

# ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ МОДЫ В ОПТИКЕ ФОТОННЫХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

В.А. Беляков

*Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау*

bel1937@mail.ru

Поступила 10.04.2014

Рассмотрены оптические свойства фотонных кристаллов со специальным акцентом на роль локализованных оптических мод. Поэтому значительное внимание уделено изложению свойств локализованных оптических мод в фотонных структурах конечных размеров и их необычным проявлениям в оптике фотонных кристаллов, в частности в лазерах с распределенной обратной связью (РОС лазерах) на фотонных структурах. Для конкретности изложение материала выполнено на примере аналитической теории оптики периодических спиральных сред, являющихся интересным представителем фотонных кристаллов, а именно, на примере хиральных жидких кристаллов, оказавшихся в настоящее время популярным объектом для исследований по линейной и нелинейной оптике фотонных кристаллов.

УДК 533.9

## **Введение**

В последние несколько десятилетий в научных статьях появился термин «**фотонные кристаллы**», а работы по соответствующей тематике составили новое актуальное направление в современной оптике. Опубликованы книги о фотонных кристаллах [1-3], между тем существенные и важные достижения, полученные, в упомянутом направлении в области аналитического описания оптики фотонных кристаллов, совершенно не нашли своего достаточного отражения в литературе. Цель настоящей статьи – хотя бы частично восполнить названный пробел.

Начнем с разъяснения термина «фотонные кристаллы». Под этим термином принято понимать периодические среды, величина периода которых находится в области длин волн видимого света, так что явления дифракции, хорошо известные в обычных кристаллах для рентгеновского излучения, в фотонных кристаллах существуют в оптическом диапазоне длин волн (см рис. 1, на котором приведены схематические примеры одномерных (1D), двумерных (2D) и трехмерных (3D) фотонных кристаллов). При этом проявляются интересные и полезные для приложений оптические эффекты. Так, например, порог лазерной генерации может быть существенно ниже, чем в соответствующих однородных средах [1], реализуется повышение эффективности нелинейно-оптических явлений [3] и т.д. Конкретными примерами 1D фотонных кристаллов могут служить слоистые, модулированные и спиральные среды с периодом в оптическом диапазоне длин волн. Примером естественных 3D фотонных кристаллов являются опалы, известные как полудрагоценные камни, и жидкокристаллические, так называемые, голубые фазы [4, 5], а также существуют искусственно созданные фотонные структуры, в том числе двумерные. При всем своем разнообразии названные среды обладают качественно подобными оптическими свойствами. Поэтому их изучение естественно начать на примере среды, допускающей наиболее простое описание оптических свойств. Такими средами являются одномерные спиральные среды (локально одноосные среды, оптическая ось в которых вращается вокруг некоторой оси с перемещением вдоль этой оси). Соответствующую ось принято называть осью спирали, а величину периода **шагом спирали**.

Ниже будет рассматриваться оптические свойства фотонных кристаллов именно на примере одномерной спиральной среды, а для конкретности в качестве такой среды будет рассматриваться **холестерический жидкий кристалл** или, как говорят, холестерик (ХЖК) [4–6]. Там, где это окажется необходимым, будут даны комментарии, как соотносятся оптические свойства других фотонных кристаллов с оптическими свойствами ХЖК. Здесь же следует упомянуть, что необычные оптические свойства ХЖК оказываются связанными с эффектами, имеющими общезначение.

Сведения по оптике ХЖК содержатся в [5, 6], однако для удобства читателя они будут также частично воспроизведены и здесь. ХЖК представляют собой анизотропную жидкость, состоящую из удлиненных молекул, между ориентацией длинных осей которых в различных точках вдоль спиральной оси имеется корреляция (в случае ХЖК эта ось называется также **холестерической осью**, см. рис. 2). Для характеристики ориентационного порядка в ХЖК вводится вектор единичной длины **n**, называемый **директором**, направление которого совпадает с направлением усредненной ориентации длинных осей молекул в каждой пространственной точке. Таким образом, поле директор **n**, задает выделенное, преимущественное направление молекул в каждой точке ХЖК. Кроме того, вводится еще одна величина, **параметр порядка**, **S** [4], который характеризует степень ориентационного порядка молекул в каждой точке (ориентация каждой молекулы испытывает тепловые флуктуации). Параметр порядка определяется следующим образом:

$$S = (3/2) \langle (\cos^2 \theta - 1/3) \rangle \quad (1)$$

где  $\theta$  – угол между направлением директора в рассматриваемой точке и мгновенным значением направления длинной оси молекул, а угловые скобки в (1) означают усреднение по времени. Из формулы (1) ясно, что параметр порядка **S** может принимать значения от 0 до 1. Значение  $S=1$  соответствует полной ориентационной упорядоченности молекул,  $S=0$  означает полный ориентационный беспорядок и соответствует ХЖК, перешедшему в изотропную жидкость. В холестерической же фазе (ХЖК)

