ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ[1]

Ю.Ю. Багдерина

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа

yulya@mail.rb.ru

Поступила 15.08.2012

Для системы уравнений Эйлера-Лагранжа с двумя степенями свободы решена проблема эквивалентности относительно точечных преобразований времен и координат. Построен базис дифференциальных инвариантов этого класса уравнений и операторы инвариантного дифференцирования. В терминах инвариантов описаны некоторые типы систем. Полученные результаты проиллюстрированы рядом примеров.

УДК 517.925.4

1. Проблема эквивалентности

Вывод уравнений механики из вариационного принципа приводит к тому, что задача сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), имеющих форму уравнений Эйлера–Лагранжа. В данной работе рассматривается двумерный случай, т.е. уравнения

[1]Работа поддержана РФФИ 11-01-91330-ННИО-а, 10-01-00186-а.

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_1} - L_{x_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}L_{\dot{x}_2} - L_{x_2} = 0, \qquad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \tag{1}$$

с лагранжианом $L(t, x, \dot{x})$, $x = (x_1, x_2)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$.

Класс уравнений (1), также как и класс систем проективного типа, выделяется тем, что он замкнут относительно точечных преобразований. То есть любая невырожденная замена переменных

$$\tilde{t} = \theta(t, x), \qquad \tilde{x}_1 = \varphi_1(t, x), \qquad \tilde{x}_2 = \varphi_2(t, x) \tag{2}$$

преобразует систему (1) снова в систему уравнений Эйлера–Лагранжа, но, быть может, с другим лагранжианом $\tilde{L}(\tilde{t}, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$. При этом преобразованная система может иметь лагранжиан $\tilde{L}$ более простого вида (например, если часть переменных в системе становится циклическими или ее уравнения разделяются или она превращается в систему Лиувилля).

Преобразование (2) является преобразованием эквивалентности класса уравнений (1) (т.е. наиболее общим преобразованием, не выводящим уравнения за пределы заданного класса). Две системы называют эквивалентными, если существует обратимая замена переменных (2), при которой одна система переходит в другую. Задачи поиска эквивалентных уравнений, нахождения замены переменных, связывающей эквивалентные уравнения, получения критериев эквивалентности могут быть решены с помощью инвариантов группы преобразований эквивалентности данного класса уравнений, поскольку, если две системы эквивалентны, то все их инварианты равны:

$$I_j(t, x, \dot{x}) = \tilde{I}_j(\tilde{t}, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}), \qquad j = 1, 2, 3, \ \ldots \tag{3}$$

Как правило, группа преобразований эквивалентности некоторого класса уравнений является бесконечной (зависит от произвольных элементов) и имеет бесконечное число дифференциальных инвариантов — функций вида

$$I_j = I_j(t, x, \dot{x}, L, L_t, L_x, L_{\dot{x}}, L_{tt}, L_{tx}, \ \ldots \ , L_{\dot{x}\cdots\dot{x}}). \tag{4}$$

Порядок инварианта определяется порядком входящей в него старшей производной функции L. При подстановке в формулу (4) для инварианта I_j конкретной функции $L(t, x, \dot{x})$ он принимает вид $I_j = I_j(t, x, \dot{x})$ (как в равенствах (3)). Известно [1], что в бесконечном наборе дифференциальных инвариантов всегда существует конечный базис и произвольный инвариант группы может быть получен из базисных инвариантов с помощью алгебраических операций и операторов инвариантного дифференцирования (т.е. операторов $\mathcal{D}$, обладающих тем свойством, что если I — инвариант, то $\mathcal{D}I$ также является инвариантом). Поэтому для решения проблемы эквивалентности достаточно построить все независимые инварианты некоторого невысокого порядка и найти все операторы инвариантного дифференцирования (в данном случае их пять, по числу аргументов произвольного элемента L класса уравнений (1)).

2. Инварианты уравнений Эйлера-Лагранжа

В предположении, что гессиан функции $L(t, x, \dot{x})$ относительно обобщенных скоростей $\dot{x}$ не равен тождественно нулю, система (1) разрешима относительно вторых производных в виде

$$\ddot{x}_1 = f_1(t, x, \dot{x}), \qquad \ddot{x}_2 = f_2(t, x, \dot{x}).$$

При построении инвариантов системы (1) используются оператор

$$D_0 = D_t + p_1 D_{x_1} + p_2 D_{x_2} + f_1 D_{p_1} + f_2 D_{p_2}$$

дифференцирования в силу системы (1) и операторы

$$D_i = D_{x_i} + \frac{1}{2}(f_{1p_i} D_{p_1} + f_{2p_i} D_{p_2}), \quad i = 1, 2,$$

где $f_{jp_i} = D_{p_i} f_j$, D_t, D_{x_j}, D_{p_j} — операторы полной производной по t, x_j, p_j соответственно ($D_t = \partial_t + L_t \partial_L + L_{tt} \partial_{L_t} + \sum_{i=1}^{2}(L_{tx_i}\partial_{L_{x_i}} + L_{tp_i}\partial_{L_{p_i}}) + \ldots$ и т.п.). В этом разделе во избежание путаницы в индексах для производных x_i первого порядка применяется обозначение $p_i = \dot{x}_i$.

