства вероятности туннелирования Ландау–Зинера W (см. уравнение (79)) некоторому значению $W_{th} < 1$. Используя правило квантования Бора–Зоммерфельда (80), мы находим:

$$N_b(\varepsilon) = \left| \int_0^{k_z^*} \frac{dS(\varepsilon, k_z)}{dk_z} \frac{dk_z}{2\pi} \right| = \frac{|S(\varepsilon, 0) - S(\varepsilon, k_z^*)|}{2\pi}, \quad (128)$$

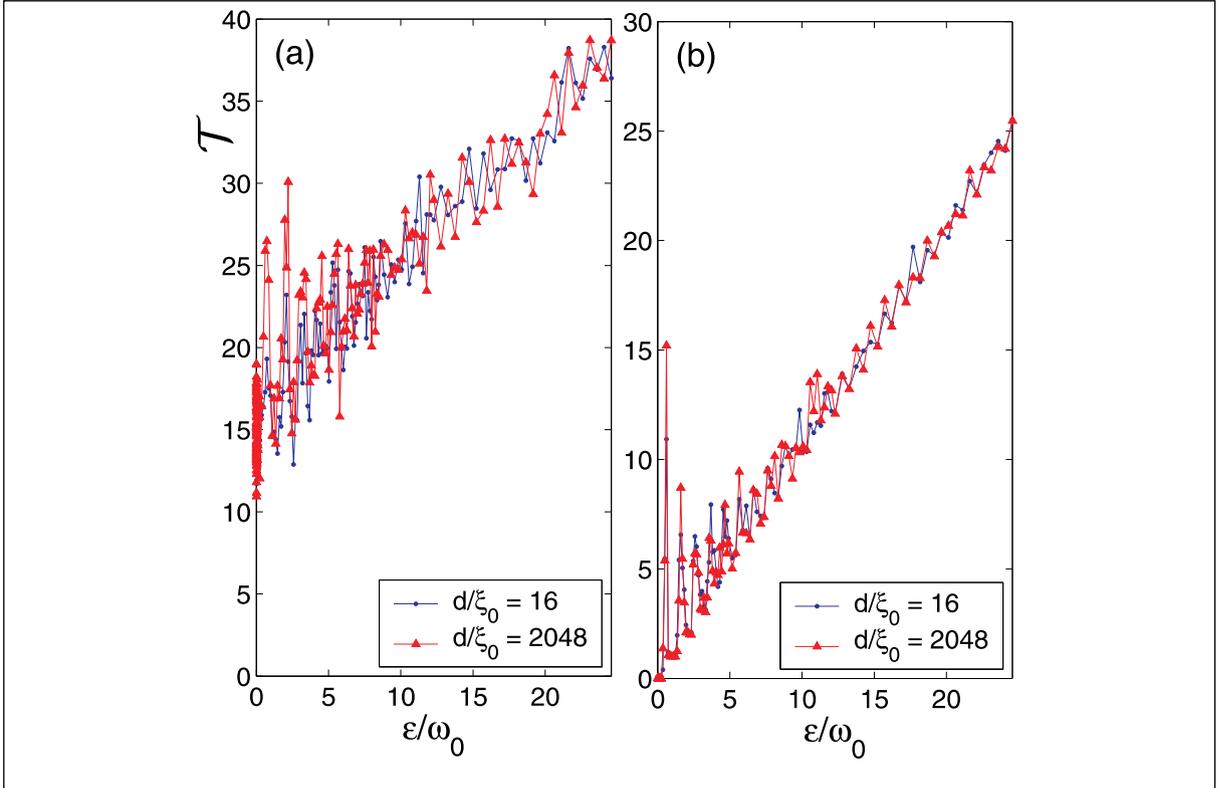


Рис. 20: Зависимость функции распространения $T(\varepsilon)$ для сверхпроводников различной длины d (синяя линия соответствует $d/\xi = 16$, красная — $d/\xi = 2048$) и различного радиуса $R/\xi = 3.5$ (a) и $R/\xi = 4.5$ (b).

где S — площадь соответствующей орбиты на плоскости (μ, θ_p) . Чтобы вычислить интеграл (127), рассмотрим разложение в ряд Тейлора $|S(\varepsilon, 0) - S(\varepsilon, k_z^*)| = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \varepsilon^n / n!$, где

$$S^{(n)} = \left. \frac{d^n}{d\varepsilon^n} |S(\varepsilon, 0) - S(\varepsilon, k_z^*)| \right|_{\varepsilon=0}.$$

В результате разложение теплового кондактанса в ряд по степеням температуры T принимает вид:

$$\kappa = \frac{T}{4\pi\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} A_n S^{(n)} T^n, \quad (129)$$

где A_n — безразмерные коэффициенты:

$$A_n = \frac{2(n+2)(n+1)}{\pi} [1 - 2^{-(n+1)}] \zeta(n+2).$$

Соответственно, выражение для эффективного числа мод $N_{eff} = \kappa/\kappa_0$ принимает вид:

$$N_{eff} = \frac{3}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n S^{(n)} T^n, \quad (130)$$

