АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАБЛЮДАЕМЫХ И СОСТОЯНИЙ ВОДОРОДОПОДОБНОГО ЦЕНТРА. II. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Е.М. Новикова*

Московский институт электроники и математики при НИУ ВШЭ

e.m.novikova@gmail.com

Поступила 20.05.2012

Показано как методом редукции строятся когерентные состояния водородоподобного центра. На этих состояниях реализуются неприводимые представления алгебры симметрий с квадратичными коммутационными соотношениями, описанной в предыдущей части данной работы.

УДК 51.73, 53.043

1. Введение

Данная вторая часть работы продолжает первую часть [1]. Мы будем использовать здесь обозначения [1]. При ссылке на формулы из [1] будем впереди ставить римскую цифру I.

В этой второй части работы строятся неприводимые представления и когерентные состояния для квадратичных алгебр (I.2.13) и (I.3.6), которые рассматривались в [1]. Мы применяем процедуру редукции по группам симметрий. Именно этот метод применялся для получения представлений квадратичных алгебр и их когерентных состояний в [2], [3]–[5].

Сначала рассмотрим алгебру Гейзенберга и стандартные гауссовы когерентные состояния над $\mathbb{R}^n$ и проведем в несколько этапов редукцию по симметриям для неко-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 12-01-00627а.

торых гамильтонианов. На каждом этапе, будет применяться один из следующих двух типов редукции.

Редукция первого рода проводится в пространстве неприводимых представлений операторной алгебры. При этой редукции когерентные состояния, соответствующие данной алгебре, проектируются на собственное пространство некоторого элемента алгебры (он называется “*генератором редукции*”). В результате, получается некоторое новое когерентное состояние, соответствующее подалгебре операторов коммутирующих с генератором редукции.

Редукция второго рода проводится в пространстве параметров когерентных состояний, а точнее, редукция второго рода связана с голоморфными (относительно параметров) когерентными состояниями и осуществляется в пространстве голоморфных представлений операторной алгебры. В случае редукции второго рода, рассматриваются и генератор и его символ, который является элементом соответствующей пуассоновой алгеброй. “Новое” когерентное состояние получается из “старого” когерентного состояния путем усреднения (относительно параметров) вдоль траекторий гамильтонова поля этого символа.

Во всех примерах, рассматриваемых в данной работе, в качестве генераторов редукции берутся операторы типа “действие”. Эти операторы, деленные на $\hbar$, имеют целочисленный спектр, а их символы образуют 2π-периодические гамильтоновы потоки. При этих условиях, редукция (первого рода) когерентных состояний в пространстве неприводимых представлений эквивалентна редукции (второго рода) относительно параметров. При проверке тех или иных свойств бывает полезно использовать, по обстоятельствам, как редукцию первого так и редукцию второго рода.

2. Гауссовы когерентные состояния

Предположим, что операторы $\widehat{c} = (\widehat{c_1}, \dots, \widehat{c_n})$, $\widehat{b} = (\widehat{b_1}, \dots, \widehat{b_n})$, действующие в некотором гильбертовом пространстве, удовлетворяют соотношениям

$$[\widehat{c_j}, \widehat{c_k}] = [\widehat{b_j}, \widehat{b_k}] = 0, \qquad [\widehat{c_j}, \widehat{b_k}] = 2\hbar\delta_{jk}, \tag{2.1}$$

$$\widehat{b_k} = \widehat{c_k}^*, \tag{2.2}$$

и что вектор $\mathfrak{G}_0$ является вакуумным вектором для $\widehat{c}$, т.е.

$$\widehat{c_j}\mathfrak{G}_0 = 0 \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{2.3}$$

$$\|\mathfrak{G}_0\| = 1. \tag{2.4}$$

Семейство *гауссовых когерентный состояний* определяется соотношением

$$\mathfrak{G}_c \overset{\text{def}}{=} \exp\left\{\frac{1}{2\hbar}\langle c, \widehat{b}\rangle\right\}\mathfrak{G}_0, \qquad c \in \mathbb{C}^n, \quad \hbar > 0. \tag{2.5}$$

Предложение 2.1. (a) *Выполняются следующие тождества*:

$$\widehat{c_j}\,\mathfrak{G}_c = c_j\,\mathfrak{G}_c, \qquad \widehat{b_j}\,\mathfrak{G}_c = 2\hbar\frac{\partial}{\partial c_j}\,\mathfrak{G}_c. \tag{2.6}$$

(b) *Скалярное произведение двух гауссовых состояний имеет вид*

$$\widetilde{\mathcal{K}}(\overline{c''};c') \overset{\text{def}}{=} (\mathfrak{G}_{c''},\mathfrak{G}_{c'}) = \exp\Big\{\frac{1}{2\hbar}\big\langle c',\overline{c''}\big\rangle\Big\}. \tag{2.7}$$

(c) *Функция $\widetilde{\mathcal{K}}$ удовлетворяет воспроизводящему свойству*:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}^n}\widetilde{\mathcal{K}}(\overline{c''};c)\,\widetilde{\mathcal{K}}(\overline{c};c')\,d\widetilde{\mu}(c) = \widetilde{\mathcal{K}}(\overline{c''};c'), \tag{2.8}$$

где

$$d\widetilde{\mu}(c) = \frac{2\pi\hbar}{(4\pi\hbar)^n}\,\exp\Big\{-\frac{1}{2\hbar}|c|^2\Big\}\,d\overline{c}\,dc. \tag{2.9}$$

(d) *Имеет место разложение единицы*

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}^n}\mathfrak{G}_c^*\otimes\mathfrak{G}_c\,d\widetilde{\mu}(c) = \widehat{I},$$

где $\widehat{I}$ — тождественный оператор и $\mathfrak{G}_c^*\otimes\mathfrak{G}_c$ — оператор проектирования на одномерное подпространство, порожденное вектором $\mathfrak{G}_c$.

Из утверждения (c) следует, что функцию $\widetilde{\mathcal{K}}$ можно рассматривать как пример гауссова когерентного состояния $\mathfrak{G}_c = \widetilde{\mathcal{K}}(\cdot;c)$ в пространстве $\widetilde{\mathcal{P}}$ антиголоморфных функций со скалярным произведением

$$(\mathfrak{p}'',\mathfrak{p}')_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}^n}\mathfrak{p}'(\overline{c})\,\overline{\mathfrak{p}''(\overline{c})}\,d\widetilde{\mu}(c). \tag{2.10}$$

В этом случае, вакуумный вектор в формуле (2.3) равен $\mathfrak{G}_0\equiv 1$, а операторы уничтожения и рождения имеют вид

$$\widehat{c_j} = 2\hbar\frac{\partial}{\partial\overline{c_j}},\qquad \widehat{b_j} = \overline{c_j},\qquad j=1,\ldots,n.$$

Эти операторы являются взаимно сопряженными не пространстве функций $\widetilde{\mathcal{P}}$ со скалярным произведением (2.10) и порождают неприводимое *антиголоморфное представление* соотношения (2.1). Это хорошо известное представление Фока–Баргмана.