Используя метод Овсянникова–Ли [1], были построены все независимые дифференциальные инварианты уравнений (1), зависящие от производных функции L не выше пятого порядка. Большая часть из этих 58 инвариантов тождественно равна нулю для систем с квадратичной зависимостью лагранжиана от скоростей и они здесь не приводятся. Остальные инварианты приведены в следующей лемме.

Лемма 1. *Если относительные инварианты j_0, J_0, I_0 не равны нулю, то дифференциальными инвариантами пятого порядка системы* (1) *относительно точечных преобразований* (2) *являются*

$$\begin{gathered} I_1 = \frac{J_1}{j_0^{1/2} J_0^{5/4}}, \qquad I_2 = \frac{j_0^{1/2} J_2}{J_0^{1/2} I_0}, \qquad I_3 = \frac{J_3}{j_0 I_0}, \qquad I_4 = \frac{j_0^{1/2} J_4}{J_0^{1/2} I_0}, \\ I_5 = \frac{J_5}{I_0}, \qquad I_6 = \frac{j_0^{1/2} J_0 J_6}{I_0}, \qquad I_7 = \frac{J_0^{3/2} J_7}{I_0}, \qquad I_8 = \frac{J_0^{3/2} J_8}{j_0 I_0}, \\ I_9 = \frac{j_0^{1/2} J_0 J_9}{I_0}, \qquad I_{10} = \frac{J_0^{3/2} J_{10}}{I_0}, \qquad I_{11} = \frac{j_0^{1/2} J_0^{3/4} J_{11}}{I_0}, \qquad I_{12} = \frac{j_0^{1/2} J_0^2 J_{12}}{I_0}. \end{gathered} \tag{5}$$

Инвариантные дифференцирования задаются операторами

$$\mathcal{D}_0 = J_0^{-1/4} D_0,$$

$$\mathcal{D}_1=\sqrt{j_0J_0}I_0^{-1}\left[\tfrac14((b_2B_{30}-2b_1B_{31}+b_0B_{32})\epsilon_1+(b_2B_{40}-2b_1B_{41}+b_0B_{42})\epsilon_0)D_0+\right.$$
$$\left.+J_0(\epsilon_1D_1+\epsilon_0D_2)+\tfrac18(b_2B_{00}-2b_1B_{01}+b_0B_{02})(\epsilon_1D_{p_1}+\epsilon_0D_{p_2})\right],$$

$$\mathcal{D}_2=\sqrt{J_0}I_0^{-1}(L_{p_2p_2}E_1-2L_{p_1p_2}E_2+L_{p_1p_1}E_3)\left[\tfrac14((b_2B_{30}-2b_1B_{31}+b_0B_{32})D_0+\right.$$
$$\left.+J_0D_1+\tfrac18(b_2B_{00}-2b_1B_{01}+b_0B_{02})D_{p_1}\right]-$$
$$-\sqrt{J_0}I_0^{-1}(L_{p_2p_2}E_0-2L_{p_1p_2}E_1+L_{p_1p_1}E_2)\left[\tfrac14((b_2B_{40}-2b_1B_{41}+b_0B_{42})D_0+\right.$$
$$\left.+J_0D_2+\tfrac18(b_2B_{00}-2b_1B_{01}+b_0B_{02})D_{p_2}\right],$$

$$\mathcal{D}_3=\sqrt{j_0}J_0^{1/4}I_0^{-1}(\epsilon_1D_{p_1}+\epsilon_0D_{p_2}),$$

$$\mathcal{D}_4=J_0^{1/4}I_0^{-1}\left[(L_{p_2p_2}E_1-2L_{p_1p_2}E_2+L_{p_1p_1}E_3)D_{p_1}-\right.$$
$$\left.-(L_{p_2p_2}E_0-2L_{p_1p_2}E_1+L_{p_1p_1}E_2)D_{p_2}\right].$$