Применяя эту формулу для одноквантового вихря, получаем

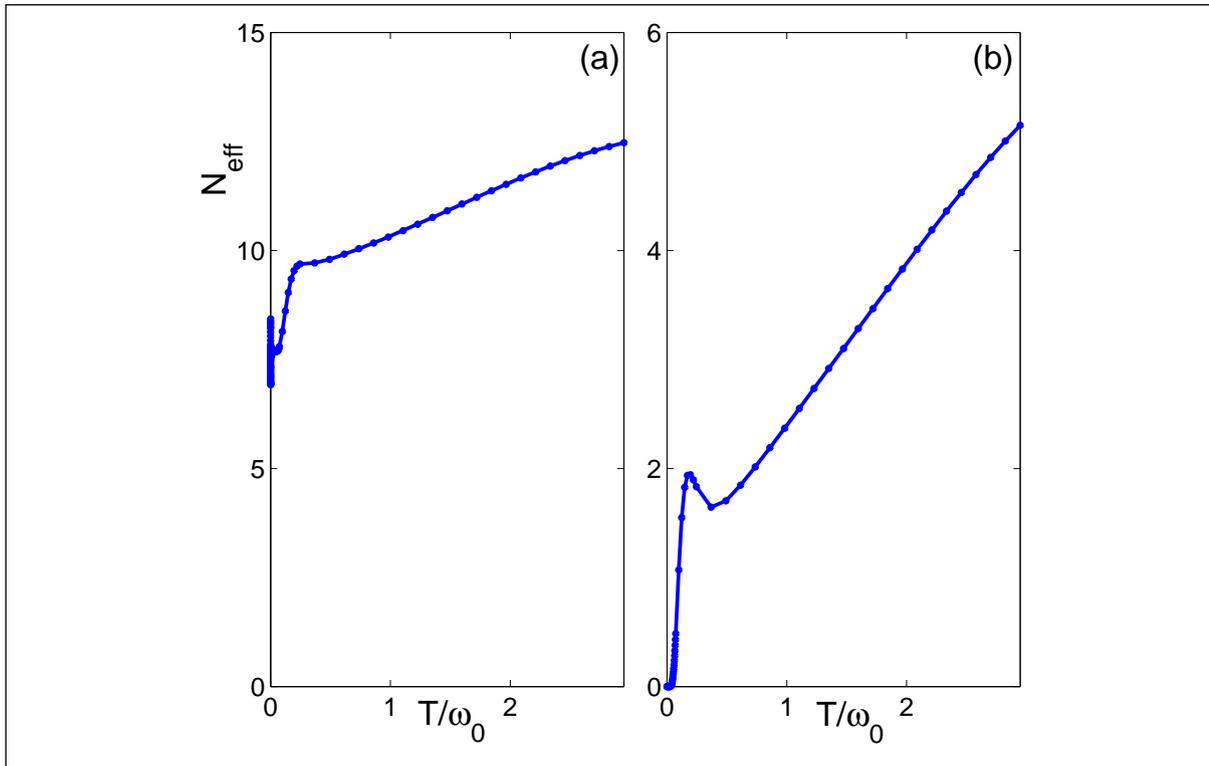


Рис. 21: Температурная зависимость эффективного числа мод (безразмерный тепловой кондуктанс) $N_{eff}(T)$, рассчитанная численно для вихря в сверхпроводнике длины $d/\xi_0 = 16$ и радиуса $R/\xi_0 = 3.5$ (a) и $R/\xi_0 = 4.5$ (b).

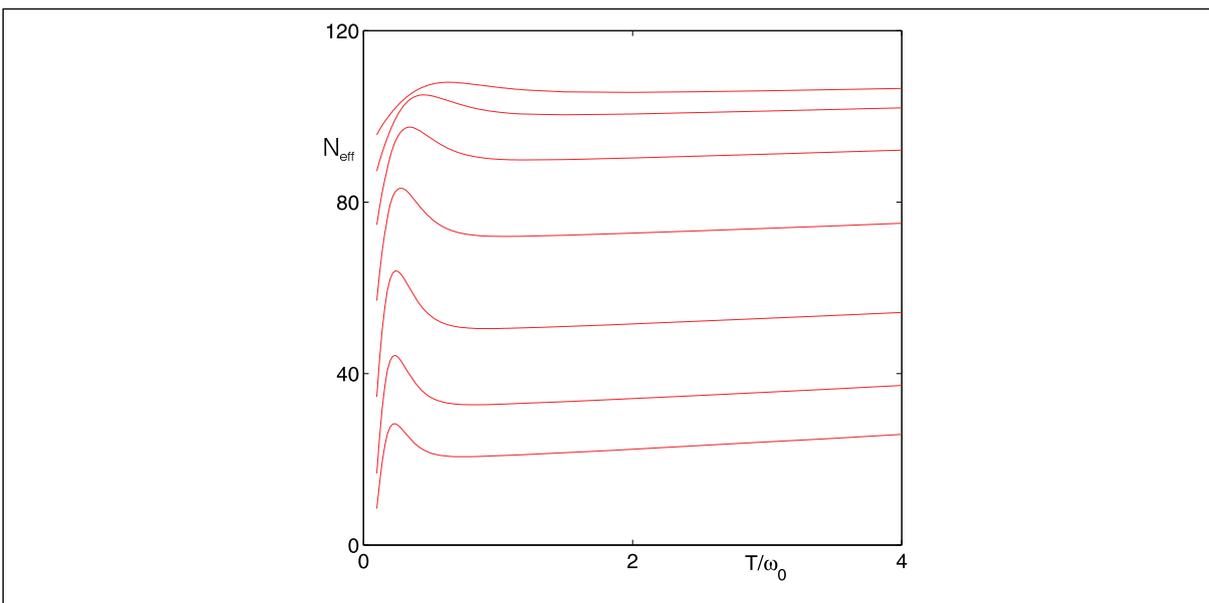


Рис. 22: Зависимость эффективного числа проводящих мод N_{eff} от температуры для системы из двух вихрей. Кривые, начиная с верхней, построены для расстояний от $a = 2\xi$ до $a = 5\xi$ с шагом 0.5ξ . Профиль вихревого кора определяется выражением (23), где $\xi_v = \xi$, $f_\infty = 1$, $k_F\xi = 200$.

$$N_{eff} = \frac{27\zeta(3) T}{2\pi^2 \omega_0}.$$

Для двухквантового вихря $N_b(\varepsilon) = 2\mu^*$, где $\mu^* \sim k_F \xi$, и поэтому $N_{eff} = \mu^*$ не зависит от температуры. Далее мы рассмотрим менее тривиальные примеры: систему из двух вихрей и вихрь около поверхности.

Начнем с первого случая. Результаты численных расчетов эффективного числа проводящих мод как функции температуры на основе выражения для спектра (88) показаны на Рис. 22. Подавление числа мод N_{eff} при очень низких температурах $T \ll \omega_0$ является проявлением наличия минищели в спектре квазичастиц. Нетрудно видеть, что при температурах $T \gtrsim \omega_0$ функция $N_{eff}(T)$ растет линейно по T . Экстраполируя линейную зависимость до $T = 0$, мы можем найти остаточное число мод N_0 , которое показано сплошной кривой на Рис. 23 как функция расстояния между вихрями a .

На основе квазиклассического подхода, развитого в начале этого раздела, мы можем получить достаточно хорошую аппроксимацию для остаточного числа мод при $a < a_c$. Для этого нам надо вычислить не зависящий от температуры первый член разложения в (130), который является определяющим при $a < a_c$. Используя выражение (128) для числа состояний $N(\varepsilon)$, мы получаем зависимость эффективного числа мод N_v от расстояния a , показанную на Рис. 23 пунктирной линией. Здесь мы использовали пороговое значение вероятности туннелирования $W_{th} = 0.54$, чтобы обеспечить наилучшее совпадение с результатами численных расчетов (сплошная кривая) в области $a \sim 2\xi$. Критическое расстояние a_c может быть определено из условия $N_0(a_c) = 0$. Использованное значение пороговой вероятности соответствует критическому расстоянию $a_c \simeq 4.5\xi$.

