ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ СОСТОЯНИЙ 3:(-1) РЕЗОНАНСНОЙ НАНОЛОВУШКИ ПЕННИНГА

О.В. Благодырева*, М.В. Карасев**, Е.М. Новикова***

Московский институт электроники и математики,
Лаборатория математических методов естествознания,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Karasev.Mikhail@gmail.com, emnovikova@hse.ru

Поступила 15.09.2013

Обсуждаются физические параметры квантовой наноловушки Пеннинга. В случае резонанса 3:(-1) между поперечными частотами ловушки дано описание воспроизводящей меры на симплектических листах, отвечающих неприводимым представлениям нелиевской алгебры симметрий с кубическими коммутационными соотношениями. Неоднородность магнитного поля и негармоническая часть электрического потенциала ловушки после двойного квантового усреднения порождают эффективный гамильтониан, который в неприводимом представлении становится обыкновенным дифференциальным оператором второго порядка. Получена интегральная формула для асимптотических собственных состояний возмущенной 3:(-1) резонансной ловушки Пеннинга через собственные функции этого оператора, когерентные состояния и воспроизводящую меру.

УДК 517.955.8

1. Введение

Ловушки Пеннинга – это устройства, где используется электрическое поле, созданное цилиндрического (или аналогичного) вида конденсатором, а также аксиально-направленное магнитное поле, которые совместно удерживают электрический заряд в компактной области внутри конденсатора [1-6]. Особый интерес представляют микро- и нано- ловушки Пеннинга, применяемые, например, как чувствительные детекторы и как искусственные «атомы». Наноловушки, имеющие различимую структуру спек-

* Работа поддержана РФФИ, грант 12-01-00627-а.
** Исследование поддержано программой фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.
*** Работа частично поддержана Научным фондом НИУ ВШЭ.

тральных линий, могут рассматриваться в качестве управляемых квантовых систем, например, для квантовых вычислений [6, 7, 8].

Имеются три основных внешних параметра, которые характеризуют ловушку. Во-первых, это ее характерный размер l. Во-вторых, это величина однородной части магнитного поля B_0 и связанный с ней магнитный масштаб $l_0 \stackrel{\text{def}}{=} (f/B_0)^{1/2}$, где f – квант магнитного потока. И наконец, третий параметр – это масштаб L неоднородности полного магнитного поля B, который определяется так:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{B}|\nabla B|(\text{в центре ловушки}).$$

Эти физические размерные параметры задают два безразмерных параметра, которые предполагаются малыми:

$$\hbar \stackrel{\text{def}}{=} (l_0/l)^2 \text{ – параметр квазиклассичности,}$$
$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} l/L \text{ – параметр возмущения из-за магнитной неоднородности.}$$

Можно еще ввести независимый параметр, характеризующий ангармоничность электрического поля ловушки, но мы здесь это не делаем и для простоты предполагаем, что эта ангармоничность имеет порядок ε^2 в безразмерных переменных.

Расстояние между соседними уровнями энергии частицы (квантовые щели) в идеальной ловушке без учета неоднородности и ангармоничности задается величиной $\delta \stackrel{\text{def}}{=} E\lambda^2/l_0^2$, где E – энергия покоя частицы, λ – ее комптоновская длина волны. Чтобы ловушка могла рассматриваться как квантовое устройство, величина δ должна быть достаточно хорошо различимой в эксперименте, что приводит к требованию достаточной малости магнитного масштаба l_0, т.е. достаточно большой величины магнитного поля B_0. Отметим, что это поле может быть создано как макроустановкой, так и наноструктурой с гигантским магнитным моментом (например, легированными нанопленками [9]).В этом последнем варианте, как раз, существенно проявляется неоднородность магнитного поля ловушки, характеризуемая масштабом L.

Например, выберем $L{\sim}10^2$ *нм*; наноструктуры такого размера способны создать магнитное поле $B_0{\sim}16$ *Тл*, что соответствует магнитному масштабу $l_0{\sim}3$ *нм*. Тогда величина квантовых щелей ловушки, без учета неоднородности поля, будет достаточно большой: $\delta{\sim}10^{-2}$ *эв*, т.е. ловушка, действительно, сможет функционировать как квантовое устройство. Выбрав размер ловушки $l{\sim}30$ *нм*, мы получим следующие значения введенных выше малых параметров:

$$\hbar{\sim}10^{-2},\ \varepsilon{\sim}1/3.$$

С учетом неоднородности и ангармоничности, энергетические щели в такой ловушке будут порядка $\varepsilon\delta$ или $\varepsilon^2\delta$. Даже последняя, самая маленькая величина $\varepsilon^2\delta{\sim}10^{-3}$*эв* все еще хорошо различима экспериментально,так что, учет неоднородности и ангармоничности в таком квантовом устройстве будет актуальным.

Отметим, в данном случае параметр возмущения ε оказывается достаточно заметным (не очень малым), а масштаб квазиклассической «длины волны» $\hbar$ – весьма малым. При вычислении спектра и построении собственных функций ловушки этот масштаб и такое соотношение между двумя малыми параметрами ε и $\hbar$ требуют привлечения новых алгебраических методов квазиклассического приближения и операторных преобразований [10, 11]; рутинная техника теории возмущений и ВКБ-асимптотик в данной задаче не работает.

Подчеркнем, что хотя ловушки Пеннинга представляют собой один из самых фундаментальных примеров механических систем (как классических, так и квантовых), разыскать математическую теорию этих систем в учебниках не легко, см. в [12-14].

Возможно, причина этого состоит в том, что эти системы являются гиперболическими, а не эллиптическими, и поэтому не принадлежат к области классической «компактной» динамики и «матричной» теории возмущений. Компактная и конечно-матричная динамика, а также сопутствующая ей аналитика, и проще и более устойчива; вот почему системы эллиптического типа играют такую важную роль и изучаются на первом месте. С другой стороны, гиперболические системы, конечно, привлекают очень большой интерес в релятивистской механике, т.е., в четырехмерном случае. Микро- и нанотехнологии сейчас предложили для изучения, как ни удивительно, двумерный случай. Это вызывает интерес к $(2+1)$- гиперболическим системам в евклидовом пространстве, примером которых служат ловушки Пеннинга.

Математическая модель «идеальной» ловушки Пеннинга – это гармонический осциллятор гиперболического типа (с сигнатурой $+,-$ нормальных мод в направлениях, поперечных по отношению к аксиальной оси). Три нормальные частоты этого осциллятора зависят от следующих внешних параметров: величина магнитного поля и электрическое напряжение на конденсаторе. Условие ловушечности означает, что

$$\omega > \omega_0, \tag{1.1}$$

где ω – это магнитная Ларморова частота, а ω_0 – это частота квадратичного потенциала конденсатора в центре ловушки в поперечных направлениях.