Образующие инварианты (5) *величины*

$$j_0=L_{p_1p_1}L_{p_2p_2}-L_{p_1p_2}^2,\qquad J_0=b_1^2-b_0b_2,\qquad I_0=L_{p_2p_2}\epsilon_0^2+2L_{p_1p_2}\epsilon_0\epsilon_1+L_{p_1p_1}\epsilon_1^2,$$

$$J_1=L_{p_1p_1}(b_2B_{01}-b_1B_{02})+L_{p_1p_2}(b_0B_{02}-b_2B_{00})+L_{p_2p_2}(b_1B_{00}-b_0B_{01}),$$

$$J_2=b_2\epsilon_0^2+2b_1\epsilon_0\epsilon_1+b_0\epsilon_1^2,$$

$$\begin{aligned}J_3={}&L_{p_2p_2}^3E_0^2-8L_{p_1p_2}^3E_0E_3+L_{p_1p_1}^3E_3^2+6L_{p_1p_1}L_{p_1p_2}L_{p_2p_2}(E_0E_3-3E_1E_2)\\&+3L_{p_2p_2}^2(L_{p_1p_1}(3E_1^2-2E_0E_2)-2L_{p_1p_2}E_0E_1)+12L_{p_1p_2}^2(L_{p_1p_1}E_1E_3+L_{p_2p_2}E_0E_2)\\&+3L_{p_1p_1}^2(L_{p_2p_2}(3E_2^2-2E_1E_3)-2L_{p_1p_2}E_2E_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&J_4=b_0(E_2^2-E_1E_3)+b_1(E_0E_3-E_1E_2)+b_2(E_1^2-E_0E_2),\\&J_5=L_{p_1p_1}(E_2^2-E_1E_3)+L_{p_1p_2}(E_0E_3-E_1E_2)+L_{p_2p_2}(E_1^2-E_0E_2),\\&J_6=b_2\Gamma_0^2+2b_1\Gamma_0\Gamma_1+b_0\Gamma_1^2,\\&J_7=L_{p_2p_2}\Gamma_0^2+2L_{p_1p_2}\Gamma_0\Gamma_1+L_{p_1p_1}\Gamma_1^2,\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}J_8={}&L_{p_2p_2}^3G_0^2-8L_{p_1p_2}^3G_0G_3+L_{p_1p_1}^3G_3^2+2L_{p_1p_1}L_{p_1p_2}L_{p_2p_2}(3G_0G_3-G_1G_2)\\&+L_{p_2p_2}^2(L_{p_1p_1}(G_1^2-2G_0G_2)-2L_{p_1p_2}G_0G_1)+4L_{p_1p_2}^2(L_{p_1p_1}G_1G_3+L_{p_2p_2}G_0G_2)\\&+L_{p_1p_1}^2(L_{p_2p_2}(G_2^2-2G_1G_3)-2L_{p_1p_2}G_2G_3),\end{aligned}$$

$$J_9=b_0(G_2^2-3G_1G_3)+b_1(9G_0G_3-G_1G_2)+b_2(G_1^2-3G_0G_2),$$

$$J_{10}=L_{p_1p_1}(G_2^2-3G_1G_3)+L_{p_1p_2}(9G_0G_3-G_1G_2)+L_{p_2p_2}(G_1^2-3G_0G_2),$$

$$J_{11}=J_0R+\tfrac38(b_2B_{00}-2b_1B_{01}+b_0B_{02})J_{12},$$

$$J_{12}=J_0\nu+\tfrac12b_0(B_{41}-B_{32})^2+b_1(B_{31}-B_{40})(B_{41}-B_{32})+\tfrac12b_2(B_{31}-B_{40})^2.$$

являются функциями относительных инвариантов четвертого порядка

$$b_0=\tfrac12(-D_0f_{2p_1}+D_1f_2+f_{2x_1}),$$

$$b_1=\tfrac14(D_0(f_{1p_1}-f_{2p_2})-D_1f_1+D_2f_2-f_{1x_1}+f_{2x_2}),$$

$$b_2=\tfrac12(D_0f_{1p_2}-D_2f_1-f_{1x_2}),$$

и пятого порядка

$$
\begin{aligned}
&B_{00} = D_0 b_0 + \tfrac{1}{2} b_0 (f_{1p_1} - f_{2p_2}) + b_1 f_{2p_1}, \quad B_{i0} = D_i b_0 + \tfrac{1}{2} b_0 (f_{1p_1p_i} - f_{2p_2p_i}) + b_1 f_{2p_1p_i},\\
&B_{01} = D_0 b_1 + \tfrac{1}{2}(b_0 f_{1p_2} + b_2 f_{2p_1}), \qquad\qquad B_{i1} = D_i b_1 + \tfrac{1}{2}(b_0 f_{1p_2p_i} + b_2 f_{2p_1p_i}),\\
&B_{02} = D_0 b_2 + \tfrac{1}{2} b_2 (f_{2p_2} - f_{1p_1}) + b_1 f_{1p_2}, \quad B_{i2} = D_i b_2 + \tfrac{1}{2} b_2 (f_{2p_2p_i} - f_{1p_1p_i}) + b_1 f_{1p_2p_i},\\
&\hspace{28em} i = 1, 2,\\
&B_{3j} = D_{p_1} b_j, \quad B_{4j} = D_{p_2} b_j, \quad j = 0, 1, 2,\\
&\nu = D_1(f_{1p_1p_2} + f_{2p_2p_2}) - D_2(f_{1p_1p_1} + f_{2p_1p_2}),\\
&\rho = D_1(D_1 f_{1p_2} - D_2 f_{1p_1}) + D_2(D_1 f_{2p_2} - D_2 f_{2p_1})\\
&\qquad - \tfrac{1}{4} b_0 (f_{1p_1p_2p_2} + f_{2p_2p_2p_2}) + \tfrac{1}{2} b_1 (f_{1p_1p_1p_2} + f_{2p_1p_2p_2}) - \tfrac{1}{4} b_2 (f_{1p_1p_1p_1} + f_{2p_1p_1p_2}),
\end{aligned}
$$