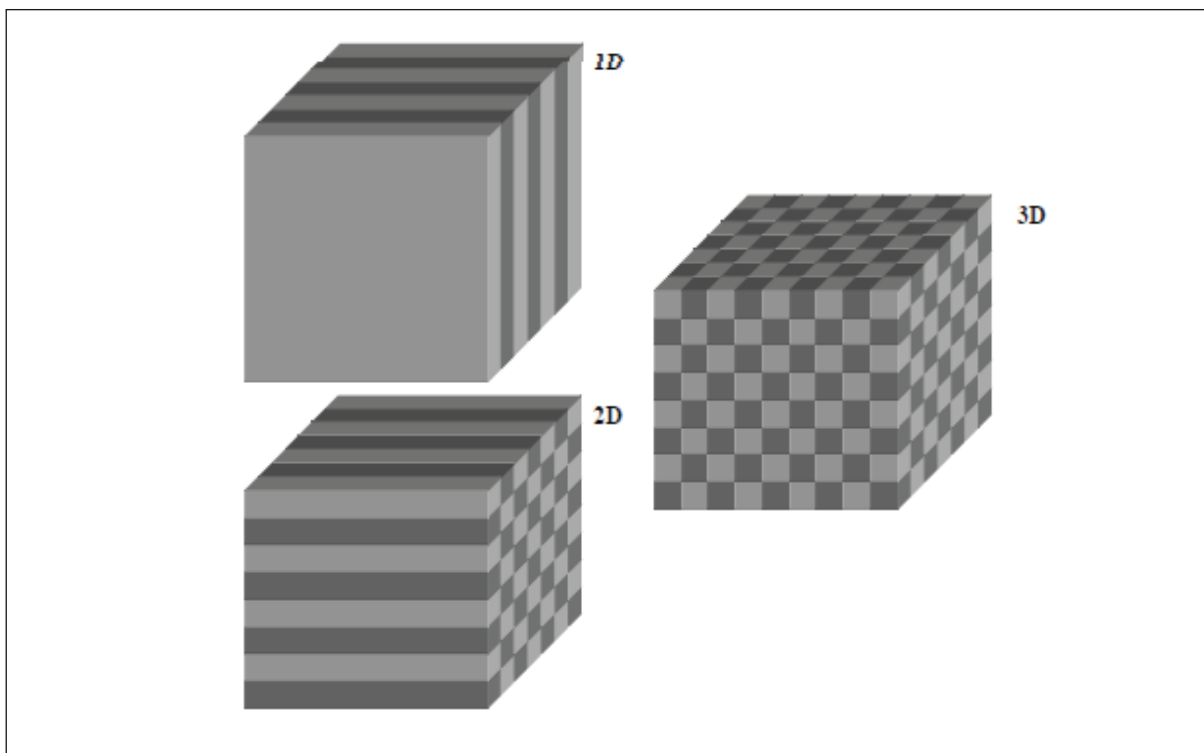


Рис. 1

значение параметр порядка  $1 > S > 0$ , минимально непосредственно при температуре перехода  $T_C$  из изотропной жидкости в холестерическую фазу и возрастает по мере понижении температуры ниже  $T_C$ .

ХЖК существуют в конечном температурном интервале, который лежит внутри температурного интервала, соответствующего плавлению обычного кристалла в анизотропную жидкость и перехода анизотропной жидкости в обычную изотропную жидкость. Выше говорилось об однодоменном образце ХЖК (если не приняты специальные меры, то образце ХЖК оказывается полидоменным, т.е. разбитым на множество однодоменных областей малого размера). Далее будут обсуждаться свойства только однодоменных ХЖК.