Теперь нужно вспомнить, что упомянутый гармонический осциллятор – это только старшая часть полного гамильтониана ловушки Пеннинга. Существуют также возмущения, которые возникают, во-первых, из-за неоднородности магнитного поля [15, 16] и, во-вторых, из-за ангармонических поправок к электрическому потенциалу конденсатора, см., например, [4].

Пока резонанса в системе нет, неоднородность поля и ангармоничность только незначительно возмущают частоты главной (гармонической) части, практически, не внося какого-либо изменения в ее фазовую структуру. В этом случае квантовые состояния могут быть построены, используя общепринятые и хорошо развитые методы осцилляторного или квазиклассического приближения [17, 18]. Однако в тех случаях, когда частоты гармонической части гамильтониана находятся в резонансе, возникает математически более значимая и физически гораздо более интересная картина. В частности, при резонансе, по сравнению с нерезонансным вариантом, спектральные линии становятся разреженными (щели между ближайшими уровнями увеличиваются, как минимум, в $\hbar^{-1} \sim 10^2$ раз). Отметим, что технически реализовать ситуацию, когда частоты находятся в резонансе, можно без труда, путем вариации управляющих полей ловушки.

Несмотря на то, что спектр гармонической части ловушки дискретен, он неограничен ни сверху ни снизу, что может служить причиной неустойчивости в резонансном состоянии. Кроме того, при резонансе спектр гармонической части ловушки сильно вырожден. Для ловушек Пеннинга резонансное вырождение бесконечно. Это представляет собой «камень преткновения» для стандартной теории возмущений, поскольку конечно-матричные методы здесь не работают.

Сильное спектральное вырождение является следствием некоммутативности алгебры симметрий резонансного осциллятора. Некоммутативность влечет также нетривиальную симплектическую геометрию. Непрерывные геометрические объекты (например, симплектические листы алгебры симметрий) позволяют промоделировать и эффективно заменить собой бесконечную матричную структуру, а интегрирование относительно непрерывной меры вдоль листов позволяет эффективно заменить суммирование бесконечных рядов матричных элементов из обычной теории возмущений. Таким образом, существует способ обойти упомянутый «камень преткновения», используя новейшие квантово-геометрические методы.

Нужно обратить внимание еще на один замечательный математический факт: алгебра симметрий резонансного осциллятора всегда оказывается алгеброй нелиевского типа (за исключением тривиальных резонансов с равными друг другу частотами). Это означает, что алгебра не может быть описана с помощью линейных коммутационных соотношений.

Даже в простейшем случае двухчастотного резонанса алгебра симметрий описывается нелинейными коммутационными соотношениями [10, 11] (см. также в[19] специально для ловушки Пеннинга). Еще более интересные алгебры симметрий возникают в случае трехчастотного резонанса [20]. Появление нелиевских алгебр, в свою очередь, требует обобщения на этот случай метода геометрического квантования и теории неприводимых представлений. В нашей работе мы применяем для этих целей технику, развитую в [11, 21, 22].

Помимо алгебраической структуры, меняется и роль, которую играет усредненный возмущающий гамильтониан. Он получается, следуя общей алгебраической процедуре [11, 23], с помощью проектирования на алгебру симметрий. При резонансе, за счет некоммутативности алгебры симметрий, появляется дополнительная степень свободы, и для описания эволюции системы внутри этой степени свободы важное значение приобретает зависимость усредненного возмущения (неоднородности и ангармоничности) от операторов рождение-уничтожение из алгебры симметрий. Квантовые состояния ловушки резко перестраиваются, и в системе появляются новые квантовые числа.

Мы рассматриваем в данной работе следующее соотношение между частотами ωи ω_0:

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{8}{3}.$$

Тогда поперечные частоты ловушки окажутся в резонансе 3:(-1), а третья (продольная) частота с ними будет несоизмерима. Ниже мы изучаем ловушку Пеннинга именно с таким резонансным условием.

Оказывается, что резонансная 3:(-1) алгебра симметрий гармонической части ловушки Пеннинга определяется кубическими коммутационными соотношениями. Образующие этой алгебры являются полиномами четвертой степени от исходных гейзенберговских координат и импульсов. Для этой нелиевской алгебры неприводимые представления и обобщенные когерентные состояния могут быть построены по общей схеме [21]. Неприводимые представления реализуются дифференциальными операторами второго порядка типа Хейна в гильбертовом пространстве антиголоморфных обобщенных функций на комплексной плоскости.

Возмущение «идеальной» ловушки Пеннинга определяется линейной неоднородностью магнитного поля, которая называется неоднородностью Йоффе [15, 16], и членами четвертого порядка неоднородности электрического потенциала. После (двойного) квантового усреднения неоднородность Йоффе порождает гамильтониан, линейно зависящий от образующих нелиевской алгебры симметрий. В неприводимом представлении этот эффективный гамильтониан ловушки Пеннинга-Йоффе задается обыкновенным дифференциальным оператором второго порядка типа Хейна. Невырожденный спектр и собственные функции данного оператора – это то, что необходимо для вычисления приближенных спектральных данных исходного гамильтониана ловушки Пеннинга.

Таким образом, наш алгебраический метод приближенно редуцирует исходный $3D$-дифференциальный оператор (Шредингера) к $1D$-дифференциальному оператору (типа Хейна). В некотором смысле эта процедура может рассматриваться как аналог метода разделения переменных. Но вместо нахождения таких переменных (что в данном случае, по-видимому, просто невозможно) мы строим и используем неприводимые представления нелиевской алгебры симметрий, соответствующие когерентные состояния и воспроизводящую меру на симплектических листах. Вычисление этой меры – главный результат данной работы.

Приближенные собственные состояния квантовой ловушки Пеннинга (в резонансном случае) могут быть представлены следующим образом: собственные функции редуцированного обыкновенного дифференциального оператора вместе со «сжатыми» когерентными состояниями алгебры симметрий интегрируются по симплектическим листам относительно воспроизводящей меры.

2. Усредняющее преобразование гамильтониана.

Электрический потенциал ловушки Пеннинга в декартовых координатах x, y, z задается формулой

$$\frac{1}{2}\omega_0^2 U_0 + \frac{\varepsilon^2}{2}(a U_1 + b U_2).$$

Здесь U_j – полиномы, получаемые из уравнения Лапласа $\Delta U_j = 0$:

$$U_0 = z^2 - (x^2 + y^2)/2, U_1 = 8z^4 - 24z^2(x^2 + y^2) + 3(x^2 + y^2)^2,$$
$$U_2 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4,$$

a, b – некоторые константы, ε – малый параметр, ω_0 – аксиальная частота. Магнитное поле состоит из однородной части, направленной вдоль оси z, и неоднородного возмущения. Мы выбираем это возмущение линейным по координатам x, y и направленным вдоль x, y-плоскости (так называемое «поле Йоффе»). Таким образом, магнитное поле ловушки задается выражением

$$\boldsymbol{B} = \omega \boldsymbol{e}_z + \varepsilon\Big((n_2x + 2n_3y)\boldsymbol{e}_x - (2n_1x + n_2y)\boldsymbol{e}_y\Big),$$

где $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ – единичные векторы, направленные вдоль осей координат, а ω – Лармора частота.