из которых образованы относительные инварианты

$$
\begin{aligned}
\epsilon_0 &= J_0(B_{11} - B_{20}) + \tfrac{1}{4}(b_2 B_{00} - b_1 B_{01})(B_{31} - B_{40}) + \tfrac{1}{4}(b_1 B_{00} - b_0 B_{01})(B_{41} - B_{32}),\\
\epsilon_1 &= J_0(B_{21} - B_{12}) + \tfrac{1}{4}(b_0 B_{02} - b_1 B_{01})(B_{41} - B_{32}) + \tfrac{1}{4}(b_1 B_{02} - b_2 B_{01})(B_{31} - B_{40}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E_0 = b_0^2(2B_{21} + B_{12}) - 2b_0 b_1 (2B_{11} + B_{20}) + (4b_1^2 - b_0 b_2) B_{10} - b_0 B_{02} B_{30}\\
&\quad + B_{01}[\tfrac{1}{4} b_0 (11 B_{31} + B_{40}) - b_1 B_{30}] + \tfrac{1}{4} B_{00}[5 b_2 B_{30} + b_1 (B_{40} - 7B_{31}) - b_0(2B_{41} + B_{32})],\\
&E_1 = b_0^2 B_{22} - b_0 b_2 (2B_{11} + B_{20}) + 2b_1 b_2 B_{10} + B_{02}[\tfrac{1}{4} b_0 (B_{31} - B_{40}) - b_1 B_{30}]\\
&\quad + B_{01}[\tfrac{3}{4} b_0 (B_{41} + B_{32}) + \tfrac{1}{2} b_2 B_{30}] + \tfrac{1}{4} B_{00}[b_2(B_{31} + 2B_{40}) - 3b_1(B_{41} + B_{32}) - b_0 B_{42}],\\
&E_2 = b_2^2 B_{10} - b_0 b_2 (2B_{21} + B_{12}) + 2b_0 b_1 B_{22} + B_{00}[\tfrac{1}{4} b_2 (B_{41} - B_{32}) - b_1 B_{42}]\\
&\quad + B_{01}[\tfrac{3}{4} b_2 (B_{31} + B_{40}) + \tfrac{1}{2} b_0 B_{42}] + \tfrac{1}{4} B_{02}[b_0(B_{41} + 2B_{32}) - 3b_1(B_{31} + B_{40}) - b_2 B_{30}],\\
&E_3 = b_2^2(2B_{11} + B_{20}) - 2b_1 b_2 (2B_{21} + B_{12}) + (4b_1^2 - b_0 b_2) B_{22} - b_2 B_{00} B_{42}\\
&\quad + B_{01}[\tfrac{1}{4} b_2 (11 B_{41} + B_{32}) - b_1 B_{42}] + \tfrac{1}{4} B_{02}[5 b_0 B_{42} + b_1 (B_{32} - 7B_{41}) - b_2(2B_{31} + B_{40})],\\
&\Gamma_0 = b_2 B_{30} - b_1(B_{31} + B_{40}) + b_0 B_{41}, \quad \Gamma_1 = -b_0 B_{42} + b_1(B_{41} + B_{32}) - b_2 B_{31},\\
&G_0 = 4b_1 B_{30} - b_0(3B_{31} + B_{40}), \quad G_1 = 4b_2 B_{30} + 2b_1(B_{31} + B_{40}) - b_0(5B_{41} + 3B_{32}),\\
&G_3 = b_2(3B_{41} + B_{32}) - 4b_1 B_{42}, \quad G_2 = b_2(5B_{31} + 3B_{40}) - 2b_1(B_{41} + B_{32}) - 4b_0 B_{42},\\
&R = J_0 \rho - \tfrac{1}{4}(b_2 B_{00} - 2b_1 B_{01} + b_0 B_{02})\nu + (B_{11} - B_{20})(b_2(B_{31} - B_{40}) + b_1(B_{41} - B_{32}))\\
&\qquad + (B_{21} - B_{12})(b_1(B_{31} - B_{40}) + b_0(B_{41} - B_{32})) + \tfrac{1}{8} B_{00}(B_{41} - B_{32})^2\\
&\qquad + \tfrac{1}{4} B_{01}(B_{31} - B_{40})(B_{41} - B_{32}) + \tfrac{1}{8} B_{02}(B_{31} - B_{40})^2.
\end{aligned}
$$