Для сильно разделенных вихрей, когда $a > 2\xi$, расщепление квазиклассических орбит мало, и мы получаем:

$$N_0 = \frac{a}{\pi} (k_F - k_{\perp}^*) + \frac{\alpha^2}{\pi} \ln \left(\frac{k_F \xi^2}{2a\alpha^2} \right), \quad (131)$$

где

$$k_{\perp}^* = \sqrt{k_F^2 - k_z^2} = k_F \frac{\sqrt{(a/\xi_v)^2 + 4} - 2}{\sqrt{(a_c/\xi_v)^2 + 4} - 2}. \quad (132)$$

Это выражение совпадает с оценкой (82) в пределе $a \gg \xi$.

Расчет числа проводящих мод для вихря около плоской границы может быть проделан аналогично рассмотренному выше случаю системы из двух вихрей. Здесь наше рассмотрение ограничено условием, что вихрь находится не слишком близко к поверхности: $d \gtrsim \xi$. Это позволяет не учитывать искажение кора вихря за счет граничных эффектов. На Рис. 24 сплошной кривой показана зависимость остаточного числа проводящих мод $N_0(d)$. Оценка остаточного числа мод на основе квазиклассической теории приводит к следующему результату:

$$N_0 = \frac{d}{\pi} (k_F - k_{\perp}^*) - \frac{\alpha^2}{2\pi} \ln \left(\frac{k_F \xi^2}{4d\alpha^2} \right), \quad (133)$$

где

$$k_{\perp}^* = k_F \frac{\sqrt{(d/\xi_v)^2 + 1} - 1}{\sqrt{(d_c/\xi_v)^2 + 1} - 1} \quad (134)$$

для модели кора (23). Полагая $d_c \simeq 2.25\xi$, мы получаем достаточно хорошее совпадение численных результатов и аппроксимации (133), показанной на Рис. 24 пунктирной линией.

Как видно из Рис. 24, нормальное рассеяние квазичастиц приводит к существенному росту числа проводящих мод при уменьшении расстояния d . Этот эффект есть следствие подавления минищели в спектре. Немонотонное поведение $N_0(d)$ на расстояниях $d \sim \xi$ имеет ту же причину, что и подавление плотности состояний на уровне

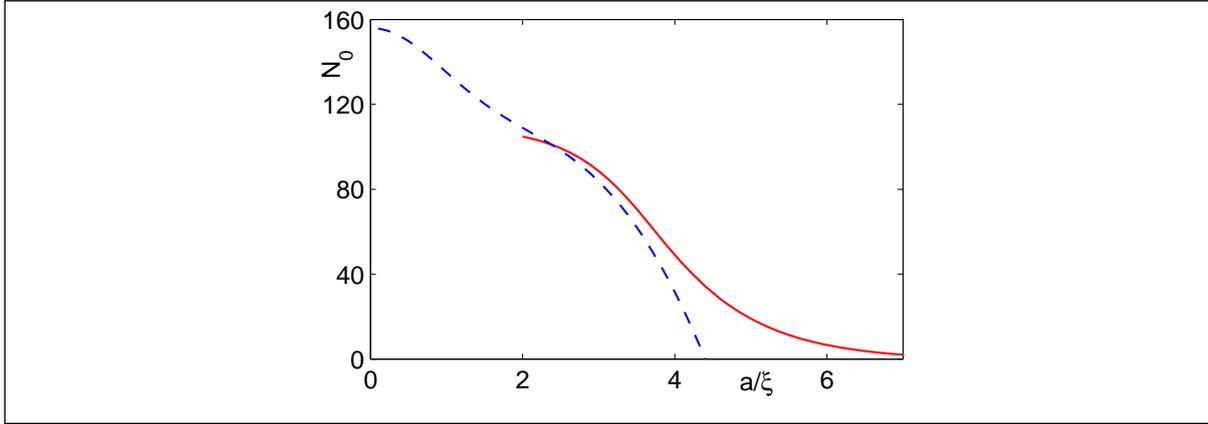


Рис. 23: Остаточное число проводящих мод N_0 как функция расстояния между двумя вихрями a . Сплошная линия соответствует расчету на основе выражения (127), тогда как пунктирные линии получены с помощью приближенного аналитического выражения (130).

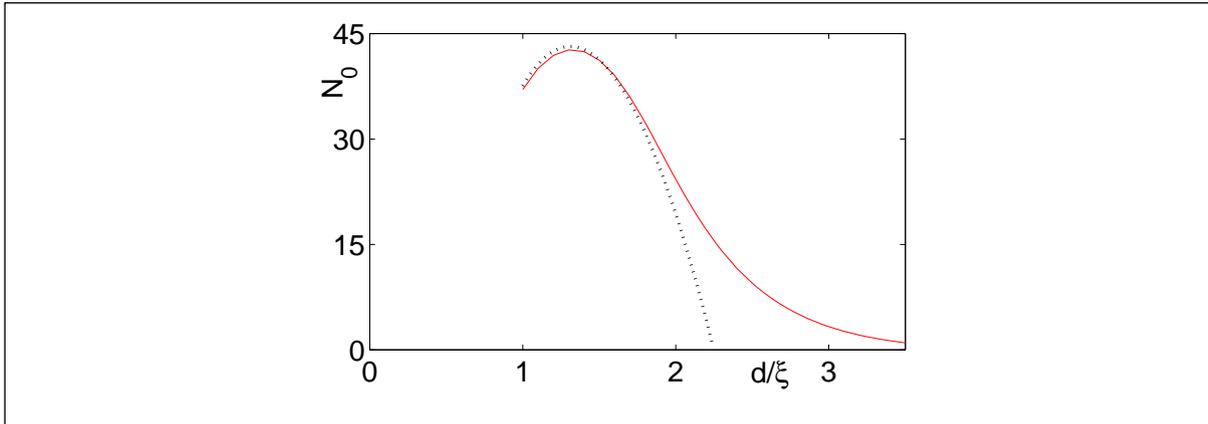


Рис. 24: Остаточное число проводящих мод N_0 как функция расстояния от вихря до поверхности d . Сплошные линии соответствуют результатам численных расчетов на основе выражения (127), пунктирные линии получены с помощью приближенного аналитического выражения (133).

Ферми: остаточное число мод $N_0(d) = N_v(d, T \rightarrow 0)$ определяется числом состояний $N(0)$ на уровне Ферми (см. уравнение (129)), которое пропорционально площади под квазиклассическими орбитами на плоскости (μ, θ_p) . Поэтому сжатие орбит при $d \sim \xi$ приводит к уменьшению числа мод $N_0(d)$. При дальнейшем уменьшении расстояния $d < \xi_v$ наш подход перестает работать. Естественно предположить, что в этой области будет происходить подавление теплового кондактанса вплоть до нуля при выходе вихря из сверхпроводника.