Конечно, стандартный пример дают когерентные состояния, соответствующие неприводимому представлению алгебры (2.1) в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$; этот пример рассматривался еще Шредингером [6] и Гейзенбергом [7] (подробное изложение дано, например, в [8]). Это представление имеет вид

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{w}_j,\qquad \mathbf{b}_j = \mathbf{c}_j^* = \mathbf{u}_j - i\mathbf{w}_j,\qquad j=1,\ldots,n,$$

где

$$\mathbf{u}\equiv u,\qquad \mathbf{w}\equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial u}.$$

Предложение 2.2. *Пусть в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ выполняются соотношения $\widehat{c_j} = \mathbf{c}_j$ и $\widehat{b_j} = \mathbf{b}_j$. Тогда гауссова экспонента*

$$\mathfrak{G}_0(u) = \frac{1}{(\pi\hbar)^{n/4}}\exp\Big\{-\frac{1}{2\hbar}u^2\Big\}$$

удовлетворяет соотношениям (2.3), (2.4) *для вакуумного вектора.*

Голоморфные гауссовы состояния (2.5) *в пространстве* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *определяются формулами*

$$\mathfrak{G}_c(u) = \exp\left\{\frac{1}{4\hbar}(4\langle c, u\rangle - c^2)\right\} \cdot \mathfrak{G}_0(u). \tag{2.11}$$

3. Редукция от гауссовых к бесселевым когерентным состояниям

Рассмотрим далее случай размерности $n = 4$. Таким образом, ниже $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$.

На фазовом пространстве $T^*\mathbb{R}^4$ рассмотрим следующий гамильтониан (генератор редукции):

$$D_0(u, w) = u_1 w_2 - u_2 w_1 + u_3 w_4 - u_4 w_3 \tag{3.1}$$

и отвечающий ему оператор

$$D_0 = \mathbf{u}_1\mathbf{w}_2 - \mathbf{u}_2\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_3\mathbf{w}_4 - \mathbf{u}_3\mathbf{w}_3 = -\frac{i}{2}(\mathbf{b}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{b}_2\mathbf{c}_1 + \mathbf{b}_3\mathbf{c}_4 - \mathbf{b}_4\mathbf{c}_3). \tag{3.2}$$

Оператор действия $\frac{1}{\hbar}\mathbf{D}_0$ можно представить в виде

$$\frac{1}{\hbar}\mathbf{D}_0 = -i\frac{\partial}{\partial\iota}. \tag{3.3}$$

Здесь $({}^\sigma u, \iota)$ — координаты в $\mathbb{R}^4$, $0 \le \iota < 2\pi$,

$$\frac{\partial}{\partial\iota} \stackrel{\mathrm{def}}{=} u_1\frac{\partial}{\partial u_2} - u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_3\frac{\partial}{\partial u_4} - u_4\frac{\partial}{\partial u_3}, \qquad \frac{\partial}{\partial\iota}({}^\sigma u) = 0. \tag{3.a}$$

Здесь мы используем введенные в (I.2.6) обозначения: $q = {}^\sigma u \in \mathbb{R}^3$ — это вектор с компонентами

$$q_1 = 2(u_1u_2 + u_2u_4), \quad q_2 = 2(u_1u_4 - u_2u_3), \quad q_3 = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2,$$

Спектр оператора (3.3) целый, а оператор проектирования на его нуль-пространство задается интегралом

$$\boldsymbol{\sigma}[\Phi] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\mathbf{D}_0\tau/\hbar}(\Phi(u))\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi({}^\sigma u, \iota)\,d\iota, \qquad \Phi \in L^2(\mathbb{R}^4). \tag{3.4}$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma}, \qquad \mathbf{D}_0\boldsymbol{\sigma}[\Phi] = \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{D}_0\Phi] = 0.$$

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathfrak{G}_c$ *— гауссовы когерентные состояния* (2.11) *в пространстве* $L^2(\mathbb{R}^4)$, *и пусть* $\boldsymbol{\sigma}$ *— оператор редукции* (3.4). *Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial\iota(c)}\boldsymbol{\sigma}[\mathfrak{G}_c] = 0,$$

и таки образом, функция $\boldsymbol{\sigma}[\mathfrak{G}_c]$ *зависит только от комбинации* ${}^\sigma c$ *координат* $c = (c_1, \dots, c_4)$.

Доказательство. В силу (2.6) имеем

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial\iota}\boldsymbol{\sigma}[\mathfrak{G}_c(u)] &= \frac{i\hbar}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\Big\{\frac{i\tau}{\hbar}\mathbf{D}_0\Big\}\Big(c_1\frac{\partial}{\partial c_2}-c_2\frac{\partial}{\partial c_1}+c_3\frac{\partial}{\partial c_4}-c_4\frac{\partial}{\partial c_3}\Big)\mathfrak{G}_c(u)d\tau\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\Big\{\frac{i\tau}{\hbar}\mathbf{D}_0\Big\}\big(\mathbf{u}_1\mathbf{w}_2-\mathbf{u}_2\mathbf{w}_1+\mathbf{u}_3\mathbf{w}_4-\mathbf{u}_4\mathbf{w}_3\big)\mathfrak{G}_c(u)\,d\tau\\
&= \mathbf{D}_0\boldsymbol{\sigma}[\mathfrak{G}_c(u)]=0.
\end{aligned}
$$

Определение 3.1. Голоморфные бесселевы состояния (порядка 0) определяются оператором редукции как

$$
\mathfrak{B}_{v,V}(q)=\sigma[\mathfrak{G}_c]\Big|_{{}^\sigma u=q,\ {}^\sigma c=4V,\ c^2=4v} \tag{3.5}
$$

Корректность этого определения следует из леммы 3.1. Этот метод редукции когерентных состояний был предложен в [2].

Предложение 3.1. *Голоморфные бесселевы состояния в пространстве* $L^2_-(\mathbb{R}^3)$ (*см.* [1], *раздел* 2 *или формулу* (4.6) *ниже*) *можно представить в виде*

$$
\mathfrak{B}_{v,V}(q)=\frac{1}{\pi\hbar}e^{-(2v+|q|)/2\hbar}\,I_0\Big(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\big(|q|v+\langle q,V\rangle\big)}\Big), \tag{3.6}
$$

где

$$
I_0(y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{y\cos\varphi}d\varphi
$$

– функция Бесселя комплексного аргумента [9].

Доказательство. На траекториях поля $\partial/\partial\iota$, голоморфное гауссово когерентное состояние (2.11) имеет вид

$$
\mathfrak{G}_c({}^\sigma u,\iota)=\frac{1}{\pi\hbar}\exp\{-(c^2+2u^2)/4\hbar\}\ \exp\big\{\big(\langle u,c\rangle\cos\iota+D_0(u,c)\sin\iota\big)/\hbar\big\},
$$

где D_0 — функция (3.1). Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{c^2/4,\,{}^\sigma c/4}({}^\sigma u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{G}_c({}^\sigma u,\tau)\,d\tau\\
&= \frac{1}{2\pi^2\hbar}e^{-(c^2+2u^2)/4\hbar}\int_0^{2\pi}e^{\sqrt{\langle u,c\rangle^2+D_0^2(u,c)}\cos(\tau-\tau^0)/\hbar}\,d\tau,
\end{aligned}
$$

где τ^0 определено соотношением $e^{i\tau^0}=\frac{\langle u,c\rangle+iD_0(u,c)}{\sqrt{\langle u,c\rangle^2+D_0^2(u,c)}}$. Применяя тождество

$$
\big\langle u,c\big\rangle^2+D_0^2(u,c)\equiv\frac{1}{2}\big(u^2c^2+\langle{}^\sigma u,{}^\sigma c\rangle\big)
$$

и интегральное представление функции Бесселя I_0, получим следующую формулу для приведенного состояния:

$$
\mathfrak{B}_{c^2/4,\,{}^\sigma c/4}({}^\sigma u)=\frac{1}{\pi\hbar}e^{-(c^2+2u^2)/4\hbar}\,I_0\Big(\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{1}{2}\big(u^2c^2+\langle{}^\sigma u,{}^\sigma c\rangle\big)}\Big).
$$

Подстановка ${}^\sigma u=q$, ${}^\sigma c=4V$ дает искомое равенство (3.6).