Для того чтобы появился резонанс 3:(-1), мы выбираем $\omega^2 = 4, \omega_0^2 = 3/2$.

Гамильтониан такой резонансной ловушки имеет вид $H = H_0 + H_1$, где главная часть H_0 представляет собой гармонический осциллятор в однородном магнитном поле:

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \left(xp_y - yp_x\right) + \frac{1}{8}(x^2 + y^2) + \frac{3}{4}z^2,$$

а возмущающая часть H_1 порождается кубическими и квадрупольными неоднородностями:

$$H_1 = -\varepsilon(n_1x^2 + n_2xy + n_3y^2)p_z + \frac{\varepsilon^2}{2}(n_1x^2 + n_2xy + n_3y^2)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}(aU_1 + bU_2).$$

Преобразуем гамильтониан H_0 к нормальной форме путем следующей симплектической замены координат:

$$q_+ = x/2 - p_y, q_- = x/2 + p_y, q_3 = \sqrt[4]{3/2}\, z,$$
$$p_+ = y/2 + p_x, p_- = -y/2 + p_x, p_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{3/2}} p_z.$$

В новых координатах квантовая ловушка Пеннинга-Йоффе описывается гамильтонианами

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{4}\hat{V}_0, \hat{H}_1 = -\varepsilon\hat{V}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\hat{V}_2 + a\hat{V}_3 + b\hat{V}_4\right), \tag{2.1}$$

где V_0 представляет собой гармонический 3:(-1)-резонансный член:

$$V_0 = 3A_+ - A_- + \sqrt{6}A_3, A_j \stackrel{\text{def}}{=} p_j^2 + q_j^2 (j = +, -, 3),$$

а возмущающие кубический и квадрупольные члены имеют вид

$$V_1 = \sqrt[4]{3/2}\,(n_1(q_+ + q_-)^2 + n_2(q_+ + q_-)(p_+ - p_-) + n_3(p_+ - p_-)^2)p_3,$$
$$V_2 = (n_1(q_+ + q_-)^2 + n_2(q_+ + q_-)(p_+ - p_-) + n_3(p_+ - p_-)^2)^2,$$

$V_3 = \frac{16}{3} q_3^4 - 8\sqrt{6} q_3^2 ((q_+ + q_-)^2 + (p_+ - p_-)^2) + 3((q_+ + q_-)^2 + (p_+ - p_-)^2)^2,$
$V_4 = (q_+ + q_-)^4 - 6(q_+ + q_-)^2 (p_+ - p_-)^2 + (p_+ - p_-)^4.$

Верхние крышки в гамильтонианах (2.1) означают квантовую подстановку

$$p_x \to \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, p_y \to \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, p_z \to \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}.$$

Первый возмущающий гамильтониан $\hat{V}_1$в (2.1) не коммутирует с главным членом$\hat{H}_0$, но после некоторого унитарного преобразования $T(\varepsilon)$ он становится коммутирующим с $\hat{H}_0$ с точностью $O(\varepsilon^4)$ (согласно методу алгебраического усреднения [23, 11]). Легко видеть, что после применения процедуры усреднения получаем нулевой оператор в члене порядка ε; главными становятся члены порядка ε^2. Если ввести операторы рождения-уничтожения

$$\hat{B}_j = \hat{q}_j - i\hat{p}_j, \hat{C}_j = \hat{q}_j + i\hat{p}_j (j = +, -, 3),$$

то в порядке ε^2 появляется несколько операторов, коммутирующих с $\hat{H}_0$, а именно:

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \left(\underline{\hat{V}_2} + a\underline{\hat{V}_3} + b\underline{\hat{V}_4} + \underline{\hat{V}_5} \right). \tag{2.2}$$

Здесь:

$$\underline{\hat{V}_2} = (3n_1^2 + 2n_1 n_3 + 3n_3^2 + n_2^2) \left(\frac{1}{8} \hat{B}_+^2 \hat{C}_+^2 + \frac{1}{2} \hat{B}_+ \hat{C}_+ \hat{B}_- \hat{C}_- + \frac{1}{8} \hat{B}_-^2 \hat{C}_-^2 + \hbar \left(\hat{B}_+ \hat{C}_+ + \hat{B}_- \hat{C}_- \right) + \hbar^2 \right) + \frac{1}{4} (n_1^2 - n_3^2) \left(\hat{B}_+ \hat{B}_-^3 + \hat{C}_+ \hat{C}_-^3 \right) - \frac{i}{4} (n_1 n_2 + n_2 n_3) \left(\hat{B}_+ \hat{B}_-^3 - \hat{C}_+ \hat{C}_-^3 \right), \tag{2.3}$$

$$\underline{\hat{V}_3} = 2\left(\hat{B}_3^2 \hat{C}_3^2 + 4\hbar \hat{B}_3 \hat{C}_3 + 2\hbar^2 \right) - 12\sqrt{2/3} \left(\hat{B}_3 \hat{C}_3 + \hbar \right) \left(\hat{B}_+ \hat{C}_+ + \hat{B}_- \hat{C}_- + 2\hbar \right) + 3\left(\hat{B}_+^2 \hat{C}_+^2 + 4\hat{B}_+ \hat{C}_+ \hat{B}_- \hat{C}_- + \hat{B}_-^2 \hat{C}_-^2 + 8\hbar \left(\hat{B}_+ \hat{C}_+ + \hat{B}_- \hat{C}_- \right) + 8\hbar^2 \right), \tag{2.4}$$

$$\underline{\hat{V}_4} = 0,$$

и, наконец,

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{V}_5} = \frac{\sqrt{6}}{5} \Big(&(6n_1^2 + 8n_1 n_3 + 6n_3^2 + n_2^2) \hat{B}_+ \hat{C}_+ - (2n_1^2 - 24n_1 n_3 + 2n_3^2 + 7n_2^2) \hat{B}_- \hat{C}_- \\
&+ 2(2n_1^2 + 16n_1 n_3 + 2n_3^2 - 3n_2^2)\hbar \Big) \left(\hat{B}_3 \hat{C}_3 + \hbar \right) \\
&- \frac{3}{4} \Big(\frac{1}{15} (9n_1^2 + 22n_1 n_3 + 9n_3^2 - n_2^2) \hat{B}_+^2 \hat{C}_+^2 \\
&+ \frac{4}{15} (17n_1^2 + 46n_1 n_3 + 17n_3^2 - 3n_2^2) \hat{B}_+ \hat{C}_+ \hat{B}_- \hat{C}_- \\
&+ \frac{1}{3} (5n_1^2 - 2n_1 n_3 + 5n_3^2 + 3n_2^2) \hat{B}_-^2 \hat{C}_-^2 \\
&+ \frac{8}{15} (13n_1^2 + 34n_1 n_3 + 13n_3^2 - 2n_2^2) \hbar \hat{B}_+ \hat{C}_+ \\
&+ \frac{8}{5} (7n_1^2 + 6n_1 n_3 + 7n_3^2 + 2n_2^2) \hbar \hat{B}_- \hat{C}_- \\
&+ \frac{8}{15} (27n_1^2 + 26n_1 n_3 + 27n_3^2 + 7n_2^2) \hbar^2 + 2(n_1^2 - n_3^2) \left(\hat{B}_+ \hat{B}_-^3 + \hat{C}_+ \hat{C}_-^3 \right) \\
&- 2i(n_1 n_2 + n_2 n_3) \left(\hat{B}_+ \hat{B}_-^3 - \hat{C}_+ \hat{C}_-^3 \right) \Big).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Алгебра симметрий и ее неприводимые представления