– *Зависимость теплового кондактанса от магнитного поля: качественная картина.*

На основе полученных выше результатов анализа теплового транспорта, опишем качественную зависимость теплового кондактанса от внешнего магнитного поля, вызванную изменением вихревой конфигурации. Для этой цели на Рис. 25(а) схематично построена зависимость эффективного числа проводящих мод N_{eff} от магнитного поля H при некоторой температуре $\omega_0 \lesssim T \ll T_c$. Различные ветви кривой намагничивания,

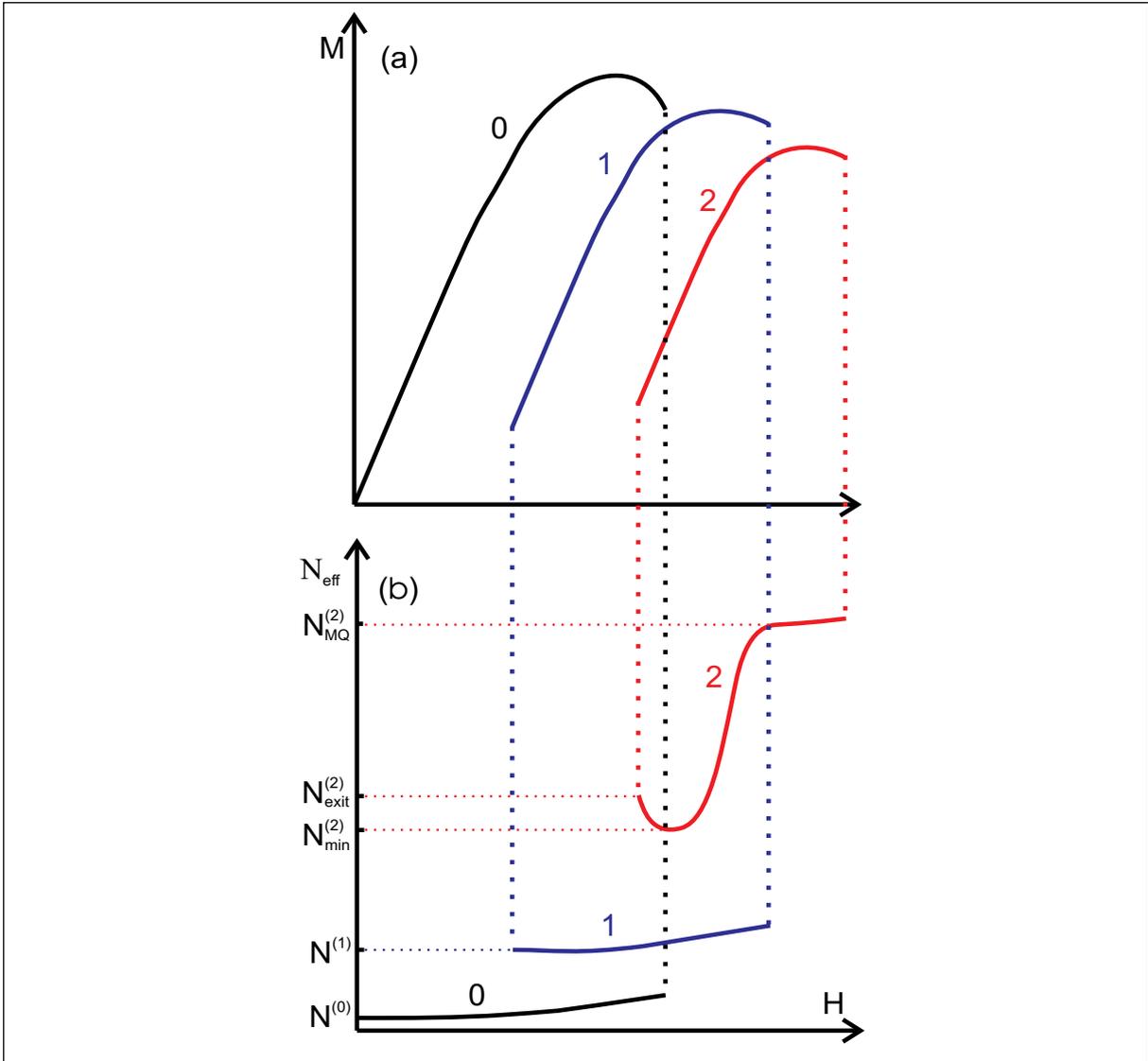


Рис. 25: Схематичные изображения намагниченности M (a) и эффективного числа проводящих мод N_{eff} , дающих вклад в тепловой кондактанс (b) в мезоскопическом сверхпроводнике во внешнем магнитном поле. Различным ветвям зависимостей соответствует различное число вихрей в образце.

показанной на Рис. 25(a), соответствуют состояниям мезоскопического сверхпроводника с различной завихренностью $M = 0, 1, 2$. При малых значениях магнитного поля $H \ll H_{c2}$ сверхпроводник находится в мейсснеровском состоянии, т.е. число вихрей равно 0. Число проводящих мод $N_{\text{eff}} = \kappa/\kappa_0$ (см. Рис. 25(b)) в этом случае определяется квазичастичными уровнями над щелью Δ_0 и поэтому экспоненциально мало $N_{\text{eff}} = N^{(0)} \sim (k_F L)^2 e^{-\Delta_0/T}$ при $T \ll T_c$, где L — характерный поперечный размер образца. С увеличением магнитного поля сверхпроводящая щель частично подавляется, что приводит к незначительному росту N_v . Затем, когда магнитное поле становится достаточно большим, чтобы подавить поверхностный барьер на вход вихря в сверхпроводник, число проводящих мод скачком возрастает до значения $N^{(1)} \sim T/\omega_0$ одновременно со входом вихря. Это увеличение N_v вызвано появлением подщелевых квазичастичных состояний, локализованных в коре вихря [86]. Следующий скачок числа проводящих

мод происходит одновременно со входом второго вихря. В случае, если сила Лоренца, действующая на вихри со стороны мейсснеровского тока, достаточно велика для формирования двухквантового вихря, число N_v увеличивается до значения $N_{MQ}^{(2)} \sim (k_F \xi)$. В интервале магнитных полей, где многоквантовый вихрь является стабильной конфигурацией, N_v почти постоянно. Распад гигантского вихря на отдельные одноквантовые вихри при уменьшении магнитного поля сопровождается уменьшением N_v до значения $N_{min}^{(2)} \gtrsim 2N^{(1)}$. С ростом размера вихревой конфигурации вихри приближаются к границе сверхпроводника и число проводящих мод начинает снова расти, как показано в Разделе 3.5. Этот рост прекращается при достижении некоторого значения $N_{exit}^{(2)}$, когда вихрь выходит из сверхпроводника.