Заметим, что состояния (3.6) отличаются от состояний, которые были получены в классической работе [10], и от состояний, полученных в [11].

Редукцию (3.5) для гауссового когерентного состояния $\mathfrak{G}_c(u)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^4)$ можно легко обобщить на случай гауссова когерентного состояния $\mathfrak{G}_c$ (2.5), соответствующего абстрактному неприводимому представлению алгебры Гейзенберга в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$. Для этого, в операторе редукции $\boldsymbol{\sigma}[\cdot]$ (3.4) достаточно взять оператор проектирования на собственное нуль-подпросранство оператора

$$\widehat{D}_0 = -\frac{i}{2}\big(\widehat{b_1}\widehat{c_2} - \widehat{b_2}\widehat{c_1} + \widehat{b_3}\widehat{c_4} - \widehat{b_4}\widehat{c_3}\big). \tag{3.7}$$

Из коммутационных соотношений (2.1) следует, что спектр оператора $\widehat{D}_0/\hbar$ целочисленный. Кроме того, собственному числу $k \in \mathbb{Z}$ соответствуют собственные векторы

$$\begin{gathered}(\widehat{b_1} + i\widehat{b_2})^{l_1}(\widehat{b_1} - i\widehat{b_2})^{l_2}(\widehat{b_3} + i\widehat{b_4})^{r_1}(\widehat{b_3} - i\widehat{b_4})^{r_2}\mathfrak{G}_0,\\ l_1 - l_2 + r_1 - r_2 = k, \qquad l_j,\, r_j \in \mathbb{Z}_+,\end{gathered} \tag{3.8}$$

где $\mathfrak{G}_0$ — the вакуумный вектор, задаваемый уравнениями (2.3). Следовательно, экспонента $\exp\left\{\frac{i\tau}{\hbar}\widehat{D}_0\right\}$ удовлетворяет условию периодичности $\exp\left\{\frac{2\pi i}{\hbar}\widehat{D}_0\right\} = \widehat{I}$, и следовательно, оператор проектирования на собственное подпространство $H \subset \widetilde{H}$ оператора $\widehat{D}_0$, соответствующее нулевому собственному числу, имеет вид

$$\widehat{\sigma}[\Phi] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left\{\frac{i\tau}{\hbar}\widehat{D}_0\right\}\Phi\, d\tau \qquad \forall \Phi \in \widetilde{H}.$$

Определение 3.2. Формула

$$\mathfrak{B}_{v,V} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\sigma}[\mathfrak{G}_c]\Big|_{c^2=4v,\, {}^\sigma c=4V}, \tag{3.9}$$

определяет *семейство голоморфных* (*относительно* v, V) *бесселевых состояний в подпространстве* $H \subset \widetilde{H}$. Здесь $\mathfrak{G}_c$ — голоморфное гауссово когерентное состояние (2.5) в пространстве $\widetilde{H}$, и H — нулевое собственное пространство оператора $\widehat{D}_0$ (3.7).

Заметим, что формула (3.9), где применяется проектирование на собственное пространство, тесно связана с построением "constrained" когерентных состояний, которое рассматривалось в [12].

Как и в частном случае $\widetilde{H} = L(\mathbb{R}^4)$, можно проверить, что определение 3.2 корректно.

Теорема 3.1. (а) *Голоморфные бесселевы состояния, определяемые отображением редукции* (3.9), *имеют вид*

$$\mathfrak{B}_{v,V} = I_0\Big(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\big(v\widehat{v^*} + \langle V, \widehat{V^*}\rangle\big)}\Big)\,\mathfrak{B}_{0,0} \tag{3.10}$$

Здесь I_0 — функция Бесселя комплексного аргумента, и операторы "рождения" $\widehat{v^*}$, $\widehat{V^*}$ задаются формулами

$$\widehat{v^*} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4}\widehat{b}^{\,2}, \qquad \widehat{V^*} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4}{}^\sigma\widehat{b}. \tag{3.11}$$

Вакуумный вектор $\mathfrak{B}_{0,0}$ *имеет единичную норму* $\|\mathfrak{B}_{0,0}\|_H = 1$ *и задается формулой* $\mathfrak{B}_{0,0} = \mathfrak{G}_0$*, где* $\mathfrak{G}_0$ *— вакуумный вектор* (2.3).

(b) *Вакуумный вектор* $\mathfrak{B}_{0,0} \in H$ *аннулируется операторами "уничтожения"*

$$\widehat{v} = \frac{1}{4}\widehat{c}^{\,2}, \qquad \widehat{V} = \frac{1}{4}{}^{\sigma}\widehat{c}, \tag{3.12}$$

т.е. выполняются следующие соотношения:

$$\widehat{v}\,\mathfrak{B}_{0,0} = 0, \qquad \widehat{V}\,\mathfrak{B}_{0,0} = 0. \tag{3.13}$$

(c) *На подпространстве* $H \subset \widetilde{H}$*, операторы* $\widehat{v}$*,* $\widehat{V}$*,* $\widehat{v^*}$*,* $\widehat{V^*}$*, и* $\widehat{S}_0 = \frac{1}{8}\big(\langle\widehat{b},\widehat{c}\rangle + \langle\widehat{c},\widehat{b}\,\rangle\big)$ *определяют неприводимое представление алгебры* (I.2.13)*, т.е. алгебры*

$$\begin{gathered}
[\mathbf{V}_j, \mathbf{V}_k] = 0, \qquad [\mathbf{V}_j, \mathbf{v}] = 0,\\
[\mathbf{V}_j, \mathbf{V}_k^*] = 2\hbar\,\delta_{jk}\mathbf{S}_0 + \frac{\hbar}{2}(\mathbf{V}_j\mathbf{V}_k^* + \mathbf{V}_k^*\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_k\mathbf{V}_j^* - \mathbf{V}_j^*\mathbf{V}_k)\,\mathbf{S}_0^{-1}.
\end{gathered} \tag{3.14}$$

Доказательство. (a) Вычисляя коммутатор $\big[\langle c,\widehat{b}\,\rangle, \exp\big\{\frac{i\tau}{\hbar}\widehat{D}_0\big\}\big]$ и применяя коммутационные соотношения

$$[\widehat{D}_0, \langle c,\widehat{b}\,\rangle] = i\hbar\, D_0(c,\widehat{b}\,), \qquad [\widehat{D}_0, D_0(c,\widehat{b}\,)] = -i\hbar\,\langle c,\widehat{b}\,\rangle$$

(где $D_0(u,w)$ — функция (3.1)), получим тождество

$$\exp\Big\{\frac{i\tau}{\hbar}\widehat{D}_0\Big\}\,\langle c,\widehat{b}\,\rangle = \big(\cos\tau\,\langle c,\widehat{b}\,\rangle - \sin\tau\, D_0(c,\widehat{b}\,)\big)\,\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\widehat{D}_0\tau\Big\},$$

из которого следует, что

$$\exp\Big\{\frac{i\tau}{\hbar}\widehat{D}_0\Big\}\cdot\exp\Big\{\frac{1}{2\hbar}\,\langle c,\widehat{b}\,\rangle\Big\} = \exp\Big\{\frac{1}{2\hbar}\Big(\cos\tau\,\langle c,\widehat{b}\,\rangle - \sin\tau\, D_0(c,\widehat{b}\,)\Big)\Big\}\cdot\exp\Big\{\frac{i\tau}{\hbar}\widehat{D}_0\Big\}.$$

