СЛУЧАЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕЗОНАНСА*

О.А. Султанов

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия

oasultanov@gmail.com

Поступила 06.08.2012

Исследуются дифференциальные уравнения, которые возникают в теории нелинейных колебаний в задачах связанных с резонансами. Интерес представляют решения, амплитуда которых неограниченно растет на бесконечности по времени. Анализируется устойчивость таких решений относительно случайных возмущений. Полученные результаты опираются на построение функций Ляпунова.

УДК 517.925, 517.938

Введение

В работе рассматриваются системы модельных уравнений главного резонанса:

$$\frac{dr}{dt} = \sin\psi, \quad r\Big[\frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t\Big] = b\cos\psi; \tag{0.1}$$

$$\frac{dr}{dt} = r\sin\psi, \quad \frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t = b\cos\psi. \tag{0.2}$$

Здесь $\lambda, b = \text{const} \neq 0$, $\lambda > 0$. Такие уравнения возникают в теории нелинейных колебаний при использовании метода усреднения [1]. В частности, в задачах с медленно меняющейся частотой внешней накачки появляются неавтономные уравнения типа (0.1), либо (0.2). Функции $r(t)$, $\psi(t)$ соответствуют медленно меняющимся амплитуде и сдвигу фа-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10-01-00186, 11-02-97003).

зы быстрых гармонических колебаний. Интерес представляют решения с неограниченной амплитудой, которые в приложениях связывают с авторезонансом [2]. В данной работе исследуется устойчивость таких решений при постоянно действующих случайных возмущениях [3]. Как правило, наблюдаемым физическим процессам [4, 5, 6] соответствуют именно устойчивые решения.

Для рассматриваемых уравнений (0.1) и (0.2) явное решение не выписывается; однако, довольно просто строится асимптотическое решение с растущей амплитудой в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами:

$$r(t)=\sqrt{\lambda t}+r_0+\sum_{n=1}^{\infty} r_n t^{-n/2}, \quad \psi(t)=\psi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n t^{-n/2}, \quad t\to\infty. \tag{0.3}$$

На этом пути определяется несколько решений, отличия в которых определяются выбором одного из корней уравнения: $\sin\psi_0=0$, а именно $\psi_0=0$ и $\psi_0=\pi$. Обоснование асимптотик в виде рядов с постоянными коэффициентами следует из [7, 8]. Однако, вопрос устойчивости таких решений остается открытым.

Численный анализ уравнений (0.1) свидетельствует о наличии устойчивых решений двух типов: с ограниченной и неограниченной амплитудой (см. рис. 1). Более строгие рассуждения о поведении решений системы (0.1) можно найти, например, в [9].

Наряду с системами (0.1) и (0.2) будем рассматривать возмущенные уравнения:

$$\frac{dr}{dt}=(1+\mu\,\xi)\sin\psi, \quad r\Big[\frac{d\psi}{dt}-r^2+\lambda t+\mu\,\zeta\Big]=b(1+\mu\,\eta)\cos\psi; \tag{0.4}$$

$$\frac{dr}{dt}=r(1+\mu\,\xi)\sin\psi, \quad \frac{d\psi}{dt}-r^2+\lambda t+\mu\,\zeta=b(1+\mu\,\eta)\cos\psi. \tag{0.5}$$

Здесь $\xi(r,\psi,t,\omega)$, $\eta(r,\psi,t,\omega)$, $\zeta(r,\psi,t,\omega)$ – одномерные (со значениями в $\mathbb{R}$) случайные процессы определенные на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{U},\mathbf{P})$, $(r,\psi)\in\mathbb{R}^2$, $t\ge 0$. При анализе устойчивости удобно выделять малый множитель $\mu\in\mathbb{R}$, $|\mu|\ll 1$, с помощью которого можно контролировать величину возмущений, [10, 11].

Функции ξ и η соответствуют возмущению амплитуды, ζ – возмущению фазы накачки. Проблема состоит в идентификации класса возмущений (ξ,η,ζ), относительно которого растущее решение будет устойчиво. В данной работе мы ограничиваемся классом возмущений, при котором системы (0.4) и (0.5) имеют глобальное решение на полуоси [3, c. 20] и понимаются в обычном смысле. Случай возмущений типа «белого шума» требует особого внимания, и здесь не рассматривается.

Будем рассматривать класс возмущений $\mathfrak{M}$, состоящий из наборов (ξ,η,ζ), для которых найдется хотя бы одна функция γ:

$$|\xi(r,\psi,t,\omega)|\le t^{-u}\,\gamma(\tau,\omega), \quad |\eta(r,\psi,t,\omega)|\le t^{-v}\,\gamma(\tau,\omega), \quad |\zeta(r,\psi,t,\omega)|\le t^{-1}\,\gamma(\tau,\omega),$$

при всех $(r,\psi)\in\mathbb{R}^2$, $t\ge 1$, $\tau=\kappa t^{\sigma}$, $u,v,\kappa,\sigma=\text{const}>0$. Причем каждая мажоранта $\gamma(\tau,\omega)$ должна обладать следующим свойством:

$$\exists\, m(\omega), T=\text{const}>0: \quad \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\gamma(\vartheta,\omega)d\vartheta\le m(\omega), \quad \forall\, t\ge 1,\, \omega\in\Omega. \tag{0.6}$$

На случайную величину $m(\omega)$ накладывается условие ограниченности математического ожидания:

$$\mathbf{E}[m(\omega)]<\infty. \tag{0.7}$$

Класс $\mathfrak{M}$ определяется параметрами u, v, κ, σ и оказывается разным в различных задачах. Присутствие убывающих множителей t^{-u},t^{-v},t^{-1} в оценках возмущений, объ-