Главное свойство усредненных операторов в (2.2) (вычисленных в (2.3), (2.4), (2.5)) заключается в том, что они коммутируют с главной частью $\widehat{H}_0 = \frac{1}{4}\widehat{V}_0$ гамильтониана ловушки Пеннинга. Теперь опишем алгебру всех операторов, коммутирующих с главной частью $\widehat{H}_0$. Эта алгебра симметрий порождается пятью самосопряженными операторами:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_+\hat{C}_+ + \hbar, \hat{A}_2 = \hat{B}_-\hat{C}_- + \hbar, \hat{A}_3 = \hat{B}_3\hat{C}_3 + \hbar,$$
$$\hat{A}_4 = -\frac{i}{2}\left(\hat{B}_+\hat{B}_-^3 - \hat{C}_+\hat{C}_-^3\right), \hat{A}_5 = \frac{1}{2}\left(\hat{B}_+\hat{B}_-^3 + \hat{C}_+\hat{C}_-^3\right). \tag{3.1}$$

Коммутационные соотношения между этими образующими нелинейные, а именно – они кубические:

$$\begin{gathered}[\hat{A}_1, \hat{A}_2] = 0, [\hat{A}_k, \hat{A}_3] = 0 (k = 1,2,4,5),\\ [\hat{A}_1, \hat{A}_4] = -2i\hbar\hat{A}_5, [\hat{A}_2, \hat{A}_4] = -6i\hbar\hat{A}_5,\\ [\hat{A}_1, \hat{A}_5] = 2i\hbar\hat{A}_4, [\hat{A}_2, \hat{A}_5] = 6i\hbar\hat{A}_4,\\ [\hat{A}_4, \hat{A}_5] = i\hbar\left(9\hat{A}_1\hat{A}_2^2 + \hat{A}_2^3 + \hbar^2\left(15\hat{A}_1 + 23\hat{A}_2\right)\right).\end{gathered} \tag{3.2}$$

Операторы Казимира имеют вид

$$\widehat{V}_0 = 3\hat{A}_1 - \hat{A}_2 + \sqrt{6}\hat{A}_3, \tag{3.3}$$

$$\widehat{K} = \hat{A}_4^2 + \hat{A}_5^2 - \hat{A}_1\hat{A}_2^3 - \hbar^2\left(23\hat{A}_1\hat{A}_2 + 9\hat{A}_2^2\right) - 15\hbar^4. \tag{3.4}$$

Они коммутируют со всеми образующими алгебры симметрий, т.е.

$$[\widehat{V}_0, \hat{A}_j] = 0 \text{и} [\widehat{K}, \hat{A}_j] = 0.$$

В исследуемом представлении оператор Казимира (3.4) равен нулю: $\widehat{K}\Big|_{\substack{\textit{нанашем}\\ \textit{представлении}}} = 0.$

Далее, следуя общему методу[21],покажем, как строятся неприводимые представления нелиевской алгебры симметрий (3.2). Введем операторы рождения и уничтожения:

$$\hat{A}_+ = \hat{A}_5 + i\hat{A}_4, \hat{A}_- = \hat{A}_5 - i\hat{A}_4.$$

Тогда коммутационные соотношения алгебры симметрий можно записать в виде:

$$[\hat{A}_-, \hat{A}_+] = f(\hat{A}), \hat{A}_-\hat{A} = \varphi(\hat{A})\hat{A}_-, \hat{A}\hat{A}_+ = \hat{A}_+\varphi(\hat{A}), \tag{3.5}$$

где $\hat{A} = (\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3)$ – набор коммутирующих образующих, $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – векторнозначная функция, а$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ – скалярная функция:

$$\varphi(a) = (a_1 + 2\hbar, a_2 + 6\hbar, a_3), f(a) = 2\hbar\left(9a_1a_2^2 + a_2^3 + \hbar^2(15a_1 + 23a_2)\right). \tag{3.6}$$

Введем функцию $\mathcal{F}_a: \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ вида

$$\mathcal{F}_a(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f\left(\varphi^j(a)\right),$$

т. е.

$$\mathcal{F}_a(n) = 432\hbar^4\left(n^3 + \frac{a_1 + a_2 + 2\hbar}{2\hbar}n^2 + \frac{9a_1a_2 + 3a_2^2 + 9\hbar(a_1 + a_2) + 14\hbar^2}{36\hbar^2}n + \frac{9a_1a_2^2 + a_2^3 + \hbar^2(15a_1 + 23a_2)}{216\hbar^3}\right).$$

Определим подмножество $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$ следующим образом: вектор $a = (a_1, a_2, a_3)$ с компонентами $a_j = \hbar(2N_j + 1)$, где $N_j \in \mathbb{Z}_+$, принадлежит $\mathcal{R}$, если $\mathcal{F}_a(n) > 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

Для каждого $a \in \mathcal{R}$ разложим функцию $\mathcal{F}_a(n)$ на два вещественных множителя

$$\mathcal{F}_a(n) = \mathcal{F}_a^+(n)\mathcal{F}_a^-(n), \tag{3.7}$$

где

$$\mathcal{F}_a^+(n) = 24\hbar^2(n - \kappa_2 - i\kappa_3)(n - \kappa_2 + i\kappa_3), \mathcal{F}_a^-(n) = 18\hbar^2(n - \kappa_1).$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\kappa_1 = -\xi - 2\eta + 2\zeta, \kappa_2 = -\xi + \eta - \zeta, \kappa_3 = \sqrt{3}(\eta + \zeta),$$
$$\xi = \frac{1}{3}(N_1 + N_2 + 2), \eta = \frac{\nu}{6\hbar\vartheta}, \zeta = \frac{\vartheta}{72\hbar},$$
$$\vartheta = \left(108\mu + 12\sqrt{12\nu^3 + 81\mu^2}\right)^{1/3},$$
$$\mu = -8\hbar^3 N_1(2N_1^2 + 3N_1 - 3N_1N_2 - 6N_2 + 3N_2^2 + 1),$$
$$\nu = -4\hbar^2(3N_1^2 + 3N_1 - 3N_1N_2 + 1).$$

Определим положительные числа

$$s_0(a) = 1, s_n(a) = \frac{n!\mathcal{F}_a(n-1)\ldots\mathcal{F}_a(0)}{|\mathcal{F}_a^+(n-1)|^2\ldots|\mathcal{F}_a^+(0)|^2} (0 < n < \infty),$$

т.е.

$$s_n(a) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{n!(-\kappa_1)_n}{(-\kappa_2 - i\kappa_3)_n(-\kappa_2 + i\kappa_3)_n},$$

где $(\cdot)_n$ – символы Похгаммера [24, т. 1].