3. Инварианты некоторых классов лагранжевых систем

Здесь описываются инварианты некоторых классов систем уравнений Эйлера–Лагранжа, которые могут быть проинтегрированы или имеют некоторый стандартный вид.

3.1. Система с разделяющимися уравнениями

Система уравнений Эйлера–Лагранжа с лагранжианом, квадратичным по скоростям, разделяется и имеет вид

$$\ddot{x}_i = -g_i^{-1}\left(\frac{1}{2}\dot{x}_i^2 g_{ix_i} + \dot{x}_i g_{i\,t}\right) + e_i(t, x_i), \qquad i = 1, 2,$$

если ее лагранжиан равен

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 g_1(t, x_1) + \dot{x}_2^2 g_2(t, x_2)\right) + \dot{x}_1 c_1(t, x_1, x_2) + \dot{x}_2 c_2(t, x_1, x_2) + c_0(t, x_1, x_2), \qquad (7)$$

где функции c_0, c_1, c_2 удовлетворяют условиям

$$c_{2x_1} - c_{1x_2} = 0, \qquad c_{0x_i} = c_{i\,t} + g_i e_i, \qquad i = 1, 2.$$

Все инварианты (5) системы с лагранжианом (7) равны нулю, кроме инварианта I_2, который является функцией переменных t, x_1, x_2.

Инварианты произвольной системы с разделяющимися уравнениями, лагранжиан которой имеет вид $L = L_1(t, x_1, x_2, p_1) + L_2(t, x_1, x_2, p_2)$, удовлетворяют соотношениям

$$I_1 = 0, \quad I_3 = 0, \quad I_4 = 0, \quad I_5 = 0, \quad I_6 = -2I_{12}, \quad I_9 = 4I_{12}, \quad I_8 = 4I_7, \quad I_{10} = 4I_7.$$

3.2. Система с двумя циклическими переменными

Рассмотрим два вида систем (1) с лагранжианом $L = L(t, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$.

Если L имеет квадратичную зависимость от $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$,

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 C_0(t) + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 C_1(t) + \dot{x}_2^2 C_2(t)\right) + c_0(t) + \dot{x}_1 c_1(t) + \dot{x}_2 c_2(t), \qquad (8)$$

то для такой системы отличны от нуля относительные инварианты j_0, J_0, J_1, а остальные инварианты (6) равны нулю. Для нее можно составить только один абсолютный инвариант (5), а именно, I_1, который является функцией t. Таким образом, необходимым условием приводимости уравнений Эйлера–Лагранжа к системе с лагранжианом вида (8) является выполнение соотношений

$$I_0 = 0, \qquad J_k = 0, \quad k = 2, \ldots, 12,$$

и зависимость инварианта I_1 от t, x_1, x_2.

Если лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{\frac{1}{2}\dot{x}_1^2 C_0(t) + \dot{x}_1\dot{x}_2 C_1(t) + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2 C_2(t) + c_0(t) + \dot{x}_1 c_1(t) + \dot{x}_2 c_2(t)}{a_0(t) + \dot{x}_1 a_1(t) + \dot{x}_2 a_2(t)}, \quad a_2 a_1' - a_1 a_2' = 0, \ (9)$$

то для соответствующей системы уравнений Эйлера–Лагранжа равны нулю инварианты I_1, I_5, I_6, I_7, I_{10}, а все остальные инварианты (5) зависят не только от t, но и от $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. При этом $I_4 = 2I_2$, $I_9 = -36I_{12}$. Таким образом, необходимым условием приводимости к системе с лагранжианом вида (9) является выполнение соотношений

$$I_1 = 0, \quad I_5 = 0, \quad I_6 = 0, \quad I_7 = 0, \quad I_{10} = 0, \quad I_4 = 2I_2, \quad I_9 = -36I_{12}.$$

Этот случай рассматривается здесь потому, что система с квадратичным по $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ лагранжианом под действием преобразования (2) превращается в систему, лагранжиан которой имеет ту же форму зависимости от $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, что и (9).