Таким образом, проекция гауссова когерентного состояния $\mathfrak{G}_c$ на подпространство H равна

$$\widehat{\sigma}[\mathfrak{G}_c] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\Big\{\frac{1}{2\hbar}\Big(\cos\tau\,\langle c,\widehat{b}\,\rangle - \sin\tau\, D_0(c,\widehat{b}\,)\Big)\Big\}\cdot\exp\Big\{\frac{i\tau}{\hbar}\widehat{D}_0\Big\}\mathfrak{G}_0\,d\tau.$$

Здесь

$$\exp\Big\{\frac{i\tau}{\hbar}\widehat{D}_0\Big\}\mathfrak{G}_0 \equiv \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{B}_{0,0}, \tag{3.15}$$

так как из уравнений (2.3) следует, что $\widehat{D}_0\mathfrak{G}_0 = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}[\mathfrak{G}_c] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\Big\{\frac{1}{2\hbar}\Big(\cos\tau\,\langle c,\widehat{b}\,\rangle - \sin\tau\, D_0(c,\widehat{b}\,)\Big)\Big\}\,\mathfrak{G}_0\,d\tau\\
&= I_0\Big(\frac{1}{2\hbar}\sqrt{\langle c,\widehat{b}\,\rangle^2 + \big(D_0(c,\widehat{b}\,)\big)^2}\Big)\,\mathfrak{G}_0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Можно доказать последнее соотношение (т.е. переход к функции Бесселя I_0), скажем, раскладывая экспоненту $\exp\big\{\frac{1}{2\hbar}\big(\cos\tau\,\langle c,\widehat{b}\,\rangle - \sin\tau\, D_0(c,\widehat{b}\,)\big)\big\}$ и функцию

$$I_0\Big(\frac{1}{2\hbar}\sqrt{\langle c,\widehat{b}\,\rangle^2 + \big(D_0(c,\widehat{b}\,)\big)^2}\Big)$$

в степенные ряды. В этом случае, используется следующее представление функции Бесселя I_0 комплексного аргумента:

$$I_0(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \Big(\frac{y}{2}\Big)^{2k}.$$

Подставляя

$$\big\langle c, \widehat{b} \big\rangle^2 + \big(D_0(c, \widehat{b}\,)\big)^2 = \frac{1}{2}\Big(c^2 \widehat{b}^{\,2} + \big\langle {}^{\sigma}c, {}^{\sigma}\widehat{b} \big\rangle\Big)$$

в (3.16), получим искомую формулу (3.10) для проекции $\widehat{\sigma}[\mathfrak{G}_c]$.

(b) Это утверждение следует их (3.15) и свойств (2.3), (2.4) вакуумного вектора $\mathfrak{G}_0$.

(c) Коммутационные соотношения (3.14) на подпространстве $H \subset \widetilde{H}$, на котором аннулируется оператор $\widehat{D}_0$, можно проверить по аналогии с частным случаем $\widetilde{H} = L^2(\mathbb{R}^4)$, $\widehat{c} = \mathbf{c}$ и $\widehat{b} = \mathbf{b}$. Представление неприводимо в пространстве H, так как это подпространство порождается из вакуумного вектора $\mathfrak{B}_{0,0}$ действием операторов рождения, возведенных в различные степени (см. (3.8) при $k = 0$):

$$\mathrm{const}\,(\widehat{v^*} + \widehat{V_3^*})^l\,(\widehat{v^*} - \widehat{V_3^*})^r\,\big(\widehat{V_1^*} - i\,\mathrm{sgn}(s)\widehat{V_2^*}\big)^{|s|}\,\mathfrak{B}_{0,0} \qquad l,\, r \in \mathbb{Z}_+,\ s \in \mathbb{Z}$$

(здесь $l = l_2$, $r = r_1$, $s = l_1 - l_2$, и $\mathrm{const} = 2^{l+r+|s|}$).

Так как бесселевы состояния $\mathfrak{B}_{v,V}$ строятся по редукции (3.9) из гауссовых когерентный состояний $\mathfrak{G}_c$, то естественно ожидать, что свойства бесселевых состояний можно получить из свойств гауссовых состояний. Но некоторые из этих свойств удобнее изучать с помощью другой редукции, именно, редукции относительно параметров $c \in \mathbb{C}^4$ гауссова когерентного состояния $\mathfrak{G}_c$. Приведем описание этой редукции второго рода.

Лемма 3.2. *Редукция* (3.9) *в пространстве* $\widetilde{H}$ *неприводимого представления соотношений* (2.1) *эквивалентно следующей редукции относительно параметров* $c \in \mathbb{C}^4$:

$$\mathfrak{B}_{v,V} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}_{c(c_0,\iota)}\Big|_{c_0^2=4v,\ {}^{\sigma}c_0=4V} d\iota, \tag{3.17}$$

где $c(c_0, \iota)$ *— траектория поля* $\partial/\partial\iota$ (3.3a) *в пространстве* $\mathbb{R}^4_c$.

Доказательство. Гауссово когерентное состояние на траекториях $c = c(c_0, \iota)$ можно записать следующим образом:

$$\mathfrak{G}_{c(c_0,\iota)} = \exp\Big\{\frac{1}{2\hbar}\Big(\cos\iota\,\big\langle c, \widehat{b}\,\big\rangle + \sin\iota\, D_0(c, \widehat{b}\,)\Big)\Big\}\,\mathfrak{G}_0,$$

где $D_0(u, w)$ — функция (3.1). Следовательно, интеграл $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{G}_{c(4v,4V,\iota)}\,d\iota$ совпадает с (3.16) и равен бесселеву состоянию $\widehat{\sigma}[\mathfrak{G}_c]\big|_{c^2=4v,\ {}^{\sigma}c=4V} = \mathfrak{B}_{v,V}$, как это следует из (3.9).

Предложение 3.2. *Скалярное произведение двух бесселевых состояний можно вычислить по следующей формуле*:

$$\mathcal{K}(\overline{v}, \overline{V}; v, V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathfrak{B}_{v,V}, \mathfrak{B}_{v,V})_H \equiv I_0\Big(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2(|v|^2 + |V|^2)}\Big). \tag{3.18}$$

Доказательство. Из леммы 3.2 следует, что скалярное произведение векторов (3.9) или (3.17) можно вычислить по формуле

$$(\mathfrak{B}_{v,V},\mathfrak{B}_{v,V})_H=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}d\iota'\int_0^{2\pi}d\iota''\,\widetilde{\mathcal{K}}\big(\overline{c(4v,4V,\iota')};c(4v,4V,\iota'')\big),$$

где $\widetilde{\mathcal{K}}(\overline{c'};c'')$ — скалярное произведение (2.7) гауссовых состояний (2.5). Для вычисление интеграла относительно ι'' в правой части, применим формулу

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{\mathcal{K}}\big(2u;c(4v,4V,\iota)\big)\,d\iota&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\Big\{\frac{1}{\hbar}\big\langle u,c(4v,4V,\iota)\big\rangle\Big\}\,d\iota\\&=I_0\Big(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\big(u^2v+\langle{}^{\sigma}u,V\rangle\big)}\Big),\end{aligned}$$

которую мы уже вывели в доказательстве предложения 3.1. Вместо ι, v и V, подставим ι'', $\overline{v}$ и $\overline{V}$, соответственно, и заменим вектор $2u$ на вектор $c(4v,4V,\iota')$. Тогда видно, что интеграл по ι'' равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{\mathcal{K}}\big(c(4v,4V,\iota');\overline{c(4v,4V,\iota'')}\big)\,d\iota''=I_0\Big(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2(|v|^2+|V|^2)}\Big)\tag{3.19}$$

и не зависит от ι'. Интегрируя по ι', получим (3.18).