С помощью чисел $s_n(a)$ введем гильбертово пространство обобщенных функций на $\mathbb{R}^2$. Эти обобщенные функции антиголоморфны, т.е. они аннулируются оператором $\partial/\partial w$, где w – комплексная координата на плоскости $\mathbb{R}^2$. Точнее, рассмотрим обобщенные функции g на $\mathbb{R}^2$, которые представимы в виде степенного ряда

$$g(\overline{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \overline{w}^n.$$

Здесь через $\overline{w}$ обозначено комплексное сопряжение w. Через $\mathcal{P}_{s(a)}$ обозначим пространство рядов, удовлетворяющих условию

$$\|g\|_{\mathcal{P}_{s(a)}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n(a)|g_n|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Скалярное произведение в $\mathcal{P}_{s(a)}$ определим по формуле

$$(g', g)_{\mathcal{P}_{s(a)}} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(a) g'_n \overline{g_n}.$$

Пусть $\mathcal{H}$ – абстрактное гильбертово пространство, $\mathcal{P}$ – пространство антиголоморфных обобщенных функций, и существует мономорфизм $\mathcal{J}: \mathcal{P} \to \mathcal{H}$. «Интегральное ядро» $\mathfrak{p}$ этого мономорфизма – это $\mathcal{H}$-значная голоморфная обобщенная функция такая, что

$$\big(\psi, \mathcal{J}(g)\big)_{\mathcal{H}} = ((\psi, \mathfrak{p})_{\mathcal{H}}, g)_{\mathcal{P}}, \forall g \in \mathcal{P}, \psi \in \mathcal{H}.$$

Мономорфизм $\mathcal{J}: \mathcal{P} \to \mathcal{H}$ называется *когерентным преобразованием*, а его интегральное ядро $\mathfrak{p} \in \mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{P}}$ – семейством *обобщенных когерентных состояний*. Когерентное преобразование является унитарным. Обратное отображение задается формулой

$$\mathcal{J}^{-1}(\psi) = (\psi, \mathfrak{p})_{\mathcal{H}}, \forall\, \psi \in \mathcal{H}.$$

Если $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{s(a)}$, то семейство $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}_w\}$ может быть представлено в виде степенного ряда по w:

$$\mathfrak{p}_w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{\sqrt{s_n(a)}} e_n \tag{3.8}$$

по любой ортонормированной системе $e_n \in \mathcal{H}$, $e_0 = \mathcal{J}(1)$.

Единичный вектор $\mathfrak{p}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ называется *вакуумным вектором*, если он является собственным вектором образующих $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$ и аннулируется оператором уничтожения $\hat{A}_-$, т.е.

$$\hat{A}_k \mathfrak{p}_0 = a_k \mathfrak{p}_0 (k = 1,2,3), \hat{A}_- \mathfrak{p}_0 = 0. \tag{3.9}$$

Решая уравнения (3.9), получим, что собственные значения a_k имеют вид $a_k = \hbar(2N_k + 1)$, где для целых неотрицательных чисел $N_k (k = 1,2,3)$ и соответствующих вакуумных векторов $\mathfrak{p}_0$ возможныследующие четыре варианта:

$$(1) N_2 = 0, N_1, N_3 \in \mathbb{Z}_+;\ \mathfrak{p}_0 = const(x - iy)^{N_1}\mathcal{H}_{N_3}\left(\frac{z}{\sqrt{\hbar}}\right)e^{-\frac{x^2+y^2+2z^2}{4\hbar}};$$

$$(2) N_2 = 1, N_1, N_3 \in \mathbb{Z}_+;\ \mathfrak{p}_0 = const(x + iy)(x - iy)^{N_1}\mathcal{H}_{N_3}\left(\frac{z}{\sqrt{\hbar}}\right)e^{-\frac{x^2+y^2+2z^2}{4\hbar}};$$

$$(3) N_2 = 2, N_1, N_3 \in \mathbb{Z}_+;\ \mathfrak{p}_0 = const(x + iy)^2(x - iy)^{N_1}\mathcal{H}_{N_3}\left(\frac{z}{\sqrt{\hbar}}\right)e^{-\frac{x^2+y^2+2z^2}{4\hbar}};$$

$$(4) N_1 = 0, N_2, N_3 \in \mathbb{Z}_+;\ \mathfrak{p}_0 = const(x + iy)^{N_2}\mathcal{H}_{N_3}\left(\frac{z}{\sqrt{\hbar}}\right)e^{-\frac{x^2+y^2+2z^2}{4\hbar}}.$$

(3.10)

Здесь $\mathcal{H}_{N_k}$ – полиномы Эрмита [24, т. 2].

Отметим, что спектр главной части гамильтониана ловушки $\widehat{H}_0 = \frac{1}{4}\widehat{V}_0$ задается формулой

$$\frac{1}{2}(3N_1 - N_2 + 1) + \sqrt{3/2}\left(N_3 + \frac{1}{2}\right).$$

Эти числа имеют вид $s + \sqrt{3/2}\,l$, где s – целые или полуцелые, а l – полуцелые числа, $l \geq \frac{1}{2}$. Значениям $s \leq \frac{1}{2}$ соответствует случай (4) из списка (3.10); значениям $s \geq 1$ – один из случаев (1)-(3) списка (3.10). Таким образом, для каждого собственного значения гамильтониана $\widehat{H}_0$ (или элемента Казимира $\widehat{V}_0$) мы имеем единственную возможность выбора квантовых чисел N_1, N_2, N_3, удовлетворяющих одному из условий (1)-(4), и, следовательно, единственную возможность выбора вакуумного вектора $\mathfrak{p}_0$.

Каждое представление алгебры (3.2) с вакуумным вектором естественным образом порождает систему $\{e_n\}$ в (3.8), а именно – систему собственных векторов операторов $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$ с $e_0 = \mathfrak{p}_0$. Эта система может быть использована для построения когерентного преобразования (т.е. сплетающего оператора) и представления алгебры симметрий в пространстве $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{s(a)}$.