4. Заключение

Перечислим в заключение основные особенности вихревого состояния в мезоскопических сверхпроводниках.

– *Многоквантовые вихревые конфигурации*

Мезоскопические сверхпроводники дают возможность реализовать весьма экзотический набор вихревых конфигураций, в частности, многоквантовые вихри. Такие структуры являются неустойчивыми в объемных системах, а стабилизация их в малых образцах происходит благодаря граничным эффектам. Мезоскопические системы являются хорошей моделью для экспериментального и теоретического исследования сверхпроводящего состояния с расстоянием между индивидуальными вихрями, перестраиваемым в широком диапазоне. Предельным случаем такой перестройки является многоквантовый вихрь. Переключения между различными вихревыми состояниями приводят к целому набору фазовых переходов I и II родов.

– *Системы вихрь–антивихрь*

Краевые эффекты в малых системах приводят еще к одному типу экзотического вихревого состояния, а именно, структурам, образованным вихрями и антивихрями. Такие необычные вихревые состояния оказываются стабильными только вблизи перехода в сверхпроводящее состояние и крайне чувствительны к различным дефектам поверхности образцов.

– *Плотность состояний квазичастиц*

Прямым способом обнаружения экзотических вихревых состояний может служить сканирующая туннельная микроскопия/спектроскопия, которая позволяет измерять локальную плотность состояний. Спектральные характеристики квазичастиц в вихревых состояниях в малых сверхпроводниках подвержены сильному влиянию двух эффектов: туннелированию квазичастиц между вихрями и нормальному отражению от границ образца. Оба эффекта существенно сказываются как на пространственных профилях плотности состояний, так и на характерных масштабах зависимости плотности состояний от энергии.

– *Тепловой транспорт*

Изменение спектров подщелевых состояний, которое происходит при входе вихрей в мезоскопический образец и/или трансформации вихревой структуры, существенно меняет теплопроводность при низких температурах.

Экспериментальное исследование характеристик транспорта тепла и плотности состояний, совмещенное с измерениями магнитного момента образцов как функции приложенного магнитного поля, могло бы способствовать идентификации необычных вихревых фаз, предсказанных для мезоскопических систем.

Работа над данным обзором поддержана РФФИ, программой РАН “Квантовая физика конденсированных сред”, фондом “Династия”, а также проектом в рамках федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”.

Литература

1. *Абрикосов А. А.*, О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы // ЖЭТФ, 1957, **32** (6), 1442–1452.
2. *Boato G., Gallinaro G., and Rizutto C.* Direct evidence for quantized flux threads in type-II superconductors // Solid State Commun., 1965 **3** (8), 173–176.
3. *Fink H. J. and Presson A. G.* Magnetic Irreversible Solution of the Ginzburg-Landau Equations // Phys. Rev., 1966, **151** (2), 219–228.
4. *Barnes, L. J., Fink, H. J.* Contribution of surface currents to magnetic hysteresis in the mixed state of a type II superconductor // Phys. Lett., 1966, **20** (6), 583–584.
5. *Fink H. J. and Presson A. G.* Superheating of the Meissner State and the Giant Vortex State of a Cylinder of Finite Extent // Phys. Rev., 1968, **168** (2), 399–402.
6. *McLachlan D. S.*, I quantum oscillations and the order of the phase charge in a low κ type II superconducting microcylinder // Solid St. Commun., 1970, **8** (20), 1589–1593.
7. *Sandier E., Serfaty S.* Vortices in the Magnetic Ginzburg-Landau Model // Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. **70**, Birkhauser, 2007, 322p.
8. *Tsuei C. C. and Kirtley J. R.* Pairing symmetry in cuprate superconductors // Rev. Mod. Phys., 2000, **72** (4), 969–1016.
9. *Fischer O., Kugler M., Maggio-Aprile I., Berthod C., Renner C.*, Scanning tunneling spectroscopy of high-temperature superconductors // Rev. Mod. Phys., 2007, **79**, 353–419.
10. *Андреев А. Ф.* Теплопроводность промежуточного состояния сверхпроводников // ЖЭТФ, 1964, **46** (5), 1823–1827.
11. *Caroli C., de Gennes P. G., Matricon J.* Bound Fermion states on a vortex line in a type II superconductor // Phys. Lett., 1964, **9** (4), 307–309.
12. *Melnikov A. S., Silaev M. A.* Intervortex quasiparticle tunneling and electronic structure of multi-vortex configurations in type-II superconductors // Письма в ЖЭТФ, 2006, **83** (12), 675–680.
13. *Kopnin N. B., Mel'nikov A. S., Pozdnyakova V. I., Ryzhov D. A., Shereshevskii I. A., and Vinokur V. M.* Giant Oscillations of Energy Levels in Mesoscopic Superconductors // Phys. Rev. Lett., 2005, **95**, 197002, 4 pp.
14. *Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.* К теории сверхпроводимости // ЖЭТФ, 1950, **20**, 1064–1081.
15. *Шмидт В. В.*, Введение в физику сверхпроводников // МЦНМО, М., 2000, 402 стр.
16. *Абрикосов А. А.*, Основы теории металлов // ФИЗМАТЛИТ, М., 2009, 598 стр.
17. *Тинкхам М.*, Введение в сверхпроводимость // Атомиздат, М., 1980, 310 стр.
18. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Статистическая физика: Часть 1 // ФИЗМАТЛИТ, М., 2001, 616 стр.
19. *Де Жен П.*, Сверхпроводимость металлов и сплавов // Мир, М., 1968, 280 стр.
20. *Schmid A.* A time dependent Ginzburg-Landau equation and its application to the problem of resistivity in the mixed state // Phys. Kond. Materie, 1966, **5** (4), 302–317.
21. *Abrahams E. and Tsuneto T.* Time Variation of the Ginzburg-Landau Order Parameter // Phys. Rev., 1966, bf 152 (1), 416–432.
22. *Горьков Л. П., Элиашберг Г. М.* Обобщение уравнений теории Гинзбурга-Ландау для нестационарных задач в случае сплавов с парамагнитными примесями // ЖЭТФ, 1968, **54**, 612–626.
23. *Горьков Л. П., Копнин Н. Б.* Движение вихрей и электросопротивление сверхпроводников второго рода в магнитном поле // УФН, 1975, **116** (3), 413–448.
24. *Watts-Tobin R. J., Krahenbuhl Y., and Kramer L.* Nonequilibrium theory of dirty, current-carrying superconductors: Phase-slip oscillators in narrow filaments near T_c // J. Low. Temp. Phys., 1981, **42** (5–6), 459–501.
25. *Kopnin N. B.* Theory of nonequilibrium superconductivity // Clarendon Press, Oxford, 2001, 328 pp.
26. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля // Наука, М., 1988, 509 стр.
27. *Clem J. R.* Simple Model for the vortex core in a type II superconductor // J. Low Temp. Phys., 1975, **18** (5–6), 427–434.
28. *Hao Zh., Clem J. R., McElfresh M. W., Civale L., Malozemoff A. P., and Holtzberg F.* Model for the reversible magnetization of high- κ type-II superconductors: Application to high- T_c superconductors // Phys. Rev. B, 1991, **43** (4), 2844–2852.
29. *Сан-Жам Д., Сарма Г., Томас Е.* Сверхпроводимость второго рода // Мир, М., 1970, 364 стр.
30. *Gustafson S., Sigal I. M.* The Stability of Magnetic Vortices // Communications in Mathematical Physics, 2000, **212** (2), 257–275.
31. *Gustafson S.* Dynamic stability of magnetic vortices // Nonlinearity, 2002, **15** (5), 1717–1728.
32. *Bogomol'nyi E. B.* The stability of classical solutions // Sov. J. Nucl. Phys., 1976, **24** (4), 449–454.
33. *Boutet de Monvel-Berthier A., Geogescu V., Purice R.* A Boundary Value Problem Related to the Ginzburg-Landau Model // Commun. Math. Phys., 1991, **142** (1), 1–23.