4. Редукция воспроизводящего свойства

Теперь докажем, что из воспроизводящее свойство гауссовых состояний следует воспроизводящее свойство бесселевых состояний.

Лемма 4.1. *Функция* (3.18) *удовлетворяет следующему свойству воспроизводящих ядер*:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}^3}\mathcal{K}(\overline{v''},\overline{V''};v,V)\,\mathcal{K}(\overline{v},\overline{V};v',V')\,d\mu(V)=\mathcal{K}(\overline{v''},\overline{V''};v',V'),\tag{4.1}$$

где

$$d\mu(V)=\frac{1}{8\pi^2\hbar^3|v|^2}K_0\Big(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2(|v|^2+|V|^2)}\Big)\,d\overline{V}\,dV,\tag{4.2}$$

$$K_0(r)=\int_0^{\infty}e^{-r\cosh t}\,dt\quad\text{— *функция Макдональда* [9].}\tag{4.3}$$

Доказательство. Вдоль траекторий $c'=c(4v',4V',\tau')$ и $c''=c(4v'',4V'',\tau'')$ вычислим среднее от тождества (2.8), т.е. проинтегрируем его по τ' и τ'':

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}d\tau'\int_0^{2\pi}d\tau''\int_{\mathbb{C}^4}\widetilde{\mathcal{K}}\big(\overline{c(4v'',4V'',\tau'')}\,;\,c\big)\,\widetilde{\mathcal{K}}\big(\overline{c}\,;\,c(4v',4V',\tau')\big)\,d\widetilde{\mu}(c)\\=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}d\tau'\int_0^{2\pi}d\tau''\widetilde{\mathcal{K}}\big(\overline{c(4v'',4V'',\tau'')}\,;\,c(4v',4V',\tau')\big).\end{aligned}$$

Тогда, в силу (3.19) и (3.18), получим новое тождество

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}^4}\mathcal{K}(\overline{v''},\overline{V''};v,V)\,\mathcal{K}(\overline{v},\overline{V};v',V')\,d\widetilde{\mu}(c)=\mathcal{K}(\overline{v''},\overline{V''};v',V'), \tag{4.4}$$

где $v = c^2/4$ и $V = {}^\sigma c/4$ под знаком интеграла. Интеграл в левой части можно упростить, переходя от переменных $(c,\overline{c})$ к переменным $(V,\overline{V},D_0,\iota)$, где $D_0=\frac{i}{2}(c_1\overline{c}_2-c_2\overline{c}_1+c_3\overline{c}_4-c_4\overline{c}_3)$, и ι — это время на траекториях гамильтонова поля $\frac{\partial}{\partial\iota}=\mathrm{ad}(D_0)$, т.е. координата ι сопряжена с D_0. Плотность меры $d\widetilde{\mu}$ (2.9) можно выразить через новые координаты следующим образом:

$$\frac{1}{(4\pi\hbar)^4}\exp\Big\{-\frac{1}{2\hbar}|c|^2\Big\}=\frac{1}{(4\pi\hbar)^4}\exp\Big\{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2(|v|^2+|V|^2)+D_0^2}\Big\}.$$

Для меры Лиувилля на $\mathbb{C}^4$ имеем

$$\frac{|dc\wedge d\overline{c}|}{16}=\frac{|dV\wedge d\overline{V}|}{|\det\Psi|}\cdot|dD_0\wedge d\tau|.$$

Здесь Ψ — матрица размера 3×3 с элементами $\Psi_{jk}=\{\frac{1}{4}({}^\sigma c)_j,\frac{1}{4}({}^\sigma c)_k\}$;

$$|\det\Psi|=\frac{1}{8}|c|^2\,|c^2|^2=4|v|^2\sqrt{2(|v|^2+|V|^2)+D_0^2}.$$

Следовательно, тождество (4.4) эквивалентно равенству

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}^3}\mathcal{K}(\overline{v''},\overline{V''};v,V)\,\mathcal{K}(\overline{v},\overline{V};v',V')\,\ell(|v|^2,|V|^2)\,|dV\wedge d\overline{V}|=\mathcal{K}(\overline{v''},\overline{V''};v',V'),$$

где

$$\ell(|v|^2,|V|^2)=\frac{1}{32(\pi\hbar)^3|v|^2}\int_{-\infty}^{\infty}dD_0\int_0^{2\pi}d\tau\,\frac{\exp\Big\{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2(|v|^2+|V|^2)+D_0^2}\Big\}}{\sqrt{2(|v|^2+|V|^2)+D_0^2}}$$

является плотностью меры. Подинтегральное выражение в этой формуле не зависит от τ и является четной функцией от D_0. Следовательно, проводя замену переменной $D_0=\sqrt{2(|v|^2+|V|^2)}\cdot\sinh t$, получим

$$\begin{aligned}\rho(\overline{v},\overline{V};v,V)&=\frac{1}{8\pi^2\hbar^3|v|^2}\int_0^\infty\exp\Big\{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2(|v|^2+|V|^2)}\cdot\cosh t\Big\}\,dt\\&=\frac{1}{8\pi^2\hbar^3|v|^2}K_0\Big(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2(|v|^2+|V|^2)}\Big).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Теорема 4.1. *Пусть гауссово когерентное состояние $\mathfrak{G}_c$ (2.5) соответствует неприводимому представлению of соотношений (2.1) в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$. Тогда семейство векторов $\{\mathfrak{B}_{v,V}\mid v\in\mathbb{C},\,V\in\mathbb{C}^3\}$ (3.9) является семейством когерентных состояний в нуль-пространстве $H\subset\widetilde{H}$ оператора $\widehat{D}_0$ (3.7). Более точно,*

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}^3}\overline{\mathfrak{B}_{v,V}}\otimes\mathfrak{B}_{v,V}\,d\mu(V)=\widehat{I},$$

где $\widehat{I}$ — тождественный оператор в H и $d\mu(V)$ задается формулой (4.2).

Доказательство. В силу предложения 2.1(d), тождество

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}^4}(\mathfrak{G}_c,\Phi)_{\widetilde{H}}\,\mathfrak{G}_c\,d\widetilde{\mu}(c)=\Phi$$

выполняется для любого вектора $\Phi\in H\subset\widetilde{H}$. Из (3.9) следует, что проекция этого тождества на подпространство H имеет вид

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}^4}(\mathfrak{G}_c,\Phi)_{\widetilde{H}}\,\mathfrak{B}_{c^2/4,\,{}^\sigma c/4}\,d\widetilde{\mu}(c)=\Phi.$$

Здесь

$$\begin{aligned}(\mathfrak{G}_c,\Phi)_{\widetilde{H}}&=(\mathfrak{G}_c,\widehat{\sigma}[\Phi])_{\widetilde{H}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\mathfrak{G}_c,\exp\Big\{\frac{i\tau}{\hbar}\widehat{D}_0\Big\}\Phi\Big)_{\widetilde{H}}\,d\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\exp\Big\{-\frac{i\tau}{\hbar}\widehat{D}_0\Big\}\mathfrak{G}_c,\Phi\Big)_{\widetilde{H}}\,d\tau=(\widehat{\sigma}[\mathfrak{G}_c],\Phi)_H=(\mathfrak{B}_{c^2/4,\,{}^\sigma c/4},\Phi)_H,\end{aligned}$$

так как оператор $\widehat{D}_0$ (3.7) — самосопряженный в пространстве $\widetilde{H}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}^4}(\mathfrak{B}_{c^2/4,\,{}^\sigma c/4},\Phi)_H\,\mathfrak{B}_{c^2/4,\,{}^\sigma c/4}\,d\widetilde{\mu}(c)=\Phi.$$