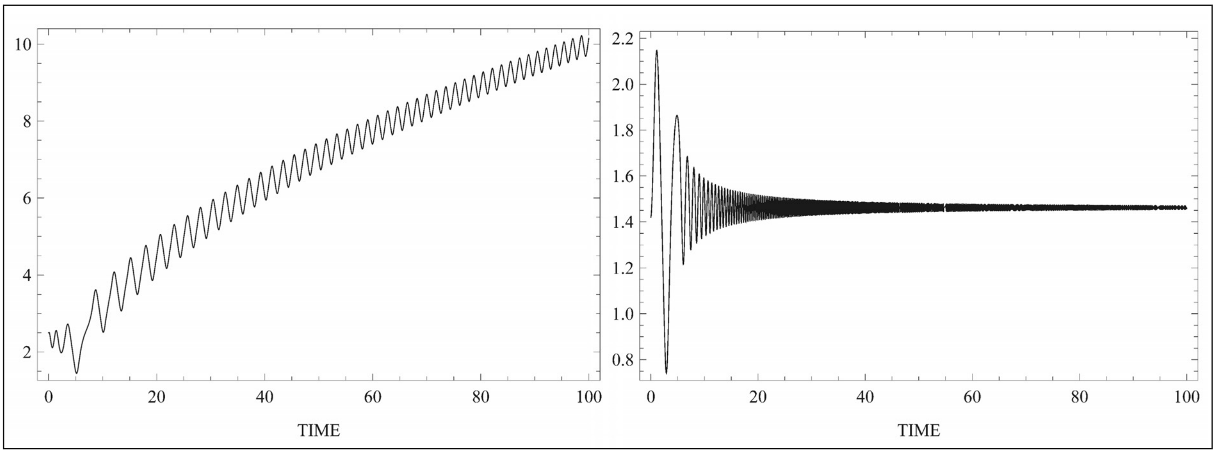

Рис. 1: Амплитуда решения системы (0.1) с различными начальными данными при $b = 1$, $\lambda = 1$. Слева $r(0) = 2.5$, $\psi(0) = 2.78$. Справа $r(0) = 1.42$, $\psi(0) = 0.1$.

ясняется спецификой исследуемых уравнений. Отметим, что детерминированные возмущения, обладающие свойством (0.6) с $m(\omega) \equiv \mathrm{const} < \infty$, называются ограниченными в среднем [12, 13].

В случае возмущений с равномерно ограниченной мажорантой $\gamma(\tau, \omega)$ устойчивость авторезонансных решений следует из [11]. Более слабое ограничение $\sup_t \mathbf{E}[\gamma(t, \omega)] < \infty$ на класс возмущений содержится в известных результатах об устойчивости общих систем. При этом для устойчивости достаточно, чтобы невозмущенная система была диссипативной [3, с. 24]. Однако, модели авторезонанса этим свойством не обладают, поскольку они имеют решения двух типов: с ограниченной и неограниченной амплитудой (рис. 1). Поэтому известные результаты здесь не применимы. Требование диссипативности можно обойти путем введения интегрального ограничения (0.6) на мажоранту возмущения [14].

В работе предполагается устойчивость рассматриваемого решения на любом конечном промежутке, и решается задача об устойчивости только в окрестности бесконечности. Напомним определение устойчивости относительно случайных возмущений:

Определение 1. *Решение $r(t)$, $\psi(t)$ невозмущенных уравнений* (0.1) (*или* (0.2)) *устойчиво* (*сильно*) *по вероятности относительно постоянно действующих случайных возмущений равномерно в классе $\mathfrak{N}$, если $\exists\, t_* : \forall\, t_0 > t_*, \forall\, \varepsilon, \nu > 0$ существуют $\delta, \Delta > 0$ такие, что при любых $\widehat{r}_0$, $\widehat{\psi}_0$: $|r(t_0) - \widehat{r}_0| < \delta$, $|\psi(t_0) - \widehat{\psi}_0| < \delta$, $\forall\, |\mu| < \Delta$ и $\forall\, (\xi, \eta, \zeta) \in \mathfrak{N}$ всякое решение $\widehat{r}(t, \omega)$, $\widehat{\psi}(t, \omega)$ возмущенных уравнений* (0.4) (*или* (0.5)) *с начальными данными $\widehat{r}(t_0, \omega) = \widehat{r}_0$, $\widehat{\psi}(t_0, \omega) = \widehat{\psi}_0$ удовлетворяет неравенству*

$$\mathbf{P}(\sup_{t > t_0}\{|r(t) - \widehat{r}(t, \omega)|^2 + |\psi(t) - \widehat{\psi}(t, \omega)|^2\} > \varepsilon) < \nu.$$

Приведенное определение обычно связывают с понятием сильной устойчивости [15, с. 400]. Помимо этого, в задачах со случайными возмущениями можно встретить определение слабой устойчивости (см. например, [16]), при котором вблизи устойчивого решения почти все время проходят решения возмущенных уравнений, причем, возможны сколь угодно большие выбросы. В случае, когда решение устойчиво сильно, такие выбросы недопустимы.

В исследованиях устойчивости систем (0.1), (0.2) и других похожих уравнений можно выделить общую часть, которую удобно излагать отдельно, что делается в первом разделе. Вторая часть работы посвящена исследованию моделей авторезонанса.