34. Romaguera A. R. de C., Doria M. M., and Peeters F. M. Tilted vortices in a superconducting mesoscopic cylinder // *Phys. Rev. B*, 2007, **75** (18), 184525, 12 pp.
35. Romaguera A. R. de C., Doria M. M., and Peeters F. M. Transverse magnetization and torque in asymmetrical mesoscopic superconductors // *Phys. Rev. B*, 2007, **76** (2), 020505(R), 4 pp.
36. Chen Y., Doria M. M., and Peeters F. M. Vortices in a mesoscopic cone: A superconducting tip in the presence of an applied field // *Phys. Rev. B*, 2008, **77** (5), 054511, 13 pp.
37. Berger J., Rubinstein J. Connectivity and superconductivity // Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000, 256 pp.
38. Velez M., Martin J. I., Villegas J. E., Hoffmann A., Gonzalez E. M., Vicent J. L., and Schuller I. K. Superconducting vortex pinning with artificial magnetic nanostructures // *Journ. Magn. Magn. Mater.*, 2008, **320** (21), 2547–2562.
39. Aladyshkin A. Yu., Silhanek A. V., Gillijns W. and Moshchalkov V. V. Nucleation of superconductivity and vortex matter in superconductor-ferromagnet hybrids // *Supercond. Sci. Technol.*, 2009, **22** (5), 053001, 48pp.
40. Buzdin A. I., Brison J. P. Vortex structures in small superconducting disks // *Phys. Lett. A*, 1994, **196** (1–2), 267–271.
41. Akkermans E., Gangardt D. M., and Mallick K. Mesoscopic superconductors in the London limit: Equilibrium properties and metastability // *Phys. Rev. B*, 2001, **63** (6), 064523, 15 pp.
42. Serfaty S. Vortices in the Ginzburg-Landau model of superconductivity // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid (Spain)*, 2006.
43. Baelus B. J., Peeters F. M., and Schweigert V. A. Saddle-point and energy barriers for vortex entrance and exit in superconducting disks and rings // *Phys. Rev. B*, 2001 **63** (14), 144517, 12 pp.
44. Baelus B. J. and Peeters F. M. Dependence of the vortex configuration on the geometry of mesoscopic flat samples // *Phys. Rev. B*, 2002, **65** (10), 104515, 12 pp.
45. Chibotaru L. F., Ceulemans A., Bruyndoncx A. V., Moshchalkov V. V. Symmetry-induced formation of antivortices in mesoscopic superconductors // *Nature*, 2000, **408**, 833–835.
46. Mel'nikov A. S., Nefedov I. M., Ryzhov D. A., Shereshevskii I. A., Vinokur V. M., Vysheslavtsev P. P., "Vortex states and magnetization curve of square mesoscopic superconductors", *Phys. Rev. B*, 2002, **65** (14), 140503(R), 4 pp.
47. Singha Deo P., Schweigert V. A., Peeters F. M., Geim A. K. Magnetization of Mesoscopic Superconducting Disks // *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **79** (23), 4653–4656.
48. Schweigert V. A., Peeters F. M., and Singha Deo P. Vortex Phase Diagram for Mesoscopic Superconducting Disks // *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **81** (13), 2783–2786.
49. Schweigert V. A. and F. M. Peeters Phase transitions in thin mesoscopic superconducting disks // *Phys. Rev. B*, 1998, **57** (21), 13817–13832.
50. Palacios J. J. Vortex matter in superconducting mesoscopic disks: Structure, magnetization, and phase transitions // *Phys. Rev. B*, 1998, **58** (10), R5948–R5951, 4 pp.
51. Geim A. K., Dubonos S. V., Grigorieva I. V., Novoselov K. S., Peeters F. M., Schweigert V. A. Non-quantized penetration of magnetic field in the vortex state of superconductors: "fractional" and "negative" vortices // *Nature*, 2000, **407**, 55–57.
52. Geim A. K., Dubonos S. V., Palacios J. J., Grigorieva I. V., Henini M., Schermer J. J. Fine Structure in Magnetization of Individual Fluxoid States // *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **85**, (7) 1528–1531.
53. Palacios J. J. Metastability and paramagnetism in superconducting mesoscopic disks // *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **84** (8), 1796–1799.
54. Palacios J. J., Peeters F. M., and Baelus B. J. Effective lowest Landau level treatment of demagnetization in superconducting mesoscopic disks // *Phys. Rev. B*, 2001, **64** (13), 134514, 6 pp.
55. Little W. A. and Parks R. D. Observation of quantum periodicity in the transition temperature of a superconducting cylinder // *Phys. Rev. Lett.*, 1962, **9** (1), 9–12.
56. Saint-James D., Gennes P. G. Onset of superconductivity in decreasing fields // *Physics Letters*, 1963, **7** (5), 306–308.
57. Saint-James D. Etude du champ critique H_{c3} dans une geometrie cylindrique // *Physics Letters*, 1965, **15** (1), 13–15.
58. Bruyndoncx V., Rodrigo J. G., Puig T., Van Look L., Moshchalkov V. V., Jonckheere R. Giant vortex state in perforated aluminum microsquares // *Phys. Rev. B*, 1999, **60** (6), 4285–4292.
59. Jadallah H. T., Rubinstein J., and Sternberg P. Phase Transition Curves for Mesoscopic Superconducting Samples // *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **82** (14), 2935–2938.
60. Morelle M., Bruyndoncx V., Jonckheere R., and Moshchalkov V. V. Critical temperature oscillations in magnetically coupled superconducting mesoscopic loops // *Phys. Rev. B*, 2001, **64** (6), 064516, 7 pp.
61. Moshchalkov V. V., Gielen L., Strunk C., Jonckheere R., Qiu X., van Haesendonck C., and Bruynseraede Y., *Nature (London)*, 1995, **373**, 319–322.