3.3. Натуральная система в стандартной форме

Большинство систем, возникающих в механике, в некоторой системе координат имеют вид системы с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - F(t, x_1, x_2). \tag{10}$$

Инварианты такой системы равны

$$\begin{aligned}
I_1 &= 4\sqrt{2}\phi^{-5/4}[(F_{x_2x_2} - F_{x_1x_1})(F_{tx_1x_2} + \dot{x}_1F_{x_1x_1x_2} + \dot{x}_2F_{x_1x_2x_2}) \\
&\quad + F_{x_1x_2}(F_{tx_1x_1} + \dot{x}_1F_{x_1x_1x_1} + \dot{x}_2F_{x_1x_1x_2} - F_{tx_2x_2} - \dot{x}_1F_{x_1x_2x_2} - \dot{x}_2F_{x_2x_2x_2})], \\
I_2 &= 2\phi^{-1/2}\Phi^{-1}[(F_{x_2x_2} - F_{x_1x_1})(F_{x_1x_1x_1} + F_{x_1x_2x_2})(F_{x_1x_1x_2} + F_{x_2x_2x_2}) \\
&\quad + F_{x_1x_2}((F_{x_1x_1x_1} + F_{x_1x_2x_2})^2 - (F_{x_1x_1x_2} + F_{x_2x_2x_2})^2)], \\
I_3 &= 64\Phi^{-1}[(F_{x_2x_2} - F_{x_1x_1})^2(F^2_{x_1x_1x_2} + F^2_{x_1x_2x_2}) + 2F_{x_1x_2}(F_{x_2x_2} - F_{x_1x_1})(F_{x_1x_1x_1}F_{x_1x_1x_2} \\
&\quad - F_{x_1x_2x_2}F_{x_2x_2x_2}) + F^2_{x_1x_2}((F_{x_1x_1x_1} - F_{x_1x_2x_2})^2 + (F_{x_1x_1x_2} - F_{x_2x_2x_2})^2)], \\
I_4 &= 64\phi^{-3/2}\Phi^{-1}[(F_{x_2x_2} - F_{x_1x_1})^3F_{x_1x_1x_2}F_{x_1x_2x_2} \\
&\quad + F_{x_1x_2}(F_{x_2x_2} - F_{x_1x_1})^2(F_{x_1x_1x_1}F_{x_1x_2x_2} - F_{x_1x_1x_2}F_{x_2x_2x_2} + 2F^2_{x_1x_1x_2} - 2F^2_{x_1x_2x_2}) \\
&\quad + F^2_{x_1x_2}(F_{x_2x_2} - F_{x_1x_1})(F_{x_1x_1x_1}(3F_{x_1x_1x_2} - F_{x_2x_2x_2}) + F_{x_1x_2x_2}(3F_{x_2x_2x_2} - 5F_{x_1x_1x_2})) \\
&\quad + F^3_{x_1x_2}((F_{x_1x_1x_1} - F_{x_1x_2x_2})^2 - (F_{x_1x_1x_2} - F_{x_2x_2x_2})^2)], \\
I_5 &= 0, \quad I_6 = 0, \quad I_7 = 0, \quad I_8 = 0, \quad I_9 = 0, \quad I_{10} = 0, \quad I_{11} = 0, \quad I_{12} = 0,
\end{aligned}$$

где $\phi = (F_{x_2x_2} - F_{x_1x_1})^2 + 4F^2_{x_1x_2}$, $\Phi = (F_{x_1x_1x_1} + F_{x_1x_2x_2})^2 + (F_{x_1x_1x_2} + F_{x_2x_2x_2})^2$, Таким образом, для того, чтобы система (1) была приводима некоторым преобразованием (2) к стандартной форме с лагранжианом вида (10), она должна иметь инварианты $I_5, \ldots, I_{12}$, равные нулю, инварианты I_2, I_3, I_4, зависящие только от t, x_1, x_2 и инвариант I_1, зависящий линейно от $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$.

4. Пример эквивалентных систем

В [2] рассматриваются два семейства гамильтонианов H_1, H_2 и K_1, K_2, задающих двумерные обобщения второго уравнения Пенлеве. В данном разделе с использованием инвариантов показано, что системы, определяемые гамильтонианами H_2 и K_1, точечно эквивалентны друг другу.