1. Общие системы

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений на полуоси:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \tau > 1, \tag{1.1}$$

которая имеет тривиальное решение: $\mathbf{f}(0,\tau) \equiv 0$. Для системы (1.1) предполагается наличие функции Ляпунова $V(\mathbf{x},\tau)$, для которой имеют место оценки

$$A|\mathbf{x}|^2 \le V(\mathbf{x},\tau) \le B|\mathbf{x}|^2, \quad \Big|\frac{\partial V}{\partial x_i}\Big| \le C|\mathbf{x}|, \quad \frac{dV}{d\tau}\Big|_{(1.1)} \le -\tau^{-1}|\mathbf{x}|^2. \tag{1.2}$$

Эти неравенства выполняются равномерно в области $D(\rho_0,\tau_0) = \{(\mathbf{x},\tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\mathbf{x}| < \rho_0, \tau > \tau_0\}$, при некоторых константах $0 < \rho_0$, τ_0, A, B, $C < \infty$. Специфика рассматриваемой задачи заключается в наличии убывающего множителя τ^{-1} в оценке (1.2). Функции Ляпунова, обладающие такими свойствами, возникают при исследовании моделей авторезонанса [11], а также более общих систем близких к гамильтоновым [17].

Вместе с системой (1.1) будем рассматривать возмущенные уравнения:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\tau) + \mu\,\mathbf{g}(\mathbf{x},\tau,\omega), \quad |\mu| \ll 1, \quad \tau > 1, \quad \omega \in \Omega. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{g}(\mathbf{x},\tau,\omega)$ – случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}^n$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{U},\mathbf{P})$. Предполагается, что возмущенная система (1.3) имеет глобальное решение на полуоси [3, с. 20]. Ставится вопрос о выделении класса возмущений $\mathbf{g}(\mathbf{x},\tau,\omega)$, при котором тривиальное решение устойчиво.

Будем рассматривать класс возмущений $\mathfrak{P}$, в котором для функции $\mathbf{g}(\mathbf{x},\tau,\omega)$ в области $D(\rho_0,\tau_0)$ найдется хотя бы одна мажоранта $\gamma(\tau,\omega)$ такая, что выполняется оценка $|\mathbf{g}(\mathbf{x},\tau,\omega)| \le \tau^{-1}\gamma(\tau,\omega)$ для всех $(\mathbf{x},\tau) \in D(\rho_0,\tau_0)$. Причем, от каждой мажоранты требуется выполнения следующего свойства

$$\exists\, m(\omega), T = \text{const} > 0: \quad \frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} \gamma(\vartheta,\omega)d\vartheta \le m(\omega), \quad \forall\,\tau \ge \tau_0,\, \omega \in \Omega. \tag{1.4}$$

с величиной $m(\omega)$, которая имеет конечное математическое ожидание (0.7).

Перепишем определение устойчивости, данное во введении, на случай общих систем:

Определение 2. *Решение* $\mathbf{x}(\tau) \equiv 0$ *системы* (1.1) *устойчиво (сильно) по вероятности относительно постоянно действующих случайных возмущений равномерно в классе* $\mathfrak{N}$, *если*

$$\exists\,\tau_*: \quad \forall\,\tau_s > \tau_*, \quad \forall\,\varepsilon,\nu > 0 \;\; \exists\,\delta,\Delta > 0\text{:} \;\; \forall\,|\mathbf{x}_s| < \delta, |\mu| < \Delta, \quad \forall\,\mathbf{g}(\mathbf{x},\tau,\omega) \in \mathfrak{N}$$

всякое решение $\mathbf{x}(\tau,\omega)$ *возмущенных уравнений* (1.3) *с начальным условием* $\mathbf{x}(\tau_s,\omega) = \mathbf{x}_s$ *удовлетворяет неравенству*

$$\mathbf{P}(\sup_{\tau>\tau_s} |\mathbf{x}(\tau,\omega)| > \varepsilon) < \nu.$$

Справедливо утверждение, которое обобщает известные результаты [12, с. 122] на случайные возмущения и на случай оценки (1.2) с множителем τ^{-1}:

Теорема 1.1. *Пусть для системы уравнений* (1.1) *существует функция* $V(\mathbf{x},\tau)$, *обладающая свойством* (1.2). *Тогда* $\forall\,h \in (0;\infty)$ *нулевое решение* $\mathbf{x}(\tau) \equiv 0$ *системы* (1.1) *является устойчивым по вероятности относительно постоянно действующих случайных возмущений* $\mathfrak{P}$ *со свойствами* (1.4) *и* (0.7) *равномерно при* $\mathbf{E}[m(\omega)] \le h$.

Доказательство сводится к построению функции Ляпунова для возмущенной системы на основе функции $V(\mathbf{x},\tau)$. Первая часть доказательства повторяет рассуждения [12] с некоторыми дополнениями. Пусть $h,\varepsilon,\nu>0$ – произвольные положительные константы. Без ограничения общности будем считать, что $m(\omega)>0$.

В качестве кандидата на функцию Ляпунова положим $U(\mathbf{x},\tau,\omega)\equiv V(\mathbf{x},\tau)\exp(\phi(\tau,\omega))$ с некоторой функцией $\phi(\tau,\omega)$, которую следует найти. Полная производная функции U вычисленная вдоль траекторий возмущенной системы:

$$\frac{dU}{d\tau}\Big|_{(1.3)}=\partial_\tau\phi(\tau,\omega)\,U+\Big(\frac{dV}{d\tau}\Big|_{(1.1)}+\mu\,\mathbf{g}\,\partial_{\mathbf{x}}V\Big)\exp(\phi(\tau,\omega))$$

с учетом (1.2) имеет оценку в кольцевой области $\delta<|\mathbf{x}|<\varepsilon$, $\tau>\tau_0$:

$$\frac{dU}{d\tau}\Big|_{(1.3)}\le\partial_\tau\phi(\tau,\omega)\,U+\tau^{-1}\Big(-\frac{1}{B}+|\mu|\gamma(\tau,\omega)\frac{nC}{A\delta}\Big)U.$$