62. Chibotaru L. F. and Ceulemans A., Morelle M., Teniers G., Carballeira C., and Moshchalkov V. V. Ginzburg-Landau description of confinement and quantization effects in mesoscopic superconductors, *Journal of Mathematical Physics*, 2005, **46** (9), 095108, 48 pp.
63. Geim A. K., Dubonos S. V., Grigorieva I. V., Novoselov K. S., Peeters F. M., Schweigert V. A. Phase transitions in individual sub-micrometre superconductors // *Nature*, 1997, **390**, 259–262.
64. Yampolskii S. V. and F. M. Peeters Vortex structure of thin mesoscopic disks with enhanced surface superconductivity // *Phys. Rev. B*, 2000, **62** (14), 9663–9674.
65. Hakim V., Lemaitre A., and Mallick K. Giant vortices in the Ginzburg-Landau description of superconductivity // *Phys. Rev. B*, 2001, **64** (13), 134512, 15 pp.
66. Bonca J. and Kabanov V. V. Phase transitions in the mesoscopic superconducting square // *Phys. Rev. B*, 2002, **65** (1), 012509, 4 pp.
67. Chibotaru L. F., Ceulemans A., Bruyndoncx V., and Moshchalkov V. V Vortex Entry and Nucleation of Antivortices in a Mesoscopic Superconducting Triangle // *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **86** (7), 1323–1326.
68. Du Q., Gunzburger M. D. and Peterson J. S., Solving the Ginzburg-Landau equations by finite-element methods // *Phys. Rev. B*, 1992, **46** (14), 9027–9034.
69. Wang Z. D., Wang Q.-H., Vortex states and dynamics of d -wave superconductor: Finite-element analysis // *Phys. Rev. B*, 1997, **55** (17), 11756–11765.
70. Kato R., Enomoto Y., Mackawa S. Effects of the surface boundary on the magnetization process in type-II superconductors // *Phys. Rev. B*, 1993, **47** (13), 8016–8024.
71. Chibotaru L. F., Ceulemans A., Teniers G., Moshchalkov V. V., Nucleation of superconductivity in regular polygons: superconducting vector potential gauge approach // *Physica C*, 2002, **369**, 149–157.
72. Bardeen J., Cooper L. N. and Schrieffer J. R. Theory of Superconductivity // *Phys. Rev.*, 1957, **108** (5), 1175–1204.
73. Минеев В.П., Самохин К.В. *Введение в теорию необычной сверхпроводимости* // Москва: издательство МФТИ, 1998, 144 стр.
74. Maniv T., Zhuravlev V., Vagner I., and Wyder P. Vortex states and quantum magnetic oscillations in conventional type-II superconductors // *Rev. Mod. Phys.*, 2001, **73** (4), 867–911.
75. Mints R. G. and Rachmanov A. L. On the energy spectrum of excitations in type-II superconductors // *Solid St. Commun.*, 1975, **16** (6), 747–750.
76. Gygi F. and Schluter M. Self-consistent electronic structure of a vortex line in a type-II superconductor // *Phys. Rev. B*, 1991, **43** (1), 7609–7621.
77. Bardeen J., Kümmel R., Jacobs A. E., and Tewordt L. Structure of Vortex Lines in Pure Superconductors // *Phys. Rev.*, 1969, **187** (2), 556–569.
78. Beenakker C. W., van Houten H. Josephson current through a superconducting quantum point contact shorter than the coherence length // *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66** (23), 3056–3059.
79. Canel E. On single particle excitations in a mixed state of type-II superconductors // *Phys. Lett.*, 1965, **16**, 101–103.
80. Ichioka M., Hayashi N., Machida K. Local density of states in the vortex lattice in a type-II superconductor // *Phys. Rev. B*, 1996, **55** (10), 6565–6576.
81. Hess H. F., Robinson R. B., and Waszczak J. V. Vortex-core structure observed with a scanning tunneling microscope // *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64** (22), 2711–2714.
82. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Статистическая физика: Часть 2* // ФИЗМАТЛИТ, М., 2002, 496 стр.
83. Terashima T., Haworth C., Takeya H., Uji S., Aoki H., Kadowaki K. Small superconducting gap on part of the Fermi surface of YNi_2B_2C from the de Haas-van Alphen effect // *Phys. Rev. B*, 1997, **56** (9), 5120–5123.
84. Larkin A. I. and Ovchinnikov Yu. N. Resistance of layered superclean superconductors at low temperatures // *Phys. Rev. B*, 1998, **57** (9), 5457–5465.
85. Graser S., Iniotakis C., Dahm T., Schopohl N. Shadow on the Wall Cast by an Abrikosov Vortex // *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **93** (24), 247001, 4 pp.
86. Kopnin N. B., Mel'nikov A. S., Pozdnyakova V. I., Ryzhov D. A., Shereshevskii I. A., and Vinokur V. M. Enhanced vortex heat conductance in mesoscopic superconductors // *Phys. Rev. B*, 2007, **75** (2), 024514, 11 pp.
87. Volovik G. E. Vortex motion in fermi-superfluids and Callan – Harvey effect // *Письма в ЖЭТФ*, 1993, **57** (4), 233–237.
88. Tanaka Y., Hasegawa A., and Takayanagi H. Energy spectrum of the quasiparticle in a quantum dot formed by a superconducting pair potential under a magnetic field // *Solid St. Commun.*, 1993, **85** (4), 321–328.
89. Tanaka Y., Kashiwaya S., and Takayanagi H. Theory of superconducting quantum dot under magnetic field // *Jpn. J. Appl. Phys.*, 1995, **34**, 4566–4569.