Преобразуя меру $d\widetilde{\mu}$ по аналогии с доказательством леммы 4.1, получим искомое представление вектора $\Phi\in H$:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}^4}(\mathfrak{B}_{v,V},\Phi)_H\,\mathfrak{B}_{v,V}\,d\widetilde{\mu}(c)=\Phi.$$

В частности, из теоремы 4.1 следует, что семейство бесселевых состояний $\mathfrak{B}_{v,V}(q)$, задаваемое равенством (3.6), полно в пространстве $L^2_-(\mathbb{R}^3)$ со скалярным произведением

$$(\varphi',\varphi'')_-\overset{\text{def}}{=}\frac{\pi}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\overline{\varphi'(q)}\,\varphi''(q)\,\frac{dq}{|q|}=\int_{\mathbb{R}^4}\overline{\varphi'({}^\sigma u)}\,\varphi''({}^\sigma u)\,du. \tag{4.6}$$

5. Редукция сплетающего свойства и антиголоморфное представление

Из предложения 2.1(a) следует, что семейство гауссовых когерентных состояний $\mathfrak{G}_c$ обладает следующим свойством: для любого оператора $\widehat{F}=F(\overset{1}{\widehat{c}};\overset{2}{\widehat{b}})$, действующего в пространстве $\widetilde{H}$, существует оператор $\overset{\triangle}{F}$, действующий посредством параметров $c\in\mathbb{C}^4$ и такой, что выполняется соотношение

$$\widehat{F}\,\mathfrak{G}_c=\overset{\triangle}{F}\,\mathfrak{G}_c.$$

Кроме того, имеет место точная формула

$$\overset{\vartriangle}{F} = F(\overset{2}{c},\, 2\hbar\overset{1}{\partial}/\partial c).$$

Редуцированные бесселевы когерентные состояния $\mathfrak{B}_{v,V}$ (3.9) также обладают подобным свойством. А именно, для любого оператора $\widehat{f} = f(\overset{1}{\widehat{v}}, \overset{1}{\widehat{V}}; \overset{2}{\widehat{v^*}}, \overset{2}{\widehat{V^*}})$, действующего в пространстве H, существует оператор $\overset{\vartriangle}{f}$, действующий посредством параметров $V \in \mathbb{C}^3$ и такой, что выполняется соотношение

$$\widehat{f}\,\mathfrak{B}_{v,V} = \overset{\vartriangle}{f}\,\mathfrak{B}_{v,V}. \tag{5.1}$$

Чтобы доказать свойство (5.1) в общем виде, достаточно написать формулы для операторов $\overset{\vartriangle}{v}$, $\overset{\vartriangle}{V_j}$, $\overset{\vartriangle}{v^*}$ и $\overset{\vartriangle}{V_j^*}$, соответствующих, в силу (5.1), операторам $\widehat{v}$, $\widehat{V}_j$ (3.12) и $\widehat{v^*}$, $\widehat{V^*}j$ (3.11) (на подпространстве H).

Предложение 5.1. *Выполняются следующие соотношения*:

$$\begin{aligned} &\overset{\vartriangle}{v} = v, \qquad \overset{\vartriangle}{v^*} = \hbar^2 v\Big(\frac{\partial}{\partial V}\Big)^2, \\ &\overset{\vartriangle}{V_j} = V_j, \qquad \overset{\vartriangle}{V_j^*} = \hbar^2\Big(2\Big\langle V, \frac{\partial}{\partial V}\Big\rangle\frac{\partial}{\partial V_j} - V_j\Big(\frac{\partial}{\partial V}\Big)^2 + 2\frac{\partial}{\partial V_j}\Big). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Доказательство. Применяя определения (3.12) и (3.11) операторов $\widehat{v}$, $\widehat{V}$, $\widehat{v^*}$ и $\widehat{V^*}$, формулу (3.9), коммутационные соотношения

$$[\widehat{v}, \widehat{D}_0] = 0, \qquad [\widehat{v^*}, \widehat{D}_0] = 0, \qquad [\widehat{V}, \widehat{D}_0] = 0, \qquad [\widehat{V^*}, \widehat{D}_0] = 0$$

и предложение 2.1(а), получим

$$\begin{aligned} \overset{\vartriangle}{v}\,\mathfrak{B}_{v,V} &= \widehat{v}\,\mathfrak{B}_{v,V} = \frac{1}{4}(\widehat{c})^2\,\widehat{\sigma}[\mathfrak{G}_c]\Big|_{c^2=4v,\,{}^\sigma c=4V} = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\exp\Big\{\frac{i\tau}{\hbar}\widehat{D}_0\Big\}(\widehat{c})^2\,\mathfrak{G}_c\,d\tau\Big|_{c^2=4v,\,{}^\sigma c=4V} \\ &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\exp\Big\{\frac{i\tau}{\hbar}\widehat{D}_0\Big\}\,c^2\,\mathfrak{G}_c\,d\tau\Big|_{c^2=4v,\,{}^\sigma c=4V} = \frac{1}{4}c^2\,\widehat{\sigma}[\mathfrak{G}_c]\Big|_{c^2=4v,\,{}^\sigma c=4V} = v\,\mathfrak{B}_{v,V}. \end{aligned}$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} &\overset{\vartriangle}{V}\,\mathfrak{B}_{v,V} = V\,\mathfrak{B}_{v,V}, \qquad \overset{\vartriangle}{v^*}\,\mathfrak{B}_{v,V} = \hbar^2\Big(\frac{\partial}{\partial c}\Big)^2\mathfrak{B}\Big|_{c^2=4v,\,{}^\sigma c=4V}, \\ &\overset{\vartriangle}{V^*}\,\mathfrak{B}_{v,V} = \hbar^2\,{}^\sigma\Big(\frac{\partial}{\partial c}\Big)\mathfrak{B}\Big|_{c^2=4v,\,{}^\sigma c=4V}. \end{aligned}$$

Первые две формулы совпадают с искомыми формулами. В последних двух формулах проведем замену переменных $c \in \mathbb{C}^4$ на новые независимые переменные $V = \frac{1}{4}{}^\sigma c \in \mathbb{C}^3$ и ι, а также используем операторные равенства

$$\Big(\frac{\partial}{\partial c}\Big)^2 = v\Big(\frac{\partial}{\partial V}\Big)^2 + \Big(\text{дифференциальный оператор первого порядка в } V,\ \iota\Big)\cdot\frac{\partial}{\partial\iota},$$

$$^{\sigma}\Big(\frac{\partial}{\partial c}\Big) = 2\Big\langle V,\frac{\partial}{\partial V}\Big\rangle\frac{\partial}{\partial V} - V\Big(\frac{\partial}{\partial V}\Big)^2 + 2\frac{\partial}{\partial V} + \Big(\text{дифференциальный оператор первого порядка в } V,\ \iota\Big)\cdot\frac{\partial}{\partial\iota}.$$

Из этих равенств и из тождества $\frac{\partial}{\partial\iota}\widehat{\sigma}[\mathfrak{G}_c(u)] = 0$ получим

$$\overset{\vartriangle}{v}{}^*\,\mathfrak{B}_{v,V} = \hbar^2 v\Big(\frac{\partial}{\partial V}\Big)^2\mathfrak{B}_{v,V},$$

$$\overset{\vartriangle}{V}\,\mathfrak{B}_{v,V} = \hbar^2\Big(2\Big\langle V,\frac{\partial}{\partial V}\Big\rangle\frac{\partial}{\partial V} - V\Big(\frac{\partial}{\partial V}\Big)^2 + 2\frac{\partial}{\partial V}\Big)\mathfrak{B}_{v,V}.$$