Если $|\mu|\le\Delta_\omega(\delta)\equiv A\delta\ln 2(BnCm(\omega))^{-1}$, то последняя оценка примет вид:

$$\frac{dU}{d\tau}\Big|_{(1.3)}\le\partial_\tau\phi(\tau,\omega)\,U+\tau^{-1}\frac{\ln 2}{m(\omega)B}\Big(-\frac{m(\omega)}{\ln 2}+\gamma(\tau,\omega)\Big)U.$$

Зафиксируем ω и определим вспомогательную функцию $\theta(\tau,\omega)$ таким образом, чтобы выполнялось равенство:

$$\int_{kT}^{(k+1)T}\theta(\vartheta,\omega)d\vartheta=\int_{kT}^{(k+1)T}\vartheta^{-1}\Big(\frac{m(\omega)}{\ln 2}-\gamma(\vartheta,\omega)\Big)d\vartheta \tag{1.5}$$

при всех целых $k\ge\tau_0/T$. Обозначим через $J(k)$ интеграл, стоящий в правой части формулы (1.5), тогда $J(k)$ можно оценить снизу для всех $k\ge\tau_0/T$:

$$J(k)=\frac{m(\omega)}{\ln 2}\ln(1+k^{-1})-\int_{kT}^{(k+1)T}\vartheta^{-1}\gamma(\vartheta,\omega)d\vartheta\ge\frac{1}{k}\Big(m(\omega)-\frac{1}{T}\int_{kT}^{(k+1)T}\gamma(\vartheta,\omega)d\vartheta\Big).$$

Из свойства (1.4) класса $\mathfrak{P}$ следует, что $J(k)\ge 0$, $\forall k\ge\tau_0/T$. Таким образом, интеграл, стоящий в правой части формулы (1.5), будет неотрицательным, и в качестве $\theta(\tau,\omega)$ можно подобрать непрерывную неотрицательную функцию, которая удовлетворяет равенству (1.5).

С помощью $\theta(\tau,\omega)$ теперь определим функцию $\phi(\tau,\omega)$ следующим образом:

$$\phi(\tau,\omega)\equiv\frac{\ln 2}{m(\omega)B}\int_{k_*T}^{\tau}\vartheta^{-1}\Big(\frac{m(\omega)}{\ln 2}-\gamma(\vartheta,\omega)\Big)-\theta(\vartheta,\omega)d\vartheta,$$

здесь $k_*=\min\{k\in\mathbb{Z}:k\ge\tau_0/T\}$. Отсюда следует оценка для полной производной в кольце $\delta<|\mathbf{x}|<\varepsilon$ при $\tau>\tau_*\equiv k_*T$:

$$\frac{dU}{d\tau}\Big|_{(1.3)}\le-\theta(\tau,\omega)\frac{\ln 2}{m(\omega)B}U\le 0.$$

Из определения функции $\phi(\tau,\omega)$ следует, что она обращается в нуль в точках $\tau=kT$ для любого целого $k\ge k_*$. Отсюда, с учетом свойств функции $\theta(\tau,\omega)$ и $\gamma(\tau,\omega)$, следуют оценки $|\phi(\tau,\omega)|\le\phi_0\equiv 4T\ln 2/B$. Таким образом, функция U является положительно определенной:

$$A\exp(-\phi_0)|\mathbf{x}|^2\le U\le B\exp(\phi_0)|\mathbf{x}|^2,\quad\forall\,|\mathbf{x}|<\rho_0,\ \tau>\tau_*.$$

Если для любого $\varepsilon > 0$ подходящим образом выбрать границу $\delta \equiv \varepsilon \exp(-2\phi_0)\sqrt{A/B} < \varepsilon$, то будет выполняться неравенство

$$\sup_{|\mathbf{x}|\le\delta,\tau>\tau_*} U(\mathbf{x},\tau,\omega) < \inf_{|\mathbf{x}|=\varepsilon,\tau>\tau_*} U(\mathbf{x},\tau,\omega).$$

Рассмотрим возмущения $\mathbf{g}(\mathbf{x},\tau,\omega) \in \mathfrak{P}$ для которых $m(\omega) \le h/\nu$ равномерно для всех $\omega \in \Omega$. В этом случае параметр возмущения можно отделить от нуля $0 < |\mu| < \Delta(\varepsilon,\nu) \equiv \nu A\delta \ln 2(BnCh)^{-1} \le \Delta_\omega(\delta)$. Тогда $\forall\,\tau_s > \tau_*$ из свойств функции U и ее полной производной следует, что всякая траектория системы (1.3), выпущенная из окрестности равновесия с начальным значением $\mathbf{x}(\tau_s,\omega) = \mathbf{x}_s$, $|\mathbf{x}_s| < \delta$, остается внутри шара $|\mathbf{x}| < \varepsilon$ при $\tau > \tau_s$.

Для оставшихся возмущений, образующих множество $\mathfrak{P}_{rest}$ выполняться неравенство $m(\omega) > h/\nu$ и справедлива оценка

$$\mathbf{P}(m(\omega) > h/\nu) < \frac{\mathbf{E}[m(\omega)]}{h/\nu} < \nu,$$

которая следует из неравенства Чебышева [3, с. 32]. Следовательно, траектории, для которых начальное значение и параметр возмущения малы $|\mathbf{x}_s| < \delta$, $|\mu| < \Delta(\varepsilon,\nu)$, и которые покидают пределы шара $|\mathbf{x}| < \varepsilon$, являются решениями системы (1.3) с возмущениями $\mathbf{g}(\mathbf{x},\tau,\omega) \in \mathfrak{P}_{rest}$. Поэтому, вероятность появления таких решений мала $\mathbf{P}(\sup_{\tau>\tau_s}|\mathbf{x}(\tau,\omega)| > \varepsilon) < \nu$. Теорема доказана.