Согласно результатам, полученным в [21], существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{R}$ и множеством неприводимых эрмитовых представлений алгебры (3.2) с вакуумным вектором (3.9). Для каждого $a \in \mathcal{R}$ и каждого разложения на множители (3.7) операторы

$$\mathring{A}_+ = \overline{w}\mathcal{F}_a^+\left(\overline{w}\frac{d}{d\overline{w}}\right), \mathring{A}_- = \mathcal{F}_a^-\left(\overline{w}\frac{d}{d\overline{w}}\right)\frac{d}{d\overline{w}}, \mathring{A} = \mathcal{A}_a\left(\overline{w}\frac{d}{d\overline{w}}\right), \quad (3.11)$$

где $\mathcal{A}_a(n) = \varphi^n(a)$, задают представление алгебры (3.2), причем это представление является неприводимым, эрмитовым и обладает вакуумным вектором $\mathbf{1}$ в пространстве $\mathcal{P}_{s(a)}$. Представления (3.11), соответствующие различным вакуумным векторам, не эквивалентны. Но для каждого $a \in \mathcal{R}$ представления, заданные различными разложениями на множители (3.7), эквивалентны.

В нашем случае неприводимое представление (3.11) задается формулами

$$\begin{gathered}\mathring{A}_+ = 24\hbar^2\overline{w}\left(\overline{w}\frac{d}{d\overline{w}} - \kappa_2 - i\kappa_3\right)\left(\overline{w}\frac{d}{d\overline{w}} - \kappa_2 + i\kappa_3\right),\\ \mathring{A}_- = 18\hbar^2\left(\overline{w}\frac{d}{d\overline{w}} - \kappa_1\right)\frac{d}{d\overline{w}},\\ \mathring{A}_1 = a_1 + 2\hbar\overline{w}\frac{d}{d\overline{w}}, \mathring{A}_2 = a_2 + 6\hbar\overline{w}\frac{d}{d\overline{w}}, \mathring{A}_3 = a_3.\end{gathered} \quad (3.12)$$

Абстрактное эрмитово представление алгебры (3.2) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с вакуумным вектором $\mathfrak{p}_0$ может быть сплетено с представлением (3.11) с помощью когерентных состояний $\mathfrak{p}_w$ (3.8), которые выражаются через вакуумный вектор следующим образом:

$$\mathfrak{p}_w = \mathfrak{p}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\overline{\mathcal{F}_a^-}(n-1)\ldots\overline{\mathcal{F}_a^-}(0)} \left(w\hat{A}_+\right)^n \mathfrak{p}_0.$$

В нашем случае мы имеем

$$\mathfrak{p}_w = {}_0F_1\left(-\kappa_1; \frac{w\hat{A}_+}{18\hbar^2}\right)\mathfrak{p}_0, \tag{3.13}$$

где ${}_0F_1$ –гипергеометрическая функция [24, т. 1].

4. Воспроизводящая мера

Рассмотрим представления алгебры симметрий (3.2), соответствующие точкам спектра$s + \sqrt{3/2}\, l$ оператора Казимира $\widehat{H}_0 = \frac{1}{4}\widehat{V}_0$, т.е. представления с вакуумным вектором (3.10), и определим для них в зависимости от значений N_1, N_2 в (3.10) либо функцию

$$l(r) = -\frac{4}{3}\frac{(\alpha-1)(\beta-1)\hbar}{(\gamma-1)}\ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{4}{3}r\right)$$
$$+\frac{4}{3}\frac{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(2-\alpha)\Gamma(2-\beta)\hbar}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\left(\frac{4}{3}r\right)^{1-\gamma}\left(1-\frac{4}{3}r\right)^{\gamma-\alpha-\beta}\ {}_2F_1\left(1-\alpha,1-\beta;2-\gamma;\frac{4}{3}r\right), \tag{4.1}$$

где

$$\alpha = 1 - N_1, \beta = \frac{4}{3}, \gamma = \frac{5}{3} \text{для} N_1 \geq 1, N_2 = 0,$$
$$\alpha = 1 - N_1, \beta = \frac{2}{3}, \gamma = \frac{4}{3} \text{для} N_1 \geq 1, N_2 = 1,$$
$$\alpha = 1 - N_1, \beta = \frac{1}{3}, \gamma = \frac{2}{3} \text{для} N_1 \geq 1, N_2 = 2,$$
$$\alpha = 1 - \frac{1}{3}N_2, \beta = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}N_2, \gamma = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}N_2 \text{для} N_1 = 0, N_2 \geq 3,$$

либо функцию

$$l(r) = \frac{4}{3}\frac{\Gamma(3-\alpha-\beta)\hbar}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}\left(\frac{4}{3}r\right)^{1-\gamma}\left(1-\frac{4}{3}r\right)^{\gamma-\alpha-\beta}, \tag{4.2}$$

где

$$\alpha = 1, \beta = \frac{4}{3}, \gamma = \frac{5}{3} \text{для} N_1 = 0, N_2 = 0,$$
$$\alpha = 1, \beta = \frac{2}{3}, \gamma = \frac{4}{3} \text{для} N_1 = 0, N_2 = 1,$$
$$\alpha = 1, \beta = \frac{1}{3}, \gamma = \frac{2}{3} \text{для} N_1 = 0, N_2 = 2.$$

Здесь ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;\cdot)$ – гипергеометрическая функция; она аналитична на единичном диске [24, т. 1]. Функции (4.1) и (4.2) положительны при $0 < r < 3/4$ и удовлетворяют гипергеометрическому уравнению

$$r\left(1-\frac{4}{3}r\right)\frac{d^2 l(r)}{dr^2} + \left(\gamma - (\alpha+\beta+1)\frac{4}{3}r\right)\frac{dl(r)}{dr} - \frac{4}{3}\alpha\beta l(r) = 0$$

с соответствующими параметрами α, β, γ. Кроме того, для функции l справедливы следующие равенства:

$$\frac{1}{\hbar}\int_0^{3/4} r^n l(r)\, dr = s_n(a), 0 \leq n < \infty.$$

Поэтому, используя функцию l в качестве плотности меры, можно записать скалярное произведение в пространстве $\mathcal{P}_{s(a)}$ в интегральной форме

$$(g', g)_{\mathcal{P}_{s(a)}} = \frac{1}{2\pi\hbar}\iint_{|w|\leq\sqrt{3}/2} g'(\overline{w})\overline{g(\overline{w})}\, l(|w|^2)\, dw\, d\overline{w}. \tag{4.3}$$

Тогда когерентное преобразование $\mathcal{J}$ также может быть записано в интегральной форме

$$\mathcal{J}(g) = \frac{1}{2\pi\hbar}\iint_{|w|\leq\sqrt{3}/2} g(\overline{w})\mathfrak{p}_w l(|w|^2)\, dw\, d\overline{w}, \tag{4.4}$$

где $\mathfrak{p}_w$ – когерентные состояния (3.13). Преобразование (4.4) унитарно и переводит единичную функцию $\mathbf{1}$ в вакуумный вектор $\mathfrak{p}_0$.