Помимо соотношений (5.2), также удобно иметь точные формулы для операторов $\overset{\vartriangle}{S}_0$, $\overset{\vartriangle}{M}$ и $\overset{\vartriangle}{L}$, которые в силу формулы (5.1) соответствуют операторам

$$\widehat{S}_0 = \frac{1}{8}\big(\langle\widehat{c},\widehat{b}\,\rangle + \langle\widehat{b},\widehat{c}\,\rangle\big),\qquad \widehat{M} = \frac{i}{4}C(\widehat{c})\widehat{b},\qquad \widehat{L} = \frac{1}{8}D(\widehat{c})\widehat{b}, \tag{5.3}$$

где матрицы $C(u)$ и $D(u)$ определены в [1, §2], а именно,

$$C(u) = \begin{pmatrix} u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1\\ -u_3 & -u_4 & u_1 & u_2\\ u_2 & -u_1 & -u_4 & u_3\end{pmatrix},\qquad D(u) = \begin{pmatrix} u_3 & u_4 & u_1 & u_2\\ u_4 & -u_3 & -u_2 & u_1\\ u_1 & u_2 & -u_3 & -u_4\end{pmatrix}.$$

Операторы (5.3) являются обобщением операторов из [1, формулы (2.2)–(2.4)]:

$$\mathbf{S}_0 = \Big[\frac{1}{8}\big(\langle\mathbf{c},\mathbf{b}\rangle + \langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle\big)\Big]_\sigma,\qquad \mathbf{M} = \Big[\frac{i}{4}C(\mathbf{c})\mathbf{b}\Big]_\sigma,\qquad \mathbf{L} = \Big[\frac{1}{8}D(\mathbf{c})\mathbf{b}\Big]_\sigma,$$

на случай абстрактного неприводимого представления соотношений (6.1).

Предложение 5.2. *Выполняются следующие соотношения*:

$$\overset{\vartriangle}{S}_0 = \hbar\Big(\Big\langle V,\frac{\partial}{\partial V}\Big\rangle + 1\Big),\qquad \overset{\vartriangle}{M}_j = i\hbar\Big(V\times\frac{\partial}{\partial V}\Big)_j,\qquad \overset{\vartriangle}{L}_j = \hbar\,v\,\frac{\partial}{\partial V_j} \tag{5.4}$$

Заметим, что из свойств (5.1) бесселевых когерентных состояний $\mathfrak{B}_{v,V}$ следует сплетающее свойство функции $\mathcal{K}(\overline{v''},\overline{V''};v',V')$ (3.18):

$$\Big(\overset{\vartriangle}{f}\Big)_{V'}\mathcal{K}(\overline{v''},\overline{V''};v',V') = (\mathfrak{B}_{v'',V''},\widehat{f}\,\mathfrak{B}_{v',V'})_H = (\widehat{f}^*\,\mathfrak{B}_{v'',V''},\mathfrak{B}_{v',V'})_H = \overline{\Big(\overset{\vartriangle}{f}{}^*\Big)_{V''}}\,\mathcal{K}(\overline{v''},\overline{V''};v',V'). \tag{5.5}$$

(Нижние индексы у операторов $\overset{\vartriangle}{f}$ и $\overset{\vartriangle}{f}{}^*$ показывают, по каким переменным действуют данные операторы.)

Теорема 5.1. *Операторы*

$$\overset{\circ}{v} = \hbar^2 \overset{\circ}{v}\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{V}}\Big)^2, \qquad \overset{\circ}{V}_j = \hbar^2\bigg(2\Big(\langle \overline{V}, \frac{\partial}{\partial \overline{V}}\rangle\Big)\frac{\partial}{\partial \overline{V}_j} - \overline{V}_j\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{V}}\Big)^2 + 2\frac{\partial}{\partial \overline{V}_j}\bigg),$$
$$\overset{\circ}{v}{}^* = \overline{v}, \qquad \overset{\circ}{V}{}^*_j = \overline{V}_j, \qquad \overset{\circ}{S}_0 = \hbar\Big(\langle \overline{V}, \frac{\partial}{\partial \overline{V}}\rangle + 1\Big), \tag{5.6}$$

определяют неприводимое представление алгебры (3.14) *в пространстве* $\mathcal{P}$ *антиголоморфных функций* (*относительно* v *и* V) *со скалярным произведением*

$$\frac{1}{2\pi\hbar}(\Phi', \Phi'')_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}^3} \overline{\Phi'(\overline{v}, \overline{V})}\, \Phi''(\overline{v}, \overline{V})\, d\mu(V),$$

где $d\mu$ *задается формулой* (4.2).

Заметим, что операторы $\overset{\circ}{f}$ связаны с операторами $\overset{\vartriangle}{f}$ (see (5.1)) транспонированием относительно $d\mu$, т.е. сопряжением в пространстве $\mathcal{P}$ совместно с комплексным сопряжением

$$\overset{\circ}{f} = \overline{\big(\overset{\vartriangle}{f}\big)^*}\,. \tag{5.7}$$

Доказательство теоремы 5.1. Так как функция Макдональда $K_0(r)$ (4.3) удовлетворяет уравнению Бесселя (для функций комплексного аргумента)

$$ry''(r) + y'(r) - ry(r) = 0,$$

то плотность $\rho(\overline{v}, \overline{V}; v, V)$ (4.5) меры $d\mu(V)$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{v}\, \rho(\overline{v}, \overline{V}; v, V) &= \overline{\big(\overset{\circ}{v}{}^*\big)^T}\, \rho(\overline{v}, \overline{V}; v, V),\\
\overset{\circ}{V}_j\, \rho(\overline{v}, \overline{V}; v, V) &= \overline{\big(\overset{\circ}{V}{}^*_j\big)^T}\, \rho(\overline{v}, \overline{V}; v, V;),\\
\overset{\circ}{S}_0\, \rho(\overline{v}, \overline{V}; v, V) &= \overline{\big(\overset{\circ}{S}_0\big)^T}\, \rho(\overline{v}, \overline{V}; v, V),
\end{aligned}$$

где символ $\ldots^T$ обозначает транспонирование относительно меры $|dV \wedge d\overline{V}|$. Следовательно, оператор $\overset{\circ}{S}_0$ является самосопряженным в пространстве $\mathcal{P}$, а операторы $\overset{\circ}{v}$ и $\overset{\circ}{v}{}^*$, так же как и операторы $\overset{\circ}{V}_j$ и $\overset{\circ}{V}{}^*_j$, взаимно сопряженные в пространстве $\mathcal{P}$.

По построению, операторы $\overset{\vartriangle}{v}$, $\overset{\vartriangle}{V}$, $\overset{\vartriangle}{v}{}^*$, $\overset{\vartriangle}{V}{}^*$ и $\overset{\vartriangle}{S}_0$ удовлетворяют коммутационным соотношениям, сопряженным (3.14), т.е. соотношениям с противоположным знаком в правой части. Следовательно, операторы $\overset{\circ}{v}$, $\overset{\circ}{V}$, $\overset{\circ}{v}{}^*$, $\overset{\circ}{V}{}^*$ и $\overset{\circ}{S}_0$, которые получаются из $\overset{\vartriangle}{v}$, $\overset{\vartriangle}{V}$, $\overset{\vartriangle}{v}{}^*$, $\overset{\vartriangle}{V}{}^*$ и $\overset{\vartriangle}{S}_0$ по формуле (5.7), определяют представление алгебры (3.14).