### 1. Однодоменный ХЖК

Локально ХЖК имеет свойства одноосного кристалла. Это означает, что в малом объеме усредненное упорядочение молекул в ХЖК такое, что приводит к оптическим свойствам обычного одноосного кристалла, а поэтому локально его можно также охарактеризовать директором  $\mathbf{n}$  и параметр порядка  $S$ . Отличия ХЖК от обычного одноосного кристалла проявляются в больших по сравнению с молекулярными масштабах. Эти отличия связаны с тем, что в нем молекулы образуют так называемую **холестерическую спираль**. А именно, направление директора не остается неизменным в его объеме (даже для однодоменного образца!). Существует такое направление, называемое **холестерической осью**, вдоль которого регулярным образом меняется ориентация директора. Директор перпендикулярен этой оси и равномерно вращается вокруг нее с изменением координаты вдоль этой оси. Это означает, что угол поворота директора  $j$  линейно зависит от координаты  $z$  вдоль холестерической оси и может быть представлен в виде  $j = 2\pi z/p$ . Расстояние  $p$  вдоль холестерической оси, на котором директор (средняя ориентация молекул) поворачивается на  $360^\circ$ , носит название **шага холестерической спирали**.

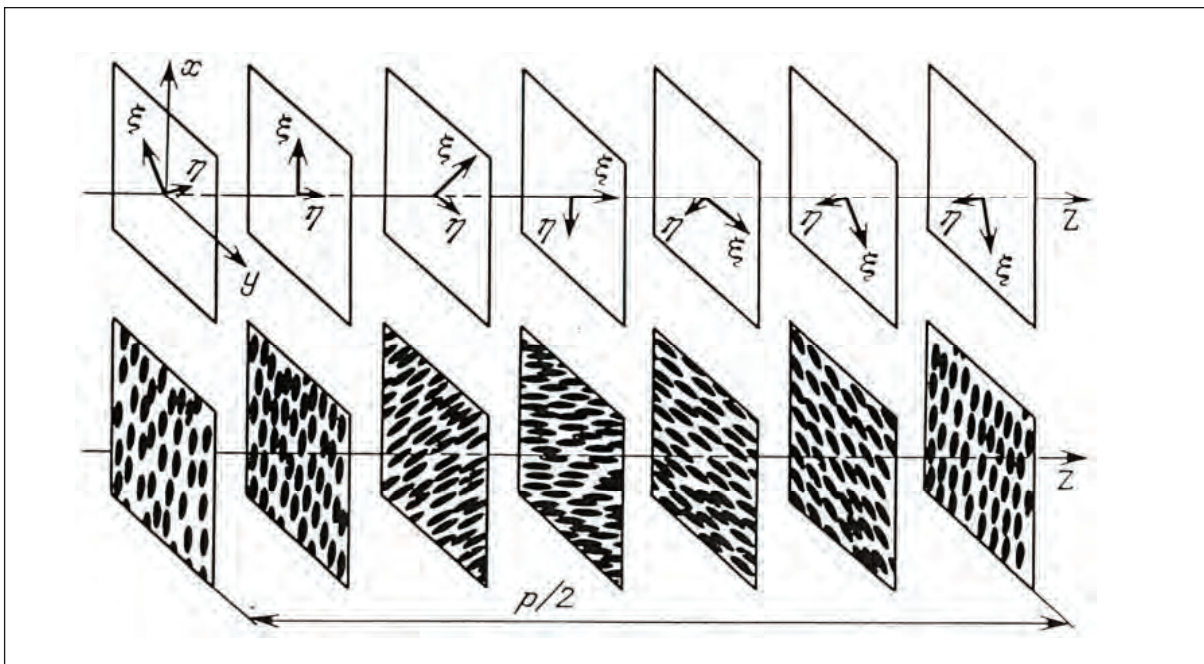


Рис. 2

Если провести воображаемые плоскости, перпендикулярные холестерической оси, то для каждой плоскости во всех ее точках направление директора оказывается одинаковым и фиксированным во времени, однако изменяющимся от плоскости к плоскости, что изображено на рис. 2, где также показано, как изменяется ориентация главных осей тензора диэлектрической проницаемости вдоль холестерической оси.

Холестерики устроены более «деликатно», чем многие известные разновидности жидких кристаллов. Об этом, в частности, говорит поведение холестерической спирали при изменении температуры в области существования ХЖК. При повышении температуры холестерическая спираль закручивается, т.е. ее шаг  $p$  уменьшается с ростом температуры. Таким образом, как правило, шаг  $p$  холестерической спирали оказывается минимальным на верхней температурной границе существования холестерика и максимальным вблизи температуры перехода в кристаллическую фазу. Так как типичные значения шага холестерической спирали оказываются порядка длин волн видимого света, то для этой разновидности фотонных кристаллов температурные изменения шага проявляются в сильной температурной зависимости оптических свойств ХЖК, поскольку последние, как мы увидим, самым существенным образом зависят от шага спирали [4-6].