Когерентное преобразование (4.4) сплетает неприводимое представление (3.12) с исходным представлением (3.1) алгебры симметрий (3.2) в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$, т.е. выполнены тождества:

$$\hat{A}_j \mathcal{J}(g) = \mathcal{J}(\mathring{A}_j(g)), j \in \{+,-,1,2,3\}, \tag{4.5}$$

где $\hat{A}_j$ – это исходные генераторы (3.1) алгебры симметрий (3.2), а $\mathring{A}_j$ – это генераторы неприводимого представления (3.12).

5. Усредненный гамильтониан на алгебре симметрий.

Теперь вернемся к операторам (2.2), коммутирующим с $\widehat{H}_0$. Все они могут быть выражены через образующие алгебры симметрий. Тогда получим, что исходный гамильтониан $\widehat{H}$ унитарно эквивалентен с точностью до $O(\varepsilon^4)$ некоторому гамильтониану на нелиевской алгебре (3.2). Вычисления приводят к следующему результату:

$$\widehat{H} \sim \widehat{H}_0 + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\underline{\hat{V}_2} + a\underline{\hat{V}_3} + \underline{\hat{V}_5}\right) + O(\varepsilon^4), \tag{5.1}$$

где главная часть усредненного гамильтониана имеет вид

$$\widehat{H}_0 = \frac{1}{4}\left(3\hat{A}_1 - \hat{A}_2 + \sqrt{6}\hat{A}_3\right),$$

а возмущающая часть представляет собой квадратичную функцию от образующих алгебры симметрий:

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{V}_2} &= (n_1^2 + 6n_1n_3 + n_3^2 - n_2^2)\left(\frac{1}{8}\hat{A}_1^2 + \frac{1}{2}\hat{A}_1\hat{A}_2 + \frac{1}{8}\hat{A}_2^2 + \frac{1}{4}\hbar^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left((n_1^2 - n_3^2)\hat{A}_4 + (n_1n_2 + n_2n_3)\hat{A}_5\right), \\
\underline{\hat{V}_3} &= 3\hat{A}_1^2 + 12\hat{A}_1\hat{A}_2 + 3\hat{A}_2^2 - 4\sqrt{6}\left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right)\hat{A}_3 + 2\hat{A}_3^2 + 8\hbar^2, \\
\underline{\hat{V}_5} &= \frac{\sqrt{6}}{4}(3n_1^2 + 2n_1n_3 + 3n_3^2 + n_2^2)\left(\hat{A}_1^2 + 4\hat{A}_1\hat{A}_2 + \hat{A}_2^2 + 2\hbar^2\right) + \sqrt{6}\left((n_1n_2 + n_2n_3)\hat{A}_4 +\right. \\
&\left.(n_1^2 - n_3^2)\hat{A}_5\right) + \frac{\sqrt{6}}{5}\left(-(6n_1^2 + 8n_1n_3 + 6n_3^2 + n_2^2)\hat{A}_1 + (2n_1^2 - 24n_1n_3 + 2n_3^2 +\right. \\
&\left.7n_2^2)\hat{A}_2\right)\hat{A}_3 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{15}(9n_1^2 + 22n_1n_3 + 9n_3^2 - n_2^2)\hat{A}_1^2 + \frac{4}{15}(17n_1^2 + 46n_1n_3 + 17n_3^2 -\right. \\
&3n_2^2)\hat{A}_1\hat{A}_2 + \frac{1}{3}(5n_1^2 - 2n_1n_3 + 5n_3^2 + 3n_2^2)\hat{A}_2^2 + \left.\frac{4}{5}(9n_1^2 + 2n_1n_3 + 9n_3^2 + 4n_2^2)\hbar^2\right) + \\
&3\left((n_1^2 - n_3^2)\hat{A}_4 + (n_1n_2 + n_2n_3)\hat{A}_5\right).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Теперь используем когерентное преобразование, чтобы записать гамильтониан (5.1), (5.2) в неприводимом представлении (3.12) алгебры симметрий. Тогда, в силу сплетающего свойства (4.4), все операторы $\hat{A}_j$ в (5.2) заменятся операторами $\mathring{A}_j$ (3.2). В результате, в члене порядка ε^2, получим оператор вида

$$(\alpha_1\bar{w}^3 + \alpha_2\bar{w}^2 + \alpha_3\bar{w})\frac{d^2}{d\bar{w}^2} + (\beta_1\bar{w}^2 + \beta_2\bar{w} + \beta_3)\frac{d}{d\bar{w}} + \gamma_1\bar{w} + \gamma_2, \tag{5.3}$$

где коэффициенты $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ могут быть выражены явно через коэффициенты в (5.2).

6. Интегральные представления собственных функций через когерентные состояния алгебры симметрий.

Обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка (5.3), действующий по переменной $\bar{w}$, является оператором типа Хейна из [25]. Он самосопряжен в пространстве со скалярным произведением (4.3). Его собственные значения определяют поправки порядка ε^2 к главной части $\frac{\hbar}{4}\Big(3(2N_1+1)-(2N_2+1)+\sqrt{6}(2N_3+1)\Big)$ спектра исходного гамильтониана $\hat{H}$ резонансной ловушки Пеннинга-Йоффе.

Точнее, обозначим собственные значения и собственные функции оператора (5.3) в пространстве $\mathcal{P}_{s(a)}$ через $\lambda_{N_1,N_2,N_3,k}$,$g_{N_1,N_2,N_3,k} = g_{N_1,N_2,N_3,k}(\overline{w})$ соответственно. Здесь $k = 0, 1, 2, \cdots$ – новые «квантовые числа», нумерующие собственные значения. Тогда векторы $\mathcal{J}(g_{N_1,N_2,N_3,k})$ будут собственными векторами усредненного гамильтониана $\hat{H}_0 + \frac{\varepsilon^2}{2}\Big(\underline{\hat{V}_2} + a\underline{\hat{V}_3} + \underline{\hat{V}_5}\Big) + O(\varepsilon^4)$.

Чтобы восстановить собственные функции исходного гамильтониана $\hat{H}_0 + \hat{H}_1$, мы теперь должны применить к собственным функциям усредненного гамильтониана унитарный оператор $T(\varepsilon)$, преобразующий $\hat{H}_0 + \hat{H}_1$ к виду (5.1).

Теорема 6.1.

Пусть частоты ω и ω_0 удовлетворяют условиям резонанса: $\omega^2 = 4$, $\omega_0^2 = 3/2$. Тогда собственные функции гамильтониана $\hat{H}_0 + \hat{H}_1$ ловушки Пеннинга задаются, с точностью до $O(\varepsilon)$, интегральной формулой

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\iint_{|w|\le\sqrt{3}/2} g_{N_1,N_2,N_3,k}(\overline{w})\, T(\varepsilon)\, \mathfrak{p}_w l(|w|^2)\, dw\, d\overline{w},$$

Где $g_{N_1,N_2,N_3,k}$ – собственные функции обыкновенного дифференциального оператора второго порядка (5.3), $\mathfrak{p}_w$ – когерентные состояния (3.13), $T(\varepsilon)$ – усредняющее преобразование, l – плотность меры (4.1) или (4.2) (в зависимости от значений N_1, N_2).