90. *Rainer D., Sauls J. A., and Waxman D.* Current carried by bound states of a superconducting vortex // *Phys. Rev. B*, 1996, **54** (14), 10094–10106.
91. *Virtanen S. M. M. and Salomaa M. M.* Multiquantum vortices in superconductors: Electronic and scanning tunneling microscopy spectra // *Phys. Rev. B*, 1999, **60** (21), 14581–14584.
92. *Eschrig M., Rainer D., and Sauls J. A.* Vortex Core Structure and Dynamics in Layered Superconductors // In book: Huebener R. P., Schopohl N. and Volovik G. E., *Vortices in unconventional superconductors and superfluids*, Springer Verlag, Berlin, 2002, 175–202.
93. *Tanaka K., Robel I., and Janko B.* Electronic structure of multiquantum giant vortex states in mesoscopic superconducting disks // *Proc. Nat. Acad. Sci. (USA)*, 2002, **99**, 5233–5236.
94. *Mel'nikov A. S. and Vinokur V. M.* Mesoscopic superconductor as a ballistic quantum switch // *Nature*, 2002, **415**, 60–62.
95. *Hess H. F., Robinson R. B., Dynes R. C., Valles Jr. J. M., and Waszczak J. V.* Scanning-Tunneling-Microscope observation of the Abrikosov flux lattice and the density of states near and inside a fluxoid // *Phys. Rev. Lett.* 1989, **62** (2), 214–216.
96. *Kohen A., Proslie Th., Cren T., Noat Y., Sacks W., Berger H., and Roditchev D.* Probing the Superfluid Velocity with a Superconducting Tip: The Doppler Shift Effect // *Phys. Rev. Lett.* 2006, **97** (2), 027001, 4 pp.
97. *Lowell J. and Sousa J. B.* Mixed-state thermal conductivity of type II superconductors // *J. Low Temp. Phys.*, 1970, **3**, 65–87.
98. *Vinen W. F., Forgan E. M., Gough C. E., and Hood M. J.* Ultrasonic absorption and thermal conduction in the mixed state of type-II superconductors // *Physica (Utrecht)* 1971, **55**, 94–113.
99. *Kopnin N. B., Mel'nikov A. S. and Vinokur V. M.* Single-electron transport through the vortex core levels in clean superconductors // *Phys. Rev. B*, 2003, **68** (5), 054528, 6 pp.
100. *Демиховский В. Я., Вугальтер Г. А.,* Физика квантовых низкоразмерных структур // "Логос", М., 2000, 247 стр.
101. *Datta S.* *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* // Cambridge University Press, Cambridge, 1995, 398 pp.
102. *Rego L. G. C. and Kirczenow G.* Fractional exclusion statistics and the universal quantum of thermal conductance: A unifying approach // *Phys. Rev. B*, 1999, **59** (20), 13080–13086.
103. *van Houten H., Molenkamp L. W., Beenakker C. W. J., and Foxon C. T.* Thermo-electric properties of quantum point contacts // *Semicond. Sci. Technol.*, 1992, **7**, B215–B221.
104. *Chiatti O., Nicholls J. T., Proskuryakov Y. Y., Lumpkin N., Farrer I., and Ritchie D. A.* Quantum thermal conductance of electrons in a one-dimensional wire // *Phys. Rev. Lett.*, 2006, **97** (5), 056601, 4 pp.
105. *Volovik G. E.* Localized fermions on quantized vortices in superfluid $^3\text{He-B}$ // *J. Phys.: Condens. Matter*, 1991, **3** (3), 357–367.
106. *Мельников А. С., Позднякова В. И., Рыжов Д. А., Шерешевский И. А.* Вихревые состояния в мезоскопических сверхпроводниках. // *Нанозифика и нанозлектроника*, Нижний Новгород, сборник тезисов докладов, 2006, 159–160.
107. *Mel'nikov A. S., Ryzhov D. A., Silaev M. A.* Electronic structure and heat transport of multivortex configurations in mesoscopic superconductors // *Phys. Rev. B*, 2008, **78** (6), 064513, 20 pp.
108. *Kopnin N. B., Volovik G. E.* Singularity of the vortex density of states in d-wave superconductors // *Письма в ЖЭТФ*, 1996, **64** (9), 641–645.
109. *Kopnin N. B.* Resonant absorption at the vortex-core states in d-wave superconductors // *Phys. Rev. B*, 1998, **57** (18), 11775–11785.
110. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* *Квантовая механика. Нерелятивистская теория.* // ФИЗМАТЛИТ, М., 2002, 808 стр.
111. *Kane E. O. and Blount E. I.* *Tunneling Phenomena in Solids* // New York, Plenum Press, 1969, 350 pp.
112. *Eilenberger G.* Transformation of Gorkov's equation for type II superconductors into transport-like equations // *Z. Phys.*, 1968, **214**, 195–213.
113. *Maki K.* Thermal conductivity of pure type-II superconductors in high magnetic fields // *Phys. Rev.*, 1967, **158** (2), 397–399.
114. *Schopohl N.* Transformation of the Eilenberger Equations of Superconductivity to a Scalar Riccati Equation // *arXiv:9804064*, 1998, 17 pp.
115. *Schopohl N., Maki K.* Quasiparticle spectrum around a vortex line in a d -wave superconductor // *Phys. Rev. B*, 1995, **52** (1), 490–494.
116. *Kopnin N. B., Mel'nikov A. S. and Vinokur V. M.* Single-electron transport through the vortex core levels in clean superconductors // *Phys. Rev. B* 2003, **68** (5), 054528, 6 pp.
117. *Butcher P. N.* Thermal and electrical transport formalism for electronic microstructures with many terminals // *J. Phys.: Condens. Matter*, 1990, **2** (22), 4869–4878.

118. van Houten H., Molenkamp L. W., Beenakker C. W. J., and Foxon C. T., Thermo-electric properties of quantum point contacts // *Semicond. Sci. Technol.*, 1992, **7** (3B), B215–B221.
119. Ларкин А. И., Овчинников Ю. Н. О квазиклассическом методе в теории сверхпроводимости // *ЖЭТФ*, 1968, **55** (6), 2262–2272.

MATHEMATICAL MODELING OF VORTEX STATES IN MESOSCOPIC SUPERCONDUCTORS

A.S. Mel'nikov, D.A. Ryzhov, M.A. Silaev, I.A. Shereshevskii

Institute for Physics of Microstructures RAS
melnikov@ipm.sci-nnov.ru

Received 30.12.2009

The review of modern mathematical approaches to the theory of vortex phases in mesoscopic superconductors is presented. This paper consists of two parts. The first part is devoted to the methods and results of phenomenological Ginzburg-Landau theory and the second part considers several aspects of microscopic theory. Thus the first part describes the peculiarities of macroscopic quantities, such as superconducting order parameter, electromagnetic fields and currents in vortex states while in the second part the quantum mechanics of fermion excitations (electron and holes) moving in the superconducting pairing potential is considered. In the second part the basic concepts of quantum mechanics of vortex states are discussed, such as the intervortex tunneling of quasiparticles and the interplay of Andreev reflection at vortex cores and normal reflection at the sample boundary. The analysis of electronic structures of different vortex configurations in mesoscopic superconductors is presented. Experimentally measurable quantities such as the heat conductivity and local density of states distribution (measured by scanning tunneling microscopes) are calculated.