Гамильтониану

$$H_2 = Q_2P_1^2 + 2P_1P_2 + 2P_1(Q_1Q_2 + t_1Q_2 + t_2) + 2P_2(Q_2^2 - Q_1 + t_1) + 2\kappa Q_2,$$

$t_1 = T_2$ — параметр, $t_2 = t$ — время, $\kappa = \mathrm{const}$, соответствует лагранжиан

$$\begin{aligned} L_2 = \tfrac{1}{2}\dot{Q}_1\dot{Q}_2 - \tfrac{1}{4}Q_2\dot{Q}_2^2 + (\dot{Q}_1 + Q_2^3 - 3Q_1Q_2 - T_2Q_2 - 2t)(Q_1 - Q_2^2 - T_2)& \\ +\dot{Q}_2(Q_2^3 - 2Q_1Q_2 - t) - 2\kappa Q_2.& \end{aligned}$$

Система уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\begin{aligned} &\ddot{Q}_1 = \tfrac{1}{2}\dot{Q}_2^2 + 2(1 - 3Q_1^2 - Q_2^4 + T_2^2) + 4(3Q_1Q_2^2 + T_2(Q_1 + Q_2^2) + tQ_2 - \kappa), \\ &\ddot{Q}_2 = (2Q_2^3 - 3Q_1Q_2 + T_2Q_2 - t) \end{aligned} \tag{11}$$

имеет следующие ненулевые инварианты (5)

$$I_1 = \frac{2(5Q_2^2\dot{Q}_1 - (5Q_2^3 + t)\dot{Q}_2 + Q_2)}{\sqrt{-6}(Q_2\Phi)^{5/4}}, \qquad I_2 = -\frac{10Q_2^3 + 5Q_1Q_2 + T_2Q_2 + t}{5Q_2\sqrt{-Q_2}\Phi^{1/2}},$$
$$I_3 = -\frac{4}{\Phi}(5Q_2^3 + 2t), \qquad I_4 = 2I_2 + \frac{4(5Q_2^2 - 5Q_1 - T_2)((5Q_1 + T_2)Q_2 + 2t)}{5\sqrt{-Q_2}\Phi^{3/2}},$$

$\Phi = 5Q_2^3 - 2(5Q_1 + T_2)Q_2 - 2t$. Для системы в стандартной форме также равны нулю все инварианты, кроме I_1, I_2, I_3, I_4. То есть необходимое условие приводимости к такой форме для системы (11) выполнено. Нетрудно проверить, что в переменных $y_1 = Q_1 - Q_2^2/4$, $y_2 = Q_2$ она превращается в систему с лагранжианом

$$\tilde{L}_2 = \dot{y}_1\dot{y}_2 + t(3y_2^2 - 4y_1) - \frac{3}{8}y_2^5 + (5y_1 + T_2)y_2^3 + 2(2T_2y_1 - 3y_1^2 + 1 + T_2^2 - 2\kappa)y_2,$$

а в переменных $x_1 = Q_1 - Q_2^2/4 + Q_2$, $x_2 = i(Q_1 - Q_2^2/4 - Q_2)$, $i^2 = -1$ — в систему с лагранжианом вида (10).

Гамильтониану

$$K_1 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^{-1}\left(p_1^2 - p_2^2 - p_1(2q_1^3 + 2\tau_2q_1 + \tau_1) + p_2(2q_2^3 + 2\tau_2q_2 + \tau_1)\right) - \kappa(q_1 + q_2),$$

$\tau_1 = \tau$ — время, $\tau_2 = T_1$ — параметр, соответствует лагранжиан

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = \tfrac{1}{2}(q_1 - q_2)(\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2) + \tfrac{1}{2}(2\dot{q}_1 + q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + T_1)(q_1^3 + T_1q_1 + \tau/2)+& \\ +\tfrac{1}{2}(2\dot{q}_2 + q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + T_1)(q_2^3 + T_1q_2 + \tau/2) + \kappa(q_1 + q_2).& \end{aligned}$$

Соответствующая система уравнений Эйлера–Лагранжа имеет следующие ненулевые инварианты (5)

$$I_1 = \frac{2(10(q_1+q_2)^2(q_1\dot q_1 + q_2\dot q_2) - \tau(\dot q_1 + \dot q_2) + q_1 + q_2)}{\sqrt{-6}(q_1+q_2)^{5/4}\phi^{5/4}},$$
$$I_2 = -\frac{20(q_1+q_2)^3 + 70q_1q_2(q_1+q_2) - 4T_1(q_1+q_2) - \tau}{10(q_1+q_2)\sqrt{-(q_1+q_2)}\phi^{1/2}}, \qquad I_3 = -\frac{4}{\phi}(5(q_1+q_2)^3 - \tau),$$
$$I_4 = 2I_2 + \frac{4(5(q_1^2+q_1q_2+q_2^2) + 2T_1)((5q_1q_2 - 2T_1)(q_1+q_2) - \tau)}{5\sqrt{-(q_1+q_2)}\phi^{3/2}},$$

$\phi = 5(q_1^3 + q_1^2q_2 + q_1q_2^2 + q_2^3) + 4T_1(q_1+q_2) + \tau$. Можно заметить, что они совпадают с инвариантами системы (11), если

$$\begin{gathered} t = -\tau/2, \qquad Q_1 = q_1q_2 + c, \qquad Q_2 = q_1 + q_2, \qquad c = \mathrm{const}, \\ \dot Q_1 = -2(q_2\dot q_1 + q_1\dot q_2), \qquad \dot Q_2 = -2(\dot q_1 + \dot q_2), \qquad T_2 = -2T_1 - 5c. \end{gathered} \tag{12}$$

Подстановка (12) в (11) показывает, что это преобразование связывает соответствующие системы уравнений Эйлера–Лагранжа тогда и только тогда, когда $c = -T_1/2$.