Для получения однодоменного ХЖК образца, или, как говорят монокристалла, необходимо принять специальные меры. Для этого необходимо использовать влияние факторов, стабилизирующих структуру ХЖК. Такими факторами могут быть либо **поверхностные силы сцепления**, задающие определенную ориентацию молекул на поверхностях, ограничивающих ХЖК, которая, в свою очередь, индуцирует за счет межмолекулярного взаимодействия соответствующую ориентацию молекул во всем объеме, либо внешние поля (как правило, электрические), ориентирующие молекулы однородным образом сразу во всем объеме. Последнее время для этих целей также используется **фото-ориентация**, т.е. ориентация молекул ХЖК на поверхности линейно поляризованным светом. Далее мы будем говорить о, так называемой, «**планарной холестерической текстуре**», т.е. совершенном слое ХЖК, в котором холестерическая ось направлена перпендикулярно поверхностям слоя.

Исторически первый (не утративший своего значения и в настоящее время) способ получения однодоменных ХЖК-образцов состоит в специальной механической обработке поверхностей, ограничивающих ХЖК. Поскольку ясно, что ориентирующее влияние поверхности на молекулы тем сильнее, чем менее молекулы удалены от поверхности, то следует заранее ожидать, что однородной ориентации молекул ХЖК легче всего добиться в тонких слоях. Практика показывает, что полной однородности структуры можно добиться, поместив ХЖК между пластинами, зазор между которыми не более 10–100 микрон. Пластины, ограничивающие ХЖК, как правило, изготавливают из прозрачных материалов: стекла, полимеров, токопроводящего прозрачного соединения окиси олова ( $\text{SnO}_2$ ) и т.д. Обработка поверхностей пластин в простейшем случае состоит в их **направленной полировке**. Иногда оказывается достаточным, например, просто натереть поверхность в одном направлении кусочком бумаги или шерстяной ткани. Применяется также направленное, **косое напыление на поверхность молекулярных слоев или нанесение молекул специальных веществ, ориентантов**.

### 1.1. О традиционной оптике холестериков

Вся специфика оптических свойств холестериков связана с их структурой, а именно со спиральным упорядочением молекул в них. Разберемся, почему и как эта спиральная структура оказывает решающее влияние на оптические свойства холестерика. Удобно воспользоваться тем, что локально, т.е. в малом объеме оптические характеристики ХЖК аналогичны оптическим характеристикам одноосного кристалла. А это значит, что направление упорядочения молекул для каждого значения координаты  $z$  (см. рис. 2) характеризуется директором  $\mathbf{n}$ , а диэлектрические свойства анизотропны, т.е. локальные главные значения тензора диэлектрической проницаемости различны ( $D\epsilon = \epsilon - \epsilon_{\perp} \neq 0$ ). Только в отличие от одноосного кристалла в ХЖК директор  $\mathbf{n}$ , т.е. направление оптической оси, изменяется в пространстве, и ХЖК можно представить себе как «закрученный одноосный кристалл». Ориентация директора между обкладками в ХЖК меняется, как правило, на толщине ХЖК на сотни оборотов. Диэлектрические свойства холестерика периодичны по  $z$  (вдоль холестерической оси) с периодом  $p/2$ . В холестерике периодом диэлектрических свойств служит не шаг спирали  $p$ , на котором директор совершает оборот на угол  $2\pi$ , а  $p/2$ , так как ориентации директора  $\mathbf{n}$  и  $-\mathbf{n}$  эквивалентны и период диэлектрических свойств холестерика оказывается вдвое меньше, чем расстояние, на котором директор совершает полный оборот. Поскольку, как уже говорилось, величина шага спирали находится в диапазоне длин волн видимого света, то свет может испытывать дифракцию на периодической структуре холестерика. Условия дифракции аналогичны хорошо известным условиям дифракции рентгеновских лучей и описываются **соотношением Вульфа-Брегга**

$$2s\sin\theta = s\lambda/d, \quad (2)$$

где  $s$  – целое число,  $2\theta$  – угол рассеяния пучка,  $\lambda$  – длина волны,  $d$  – период структуры.