2. Модели авторезонанса

2.1. Уравнения главного резонанса

Для невозмущенных уравнений (0.1) рассматривается решение с асимптотикой типа (0.3):

$$R_0(t) = \sqrt{\lambda t} + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad \Psi_0(t) = \pi - t^{-1/2}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad t \to \infty. \tag{2.1}$$

В уравнениях (0.1) и (0.4) делается замена:

$$r(t) = R_0(t) + \frac{R(\tau)}{\sqrt{2R_0}}, \; \psi(t) = \Psi_0(t) + \Psi(\tau), \; \tau = \frac{t^{5/4}\lambda^{1/4}4\sqrt{2}}{5}, \tag{2.2}$$

и для новых функций $R(\tau), \Psi(\tau)$ проводится исследование устойчивости положения равновесия (0;0). Невозмущенное движение в новых переменных описываться системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dR}{d\tau} = -\partial_\Psi H(R,\Psi,\tau), \quad \frac{d\Psi}{d\tau} = \partial_R H(R,\Psi,\tau) + F(R,\Psi,\tau), \tag{2.3}$$

которая близка гамильтоновой при $t \to \infty$. Здесь

$$H(R,\Psi,\tau) = \big[\cos(\Psi+\Psi_0) + \Psi\sin\Psi_0 - \cos\Psi_0 + \frac{1}{2}R^2\big]\frac{\sqrt{R_0}}{(\lambda t)^{1/4}} + \Big[\frac{R}{3} - R_0'\Psi\Big]\frac{R}{2\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}R_0},$$

и негамильтонова компонента

$$F(R,\Psi,\tau) = \frac{b}{\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}}\Big[\frac{\cos(\Psi+\Psi_0)}{R_0 + R/\sqrt{2R_0}} - \frac{\cos\Psi_0}{R_0}\Big] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{R_0'}{(\lambda t)^{1/4}R_0}\Psi.$$

Уравнения возмущенной системы (0.4) для новых функций $R(\tau), \Psi(\tau)$ имеют вид:

$$\frac{dR}{d\tau} = -\partial_\Psi H + \mu G, \quad \frac{d\Psi}{d\tau} = \partial_R H + F + \mu Q.$$

Функции возмущений G и Q представляют собой случайные процессы со значениями в $\mathbb{R}$ и определяются следующими формулами:

$$G(R,\Psi,\tau,\omega)=\widetilde{\xi}\Big(\sin(\Psi_0+\Psi)-\sin\Psi_0\Big)\frac{\sqrt{R_0}}{(\lambda t)^{1/4}},$$
$$Q(R,\Psi,\tau,\omega)=\frac{b\,\widetilde{\eta}}{\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}}\Big(\frac{\cos(\Psi+\Psi_0)}{R_0+R/\sqrt{2R_0}}-\frac{\cos\Psi_0}{R_0}\Big)+\frac{(\widetilde{\zeta}R_0+b\,\widetilde{\eta}\cos\Psi_0)}{\sqrt{2}R_0(\lambda t)^{1/4}}. \tag{2.4}$$

Здесь функции $\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\zeta}$ связаны с возмущением (ξ,η,ζ) системы (0.1) заменой (2.2). Так, например, $\widetilde{\xi}(R,\Psi,\tau,\omega)\equiv\xi(R_0+R/\sqrt{2R_0},\Psi_0+\Psi,c\tau^{4/5},\omega)$, $c=5^{4/5}/(4\lambda^{1/5})$.

Исследование устойчивости растущих решений разбивается на несколько этапов. Сначала указывается функция Ляпунова для редуцированных уравнений (2.3), и устанавливается устойчивость тривиального решения при постоянно действующих случайных возмущениях. При этом возникают ограничения на возмущения G и Q. Эти ограничения определяют класс возмущений $\mathfrak{M}$, при котором гарантируется устойчивость растущих решений в системе (0.1).

Из результатов работы [11] следует утверждение:

Лемма 2.1. *Для системы* (2.3) *при* $b>1/2$ *существует функция Ляпунова* $V(R,\Psi,\tau)$: $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ 0<\rho_0,\tau_1<\infty$ *такие, что выполняются неравенства*:

$$\Big(\frac{1-\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\Big)\rho^2\le V(R,\Psi,\tau)\le\Big(\frac{1+\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\Big)\rho^2,\quad \Big|\frac{\partial V}{\partial R}\Big|,\Big|\frac{\partial V}{\partial\Psi}\Big|\le 2\Big(\frac{1+\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\Big)\rho,\quad \frac{dV}{d\tau}\Big|_{(2.3)}\le-\tau^{-1}\rho^2,$$

для всех $(R,\Psi,\tau)\in\mathcal{D}(\rho_0,\tau_1)\equiv\{(R,\Psi,\tau)\in\mathbb{R}^3:\rho=\sqrt{R^2+\Psi^2}<\rho_0,\tau>\tau_1\}$ *с константой* $\beta=(2b-1)/5>0$.

Следующее утверждение устанавливает устойчивость тривиального решения редуцированной системы (2.3):

Лемма 2.2. *Пусть в системе* (2.3) *коэффициент* $b>1/2$. *Тогда* $\forall\,h>0$ *тривиальное решение* $R=0$, $\Psi=0$ *уравнений* (2.3) *устойчиво по вероятности относительно постоянно действующих случайных возмущений* $\mathfrak{P}$ *со свойствами* (1.4) *и* (0.7) *равномерно при* $\mathbf{E}[m(\omega)]<h$.