Соответствующие собственные значения, с точностью до $O(\varepsilon^4)$,имеют вид

$$\frac{\hbar}{4}\Big(3(2N_1+1)-(2N_2+1)+\sqrt{6}(2N_3+1)\Big)+\varepsilon^2\lambda_{N_1,N_2,N_3,k},$$

где $\lambda_{N_1,N_2,N_3,k}$ – собственные значения оператора (5.3).

Замечание 6.1.

В квазиклассическом приближении (когда квантовые числа $N_j \sim 1/\hbar$ принимают большие значения при $\hbar \to 0$) асимптотика спектра оператора (3.4) вычисляется как в [11, часть 3] в геометрических терминах с использованием условия квантования типа Планка-Бора-Зоммерфельда для уровней энергии символа оператора $\underline{\hat{V}_2} + a\underline{\hat{V}_3} + \underline{\hat{V}_5}$ на квантовом симплектическом листе, соответствующем неприводимому представлению алгебры симметрий.

Литература

1. *Brown L.S., Gabrielse G.* Precision Spectroscopy of a Charged Particle in an Imperfect Penning Trap // Phys. Rev. A, 1982. **25**(24), 2423-2425.
2. *Gabrielse G.* Relaxation Calculation of the Electrostatic Properties of Compensated Penning Traps with Hyperbolic Electrodes // Phys. Rev. A, 1983, **27**(5), 2277-2290.
3. *Gabrielse G.*Detection, Damping, And Translating the Center of the Axial Oscillation of a Charged Particle in a Penning Trap with Hyperbolic Electrodes // Phys. Rev. A, 1984, **29**(2), 462-469.
4. *Kretzschmar M.* Single Particle Motion in a Penning Trap: Description in the Classical Canonical Formalism // Physica Scripta, 1992, **46**, 544-554.
5. *Segal D., Shapiro M.* Nanoscale Paul Trapping of a Single Electron // Nano Letters – 2006, **6**(8), 1622-1626.
6. *Massini M., Fortunato M., Mancini S., Tombesi P., Vitali D. Schrödinger-cat entangled state reconstruction in the Penning trap* // New Journal of Physics, 2000, **2**(1), 20, 14 pp.
7. *Pedersen L.H., Rangan C.* Controllability and Universal three-qubit quantum computation with trapped electron states // Quantum Information Processing, 2008, **7**(1), 0070, 5 pp.
8. *Goldman J., Gabrielse G.* Optimized planar Penning traps for quantum information studies // Hyperfine Interact., 2011, **199**, 279-289.

9. *Dhar S., Brandt O., Ramsteiner M., Sapega V.F., and Ploog K.H.*, Colossalmagnetic moment of Gdin GaN//Phys. Rev. Lett., 2005,**94**, 037205.
10. *Karasev M.V.* Birkhoff Resonances and Quantum Ray Method // Proc. Intern. Seminar “Days of Diffraction” 2004-St. Petersburg: St. Petersburg University and Steklov Math. Institute, 2004, 114-126.
11. *Karasev M.V.* Noncommutative Algebras, Nano-Structures, and Quantum Dynamics Generated by Resonances, I // Quantum Algebras and Poisson Geometry in Mathematical Physics / Ed. by Karasev M., Amer. Math. Soc., Providence, 2005, Transl.Ser.2, **216**, 1-18;arXiv: math.QA/0412542.
12. *Karasev M.V.* Noncommutative Algebras, Nano-Structures, and Quantum Dynamics Generated by Resonances, II // Adv. Stud. Contemp. Math., 2005, **11**, 33-56.
13. *Karasev M.V.* Noncommutative Algebras, Nano-Structures, and Quantum Dynamics Generated by Resonances, III // ISSN1061-9208, Russian Journal of Mathematical Physics,2006, **13**(2), 131-150.
14. *BlaumK. and Herfurth F.* (eds.) Trapped Charged Particles and Fundamental Interactions //Springer-Verlag, 2008.
15. *Ghosh P.K.* Ion Traps // Callendon Press, Oxford, 1995.
16. *Major F.G., Gheorghe V., and Werth G*. Charged Particle Traps // Springer, 2002.
17. *Squires T.M., Yesley P., Gabrielse G.* Stability of a Charged Particle in a Combained Penning-Ioffe Trap // Physical Review Letters, 2001, **86**(23), 5266-5269.
18. *Hezel B., Lesanovsky I., Schmelcher P.* Ultracold Rydberg Atoms in a Ioffe-Pritchard Trap // Physical Review A, 2007, **76**, 053417;arXiv: 0705.1299 v2.
19. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы // МГУ, Москва, 1965,554 стр.
20. *Бабич В.М.,Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн //Наука, Москва, 1972, 456 стр.
21. *Blagodyreva O., Karasev M., and Novikova E.* Cubic Algebra and Averaged Hamiltonian for the Resonance 3:(-1) Penning-Ioffe Traps // Russ. J. Math. Phys., 2012, **19**(4), 441-450.
22. *Карасев М.В., Новикова Е.М.* Алгебра и квантовая геометрия многочастотного резонанса // Известия РАН, серия математическая, 2010, **74**(6), 55-106.
23. *Karasev M., Novikova E.* Non-Lie Permutation Relations, Coherent States, and Quantum Embedding // Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry// Ed. by Karasev M., Amer. Math. Soc. Transl., AMS, Providence, RI, 1998, **187**, 1-202.
24. *Karasev M.*, Quantum Surfaces, Special Functions, and the Tunneling Effect // Lett. Math.Phys., 2001, **59**, 229-269.
25. *Карасев М.В., Маслов В.П.* Асимптотическое и геометрическое квантование //УМН, 1984, **39**(6), 115-173.
26. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции // М.: Наука, 1965. – Т.1, 2 – 296 с.
27. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям // Наука, Москва, 1965, 704 стр.

INTEGRAL REPRESENTATION OF EIGENSTATES FOR 3:(-1) RESONANCE PENNING NANOTRAP

O. Blagodyreva, M. Karasev, E. Novikova

Moscow institute for electronics and mathematics,
Laboratory for mathematical methods in nature scinces,
National Research University "Higher School of Economics"

Karasev.Mikhail@gmail.com, emnovikova@hse.ru

Received 15.09.2013

We discuss physical parameters of quantum Penning nanotraps. In the case of 3:(-1) resonance between transverse frequencies of the trap we describe the reproducing measure on symplectic leaves corresponding to irreducible representations of non-Lie symmetry algebra with qubic commutation relations. Nonhomogeneity of the magnetic field and anharmonicity of the electric potential of the trap, after double averaging, generate an effective Hamiltonian which becomes a second order ordinary differential operator in the irreducible representation. We obtain an integral formula for asymptotical eigenstates of the perturbed 3:(-1) resonance Penning trap via the eigenfunctions of this operator, as well via the coherent states and the reproducing measure.