Рассматриваемым в [2] гамильтониану

$$H_1 = P_1^2(Q_2 - Q_1 - t_1) + 2Q_2P_1P_2 + P_2^2 + 2P_1(Q_1^2 - t_1^2 + t_2Q_2) + 2P_2(Q_1Q_2 + t_1Q_2 + t_2) + 2\kappa Q_1,$$

($t_1 = t$ — время, $t_2 = T_1$ — параметр) соответствует лагранжиан

$$\begin{aligned} L_1 = \frac{\dot Q_2^2}{4} - \frac{(Q_2\dot Q_2 - \dot Q_1)^2}{4(Q_1+t)} &+ (\dot Q_1 - Q_1^2 - T_1Q_2 + t^2)(Q_1 - Q_2^2 - t) \\ &+ (\dot Q_2 - Q_1Q_2 - tQ_2 - T_1)(Q_2^3 - 2Q_1Q_2 - T_1) - 2\kappa Q_1, \end{aligned}$$

а гамильтониану

$$\begin{aligned} K_2 = \tfrac12(q_1-q_2)^{-1}\,(q_1p_2^2 - q_2p_1^2 - p_1 + p_2 &+ q_2p_1(2q_1^3 + 2\tau_2q_1 + \tau_1) \\ &- q_1p_2(2q_2^3 + 2\tau_2q_2 + \tau_1)) + \kappa q_1q_2, \end{aligned}$$

($\tau_1 = T_2$ — параметр, $\tau_2 = \tau$ — время) — лагранжиан

$$\begin{aligned} \Lambda_2 = {} & \tfrac12(q_1-q_2)\left(\frac{\dot q_2^2}{q_1} - \frac{\dot q_1^2}{q_2}\right) \\ & + \left(\dot q_1 - \tfrac12 q_1q_2(q_1+q_2) - \tfrac14 q_2(q_2^2+\tau) + \tfrac18(T_2 + q_1^{-1})\right)\left(q_1^3 + \tau q_1 + \tfrac12(T_2 - q_2^{-1})\right) \\ & + \left(\dot q_2 - \tfrac12 q_1q_2(q_1+q_2) - \tfrac14 q_1(q_1^2+\tau) + \tfrac18(T_2 + q_2^{-1})\right)\left(q_2^3 + \tau q_2 + \tfrac12(T_2 - q_1^{-1})\right) - \kappa q_1q_2. \end{aligned}$$

Их инварианты из-за их громоздкости здесь не приводятся. Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа не эквивалентны системе (11) или системе с лагранжианом вида (7), (8), (9) или (10), так как для них отличны от нуля инварианты I_1, I_8, I_9,

I_{11}, I_{12}. Но, также как и в случае лагранжианов L_2 и Λ_1, системы с лагранжианами L_1 и Λ_2 связаны преобразованием

$$t = \tau/2, \qquad Q_1 = q_1 q_2 - \tau/2, \qquad Q_2 = q_1 + q_2, \qquad T_1 = -2T_2.$$

Таким образом, соотношения

$$t_1 = \frac{\tau_2}{2}, \qquad t_2 = -\frac{\tau_1}{2}, \qquad Q_1 = q_1 q_2 - \frac{\tau_2}{2}, \qquad Q_2 = q_1 + q_2$$

определяют связь между уравнениями Эйлера–Лагранжа, соответствующими гамильтонианам H_1, H_2 и K_2, K_1.

Литература

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений // Наука, М., 1978, 400 стр.
2. *Okamoto K.* The Hamiltonians associated to the Painleve equations // В сб. "The Painleve Property: One Century Later"(Ed. *R. Conte*), Springer, N.Y., 1999. P. 735-787.

DIFFERENTIAL INVARIANTS OF A SYSTEM OF EULER-LAGRANGE EQUATIONS WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

Yu.Yu. Bagderina

Institute of Mathematics and Computer Center of RAS

yulya@mail.rb.ru

Received 15.08.2012

We consider the systems of Euler-Lagrange equations with two degrees of freedom. For this class of equations the equivalence problem with respect to point transformations is solved. Using Lie's infinitesimal method we construct the basis of differential invariants for this class of equations and operators of invariant differentiation as well. Certain types of Lagrangian systems are described in terms of their invariants. Some examples are given to illustrate our results.