Доказательство. Из леммы 2.1 следует существование функции Ляпунова, обладающей оценками (1.2). Отсюда, в силу теоремы 1.1, вытекает устойчивость тривиального решения.

В следующей лемме описываются ограничения на функции ξ,η,ζ, которые гарантируют принадлежность функций (G,Q) классу $\mathfrak{P}$ (при $n=2$).

Лемма 2.3. *Пусть в системе* (0.4) *функции* ξ, η, ζ *для всех* $(r,\psi)\in\mathbb{R}^2$, $t\ge1$, $\omega\in\Omega$ *удовлетворяют оценкам:*

$$|\xi(r,\psi,t,\omega)|\le\frac{\gamma(\tau,\omega)}{t^{5/4}},\quad |\eta(r,\psi,t,\omega)|\le\frac{\gamma(\tau,\omega)}{t^{1/2}},\quad |\zeta(r,\psi,t,\omega)|\le\frac{\gamma(\tau,\omega)}{t} \tag{2.5}$$

с неотрицательной функцией $\gamma(\tau,\omega)$, $\tau=t^{5/4}\lambda^{1/4}4\sqrt{2}/5$. *Тогда существует* $\tau_2>0$ *такое, что для* $G(R,\Psi,\tau,\omega)$ *и* $Q(R,\Psi,\tau,\omega)$ *справедливы оценки:* $|G(R,\Psi,\tau,\omega)|\le M\tau^{-1}\gamma(\tau,\omega)$, $|Q(R,\Psi,\tau,\omega)|\le M\tau^{-1}\gamma(\tau,\omega)$, $\forall(R,\Psi,\tau)\in\mathcal{D}(\rho_0,\tau_2)$, $\omega\in\Omega$ *с константой* $M>0$.

Доказательство. Из структуры функций G и Q следуют оценки при $\tau\to\infty$, равномерные по $(R,\Psi)\in\mathbb{R}^2$, $\omega\in\Omega$,

$$|G(R,\Psi,\tau,\omega)|\le 2|\widetilde{\xi}|\,[1+M_1t^{-3/2}],\quad |Q(R,\Psi,\tau,\omega)|\le\frac{|\widetilde{\zeta}|}{\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}}+\frac{|2b+1||\widetilde{\eta}|}{\sqrt{2}(\lambda t)^{3/4}}[1+M_2t^{-3/2}],$$

$0<M_1,M_2=\mathrm{const}<\infty$. Отметим, что оценки (2.5) будут справедливы для функций $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta}$, $\widetilde{\zeta}$ в области $\mathcal{D}(\rho_0,\tilde{\tau}_2)$, $\tilde{\tau}_2>0$. Отсюда, с учетом оценок для возмущений G и Q, следует, что существует $\tau_2\ge\tilde{\tau}_2$ такое, что в области $\mathcal{D}(\rho_0,\tau_2)$ выполнены оценки:

$$|G(R,\Psi,\tau,\omega)|\le\frac{16\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}}{5}\tau^{-1}\gamma(\tau,\omega),\quad |Q(R,\Psi,\tau,\omega)|\le\frac{8}{5}\Big[\frac{1}{2}+\frac{|2b+1|}{\sqrt{\lambda}}\Big]\tau^{-1}\gamma(\tau,\omega).$$

Если в последних неравенствах обозначить через M максимальное из двух множителей перед $\tau^{-1}\gamma(\tau,\omega)$, то утверждение доказано.
Замечание. Если в последнем утверждении в качестве $\gamma(\tau,\omega)$ положить функцию, обладающую свойством (1.4), тогда $(G,Q)\in\mathfrak{P}$ при всех $(R,\Psi,\tau)\in\mathcal{D}(\rho_0,\tau_2)$, $\omega\in\Omega$.

Уточним параметры класса возмущений $\mathfrak{M}$: $u=5/4$, $v=1/2$, $\kappa=\lambda^{1/4}4\sqrt{2}/5$, $\sigma=5/4$. Тогда справедливо утверждение об устойчивости растущих решений для системы главного резонанса (0.1) относительно случайных возмущений.

Теорема 2.1. *Если в системе* (0.1) *коэффициент* $b>1/2$, *то* $\forall\,h>0$ *решение* $R_0(t)$, $\Psi_0(t)$ *с асимптотикой* (2.1) *устойчиво по вероятности относительно постоянно действующих случайных возмущений* $\mathfrak{M}$ *со свойствами* (0.6) *и* (0.7) *равномерно при* $\mathbf{E}[m(\omega)]<h$.

Доказательство. Положим $\tau_0\equiv\max\{\tau_1,\tau_2\}$, тогда из приведенных выше рассуждений следует, что существует функция Ляпунова V, которая обладает свойством (1.2) в области $\mathcal{D}(\rho_0,\tau_0)$. При этом, из свойств класса $\mathfrak{M}$ и из леммы 2.3 следует, что $(G,Q)\in\mathfrak{P}$ при всех $(R,\Psi,\tau)\in\mathcal{D}(\rho_0,\tau_0)$, $\omega\in\Omega$. Следовательно, тривиальное решение системы (2.3) устойчиво по теореме 1.1. После этого устойчивость решения $R_0(t),\Psi_0(t)$ вытекает из формул замены (2.2).