Чтобы доказать, что это представление неприводимо в пространстве $\mathcal{P}$, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.1. *Система уравнений*

$$\big(\overset{\circ}{v}\big)\, \mathcal{K}(\overline{v}, \overline{V}; v, V;) = \overline{\overset{\circ}{v}{}^*}\, \mathcal{K}(\overline{v}, \overline{V}; v, V), \quad \big(\overset{\circ}{V}\big)\, \mathcal{K}(\overline{v}, \overline{V}; v, V;) = \overline{\big(\overset{\circ}{V}{}^*\big)}\, \mathcal{K}(\overline{v}, \overline{V}; v, V),$$

$$\big(\overset{\circ}{v}{}^*\big)\,\mathcal{K}(\overline{v},\overline{V};v,V)=\overline{\big(\overset{\circ}{v}\big)}\,\mathcal{K}(\overline{v},\overline{V};v,V),\qquad \big(\overset{\circ}{V}{}^*\big)\,\mathcal{K}(\overline{v},\overline{V};v,V)=\overline{\big(\overset{\circ}{V}\big)}\,\mathcal{K}(\overline{v},\overline{V};v,V),\tag{5.8}$$
$$\big(\overset{\circ}{S}_0\big)\,\mathcal{K}(\overline{v},\overline{V};v,V)=\overline{\big(\overset{\circ}{S}_0\big)}\,\mathcal{K}(\overline{v},\overline{V};v,V)$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$\mathcal{K}(0,0;0,0)=1.\tag{5.9}$$

Доказательство теоремы 5.1 (продолжение) Предположим, что представление (5.6) приводимо. Тогда пространство $\mathcal{P}$ можно разложить в прямую сумму инвариантных подпространств

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}_1\oplus\mathcal{P}_2,\qquad \dim\mathcal{P}_k\neq 0,\qquad k=1,2.\tag{5.10}$$

Через $\{\mathfrak{b}_j^k(\overline{v},\overline{V})\mid j=0,1,2,\dots\}$ обозначим полную ортонормированную систему в пространстве $\mathcal{P}_k$ $(k=1,2)$. Тогда объединение $\cup_{k=1,2}\{\mathfrak{b}_j^k(\overline{v},\overline{V})\}$ является полной ортонормированной системой в $\mathcal{P}$. Так как в пространстве $\mathcal{P}$ существует по крайней мере одна функция, которая не обращается в нуль в точке $v=V=0$ (это функция $\mathcal{K}(\overline{v},\overline{V};0,0)$), то по крайне мере один базисный вектор $\mathfrak{b}_{j_0}^{k_0}(\overline{v},\overline{V})$ удовлетворяет неравенству $\mathfrak{b}_{j_0}^{k_0}(0,0)\neq 0$. Следовательно, следующие две функции определены корректно:

$$\mathcal{K}_{\mathcal{P}_{k_0}}(\overline{v},\overline{V};v,V)=\frac{\sum_{j\geq 0}\overline{\mathfrak{b}_j^{k_0}(\overline{v},\overline{V})}\,\mathfrak{b}_j^{k_0}(\overline{v},\overline{V})}{\sum_{j\geq 0}|\mathfrak{b}_j^{k_0}(0,0)|^2};$$
$$\mathcal{K}_{\mathcal{P}}(\overline{v},\overline{V};v,V)=\frac{\sum_{k=1,2}\sum_{j\geq 0}\overline{\mathfrak{b}_j^{k}(\overline{v},\overline{V})}\,\mathfrak{b}_j^{k}(\overline{v},\overline{V})}{\sum_{k=1,2}\sum_{j\geq 0}|\mathfrak{b}_j^{k}(0,0)|^2}.$$

Обе эти функции удовлетворяют системе (5.8), (5.9). Однако, в силу (4.5) имеем

$$\mathcal{K}_{\mathcal{P}_{k_0}}(\overline{v},\overline{V};v,V)\neq\mathcal{K}_{\mathcal{P}}(\overline{v},\overline{V};v,V).$$

Полученное неравенство противоречит лемме 5.1, и следовательно доказывает, что представление (5.6) неприводимо.

Следствие 5.1. *Когерентное преобразование Бесселя*

$$\mathfrak{B}\colon\mathcal{P}\to H,\qquad \mathfrak{B}(\mathfrak{p})\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}^3}\mathfrak{p}(\overline{V})\mathfrak{B}_{v,V}\,d\mu(V)$$

определяет унитарный изоморфизм между пространствами $\mathcal{P}$ и H. Это преобразование сплетает голоморфное представление алгебры (3.14) *операторами* $\overset{\circ}{v}$, $\overset{\circ}{V}_j$, $\overset{\circ}{v}{}^*$, $\overset{\circ}{V}{}^*_j$, $\overset{\circ}{S}_0$ (5.6) *на пространстве $\mathcal{P}$ и представление той же алгебры операторами* $\widehat{v}$, $\widehat{V}_j$, $\widehat{v^*}$, $\widehat{V_j^*}$, $\widehat{S}_0$ *на пространстве H.*

Список литературы

1. *Новикова Е.М.* Аналитическое моделирование наблюдаемых и состояний водородоподобного центра. I. Квадратичная алгебра// Наноструктуры. Математическая Физика и Моделирование, 2012, **7** (1), 107–124.
2. *Karasev M.V.* Simple quantization formula// In book: P. Donato (et al.) Symplectic Geometry and Mathematical Physics, Actes du colloque en l'honneur de J.-M.Souriau, Birkhauser, Basel-Boston, 1991.

3. *Карасев М.В., Новикова Е.М.* Квадратичные скобки Пуассона в эффекте Зеемана. Неприводимые представления и когерентные состояния// Успехи Мат. Наук, 1994, **49** (5), 169-170; English transl. in Russian Math. Surveys, 1994, **49** (5), 179–180.
4. *Karasev M.V. and Novikova E.M.* "Integral representation of eigenfunctions and coherent states for the Zeeman effect// In book: J.-P. Antoine (et al.), Quantization, Coherent States, Complex Structures, Plenum, New York, 1995, 201-208.
5. *Карасев М.В., Новикова Е.М.* Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода с магнитном поле// Теорет. Мат. Физ., 1996, **108** (3), 339-387; English transl. in Theoret. and Math. Phys., 1996, **108** (3), 1119-1159.
6. *Schrodinger E.* Der stetige Ubergang von der Mikro- zur Makromechanik // Naturwiss., 1926, 14, 664-666.
7. *Heisenberg W.* Uber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik// Z. Phys., 1927, 43, 172-198.
8. *Переломов А.М.* Обобщенные когерентные состояния и их применение// Наука, Москва, 1972, 272 стр.
9. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции// Наука, Москва, 1973, т.1, 296 стр.; т.2, 296 стр.
10. *Rawnsley J.* Coherent состояния and Kahler manifolds// Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 1977, **28**, 403-415.
11. *Horowski M. and Odzijewicz A.* Geometry of the Kepler System in Coherent States Approach// Preprint Inst. of Physics, Warsaw Univ. Division, Bialystok, 1993.
12. *Klauder J.R.* Coherent state quantization of constraint systems// IHES, Preprint 96/29, 1996.

ALGEBRAIC MODELING OF OBSERVABLES AND STATES FOR HYDROGEN-LIKE CENTER. II. COHERENT STATES

E.M. Novikova

Moscow Institute of Electronics and Mathematics
at National Research University HSE

e.m.novikova@gmail.com

Received 20.05.2012

It is shown how the coherent states of a hydrogen-like center can be constructed by the reduction method. These states are used to realize the irreducible representations of the algebra of symmetries with quadratic commutation relations which was described in the preceding part of this paper.