2.2. Уравнения параметрического резонанса

Для системы уравнений (0.2) рассматривается решение с асимптотикой, имеющей структуру (0.3):

$$R_0(t)=\sqrt{\lambda t}+t^{-1/2}\frac{b}{2\sqrt{\lambda}}+\mathcal{O}(t^{-1}),\quad \Psi_0(t)=\pi-t^{-1}\frac{\sqrt{\lambda}}{2}+\mathcal{O}(t^{-3/2}),\quad t\to\infty. \tag{2.6}$$

На основе этого решения в уравнениях (0.2) и (0.5) проводится замена:

$$r=R_0(t)+\frac{R(\tau)}{\sqrt{2}},\quad \psi=\Psi_0(t)+\Psi(\tau),\quad \tau=\frac{t^{3/2}2\sqrt{2\lambda}}{3}, \tag{2.7}$$

и для новых функций $R(\tau),\Psi(\tau)$ исследуется задача об устойчивости положения равновесия (0;0). Уравнения невозмущенной системы для этих функций можно представить в форме

$$\frac{dR}{d\tau}=-\partial_\Psi H(R,\Psi,\tau),\quad \frac{d\Psi}{d\tau}=\partial_R H(R,\Psi,\tau)+F(R,\Psi,\tau). \tag{2.8}$$

Здесь гамильтониан задается соотношением

$$H=\frac{R_0}{\sqrt{\lambda t}}\Big[\cos(\Psi+\Psi_0)+\Psi\sin\Psi_0-\cos\Psi_0+\frac{R^2}{2}\Big]+\frac{1}{\sqrt{2\lambda t}}\Big[R\big(\cos(\Psi+\Psi_0)-\cos\Psi_0\big)+\frac{R^3}{6}\Big].$$

Негамильтонова часть определяется функцией $F=(b-1)\big[\cos(\Psi+\Psi_0)-\cos\Psi_0\big]/\sqrt{2\lambda t}$. Уравнения возмущенной системы (0.5) для функций $R(\tau),\Psi(\tau)$ принимают вид:

$$\frac{dR}{d\tau}=-\partial_\Psi H+\mu G,\quad \frac{d\Psi}{d\tau}=\partial_R H+F+\mu Q.$$

Функции G и Q, соответствующие возмущениям в исходных уравнениях (0.5), определяются следующим образом:

$$G(R,\Psi,\tau,\omega)=\frac{\widetilde{\xi}}{\sqrt{\lambda t}}\Big(R_0+\frac{R}{\sqrt{2}}\Big)\sin(\Psi+\Psi_0),\quad Q(R,\Psi,\tau,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\lambda t}}\big[\,b\,\widetilde{\eta}\cos(\Psi+\Psi_0)-\widetilde{\zeta}\,\big].$$

Здесь функции $\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\zeta}$ связаны с возмущением (ξ,η,ζ) системы (0.2) заменой (2.7): например, $\widetilde{\xi}(R,\Psi,\tau,\omega)\equiv\xi(R_0+R/\sqrt{2},\Psi_0+\Psi,c\tau^{2/3},\omega)$, $c=3^{2/3}/(2\lambda^{1/3})$.

Для редуцированных уравнений (2.8) справедливо утверждение [11]:

Лемма 2.4. *Для системы* (2.8) *при* $b>1$ *существует функция Ляпунова* $V(R,\Psi,\tau)$: $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ 0<\rho_0,\tau_1<\infty$ *такие, что выполняются неравенства:*

$$\Big(\frac{1-\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\Big)\rho^2\le V(R,\Psi,\tau)\le\Big(\frac{1+\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\Big)\rho^2,\quad \Big|\frac{\partial V}{\partial R}\Big|,\Big|\frac{\partial V}{\partial\Psi}\Big|\le 2\Big(\frac{1+\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\Big)\rho,\quad \frac{dV}{d\tau}\Big|_{(2.8)}\le-\tau^{-1}\rho^2,$$

для всех $(R,\Psi,\tau)\in\mathcal{D}(\rho_0,\tau_1)$ *с константой* $\beta=(b-1)/3>0$.

Устойчивость тривиального решения системы (2.8) вытекает из следующей леммы:

Лемма 2.5. *Пусть в системе* (2.8) *коэффициент* $b>1$. *Тогда* $\forall\,h>0$ *тривиальное решение* $R=0$, $\Psi=0$ *уравнений* (2.8) *устойчиво по вероятности относительно постоянно действующих случайных возмущений* $\mathfrak{P}$ *со свойствами* (1.4) *и* (0.7) *равномерно при* $\mathbf{E}[m(\omega)]<h$.

Доказательство следует из теоремы 1.1 и леммы 2.4.

В следующем утверждении описываются ограничения на функции ξ,η,ζ, при которых $(G,Q)\in\mathfrak{P}$.

Лемма 2.6. *Пусть в системе* (0.5) *функции* ξ, η, ζ *для всех* $(r,\psi)\in\mathbb{R}^2$, $t\ge1$, $\omega\in\Omega$ *удовлетворяют оценкам:*

$$|\xi(r,\psi,t,\omega)|\le\frac{\gamma(\tau,\omega)}{t^{3/2}},\quad |\eta(r,\psi,t,\omega)|\le\frac{\gamma(\tau,\omega)}{t},\quad |\zeta(r,\psi,t,\omega)|\le\frac{\gamma(\tau,\omega)}{t}\tag{2.9}$$

с неотрицательной функцией $\gamma(\tau,\omega)$, $\tau=t^{3/2}2\sqrt{2\lambda}/3$. *Тогда существует* $\tau_2>0$ *такое, что для* $G(R,\Psi,\tau,\omega)$ *и* $Q(R,\Psi,\tau,\omega)$ *справедливы оценки:* $|G(R,\Psi,\tau,\omega)|\le M\tau^{-1}\gamma(\tau,\omega)$, $|Q(R,\Psi,\tau,\omega)|\le M\tau^{-1}\gamma(\tau,\omega)$, $\forall(R,\Psi,\tau)\in\mathcal{D}(\rho_0,\tau_2)$, $\omega\in\Omega$ *с константой* $M>0$.

Доказательство. Для функций G и Q имеют место оценки при $\tau\to\infty$, $\rho<\rho_0$, $\omega\in\Omega$: $|G(R,\Psi,\tau,\omega)|\le|\widetilde{\xi}\,|\,[1+M_1t^{-1}]$, $|Q(R,\Psi,\tau,\omega)|\le(|b||\widetilde{\eta}\,|+|\widetilde{\zeta}\,|)/\sqrt{2\lambda t}$, с положительной константой M_1. Для функций $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta}$, $\widetilde{\zeta}$ справедливы оценки (2.9) в области $\mathcal{D}(\rho_0,\tilde{\tau}_2)$, $\tilde{\tau}_2>0$, тогда

$$|G(R,\Psi,\tau,\omega)|\le\frac{4\sqrt{2\lambda}}{3}\tau^{-1}\gamma(\tau,\omega),\quad |Q(R,\Psi,\tau,\omega)|\le\frac{2(|b|+1)}{3}\tau^{-1}\gamma(\tau,\omega),$$

в области $\mathcal{D}(\rho_0, \tau_2)$, где $\tau_2 \geq \tilde{\tau}_2$. Отсюда следуют требуемые оценки с константой $M = \max\{4\sqrt{2\lambda}/3, 2(|b|+1)/3\}$. Лемма доказана.

Уточним класс возмущений $\mathfrak{M}$: $u = 3/2$, $v = 1$, $\kappa = 2\sqrt{2\lambda}/3$, $\sigma = 3/2$. Тогда из лемм 2.4, 2.5 и 2.6 следует справедливость утверждения:

Теорема 2.2. *Если в системе* (0.2) *коэффициент* $b > 1$, *то* $\forall\, h > 0$ *решение* $R_0(t)$, $\Psi_0(t)$ *с асимптотикой* (2.6) *устойчиво по вероятности относительно постоянно действующих случайных возмущений* $\mathfrak{M}$ *со свойствами* (0.6) *и* (0.7) *равномерно при* $\mathbf{E}[m(\omega)] < h$.

Доказательство. Вначале определяется $\tau_0 \equiv \max\{\tau_1, \tau_2\}$. Затем, из приведенных выше рассуждений и теоремы 1.1 следует устойчивость тривиального решение системы (2.8). После этого устойчивость решения $R_0(t), \Psi_0(t)$ с асимптотикой (2.6) вытекает из формул замены (2.7).

Заключение

Проведено исследование устойчивости авторезонансных решений уравнений главного и параметрического резонанса при постоянно действующих случайных возмущениях. В каждом случае описан класс возмущений, при котором рассматриваемые решения устойчивы (сильно) по вероятности. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании более общих систем.

Литература

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний // Наука, М., 1974, 408 стр.
2. *Калякин Л.А.* Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи мат. наук, 2008, **63** (5), 3-72.
3. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров // Наука, М., 1969, 368 стр.
4. *Векслер В.И.* Новый метод ускорения релятивистских частиц // Докл. АН СССР, 1944, **43,** 346-348.
5. *Голованивский К. С.* Гиромагнитные авторезонанс с переменной частотой // Физика плазмы, 1985, **11** (3), 295-299.
6. *Fajansa J., Friedland L.* Autoresonant (nonstationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators // Am. J. Phys., 2001, **69** (10)
7. *Кузнецов А.Н.* О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функц. анализ и его прилож., 1989, **23** (4), 63-74.
8. *Козлов В.В., Фурта С.Д.* Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений // Изд-во Москов. ун-та., 1996, 244 стр.
9. *Калякин Л.А.* Асимптотики решений уравнений главного резонанса // Теор. и мат. физика, 2003, **137** (1), 142-152.
10. *Хапаев М.М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний // М.: Высш. шк, 1988, 184 стр.
11. *Султанов О.А.* Устойчивость моделей авторезонанса при постоянно действующих возмущениях // Тр. ИММ УрО РАН, 2012, **18** (2), 254-264.
12. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения // Физматгиз, М., 1959, 211 стр.
13. *Гермаидзе В.Е.* Об асимптотической устойчивости по первому приближению // Прикл. мат. и мех., 1957, **21** (1), 133-135.
14. *Калякин Л.А.* Устойчивость недиссипативных систем относительно постоянно действующих случайных возмущений // Матем. заметки, 2012, **92** (1), 145-148.
15. *Schuss Z.* Theory and applications of stochastic processes // Applied Mathematical Sciences, V. 170, Springer, 2010, 486 pp.

16. *Хасъминский Р.З.* Об устойчивости систем при постоянно действующих случайных возмущениях // Распознование образов. Теория передачи информации. Сб. «Наука», М. 1965, 74-87.
17. *Султанов О.А.* Функции Ляпунова для неавтономных систем близких к гамильтоновым // Уфимский мат. журнал, 2010, **2** (4), 98-108.

RANDOM PERTURBATIONS OF AUTORESONANCE MODELS

Sultanov O.A.

Institute of Mathematics USC RAS, Ufa, Russia

oasultanov@gmail.com

Received 06.08.2012

We investigate the differential equations which arise in the nonlinear oscillations theory associated with resonance problems. The solutions which have increased amplitude with time at infinity are considered. The stability of such type solutions under random perturbations is analyzed. These results are based on the construction of the Lyapunov functions.