Это соотношение определяет направление (угол  $\theta$ ), распротраняясь в которое свет с длиной волны  $\lambda$  испытывает дифракцию на структуре с периодом  $d$ . Для холестерика –  $d=p/2$ . При выполнении условия (2) падающий на холестерик пучок света генерирует дифракционно отраженный пучок. Если падающий на холестерик свет монохроматичен, то его дифракционное отражение происходит согласно соотношению (2) только при определенных дискретных углах  $\theta$ . Если же падающий свет белый, т.е. немонахроматичный, то при произвольном угле падения есть дифракционное отражение, однако отражается свет определенной, зависящей от угла  $\theta$ , длины волны. В оптических ячейках, как правило, используется дифракционное отражение при  $\theta = \pi/2$  (как говорят,

при нормальном падении света на слой ХЖК), что соответствует распространению дифрагировавшего света в направлении, противоположном падающему.

Теперь легко понять, что при освещении холестерика белым светом цвет дифракционно отраженного света будет изменяться при изменении шага спирали  $p$ . А именно цвет отраженного света воспринимается нами как окраска холестерика. Если вспомнить теперь, что шаг холестерика изменяется в зависимости от его температуры, то становится понятным, что от температуры холестерика должна зависеть (и действительно зависит) его окраска.

## 1.2. Дифракция и оптика холестериков

Пока что речь шла о сравнительно грубых оптических эффектах в холестериках, объяснение которых не встречало больших затруднений. Однако существуют и более тонкие оптические эффекты, для объяснения которых требуется более детальное изучение особенностей взаимодействия света с холестериками. К их числу, в частности, относится зависимость от длины волны света направления **вращения плоскости поляризации** линейно поляризованного света и величины **удельного вращения плоскости поляризации** в ХЖК. Следует сказать, что этот эффект наблюдается во всех спиральных средах. Другое необычное свойство холестериков состоит в **селективном отражении света** определенной круговой поляризации. Так, если на планарный холестерический слой перпендикулярно его поверхности падает луч света, то свет одной круговой поляризации, вне зависимости от его длины волны, проходит через этот слой, не ослабляясь, а свет другой круговой поляризации испытывает сильное отражение, когда его длина волны близка к шагу холестерической спирали  $p$ . Причем отражение испытывает свет той круговой поляризации (правой или левой) которая совпадает с хиральностью холестерической спирали (правая, левая), т.е. отражается правая круговая поляризация, если холестерическая спираль правая и левая – если спираль левая. Перечисленные явления, подобно зависимости окраски холестерика от шага спирали, объясняются дифракцией света на периодической структуре холестерика. Однако для их объяснения недостаточно использовать только соотношение Вульфа-Брегга (2), а требуется привлечение более сложной теории [4-6].

Следует сказать еще об одном свойстве холестерика, которое не находит своего объяснения в простейшем теоретическом описании дифракции, т.е. с помощью соотношения Вульфа-Брегга (2). Речь идет о том, что, согласно формуле (2), дифракция света фиксированной длины волны  $\lambda$  имеет место при строго определенном угле  $\theta_B$ . Опыт же показывает, что при фиксированной длине волны дифракция света в холестерике происходит в некотором интервале углов  $\Delta\theta$  в окрестности угла  $\theta_B$ , определяемого формулой (2). И наоборот, при фиксированном угле  $\theta$  дифракция света происходит в интервале длин волн  $\Delta\lambda$  в окрестности брегговской длины волны  $\lambda_B$ .

Этот интервал длин волн  $\Delta\lambda$  (или углов  $\Delta\theta$ ) в холестерике принято называть **областью селективного отражения (ОСО)**. Строгое теоретическое рассмотрение [5, 6] (см. ниже) показывает, что величина области селективного отражения определяется **анизотропией локальной диэлектрической проницаемости** холестерика  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$ . Например при нормальном падении света изменение длин волн  $\Delta\lambda$  в пределах ОСО определяется соотношением  $\Delta\lambda / \lambda_B = 1/(1-\delta)^{1/2} - 1/(1+\delta)^{1/2}$ , где **параметр анизотропии**  $\delta = \Delta\varepsilon / (\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp})$  и  $\lambda_B = p$ .

Свет круговой поляризации, знак которой совпадает со знаком спирали, испытывает дифракцию в холестерике и отражается от него, а свет противоположной круговой поляризации дифракции не испытывает и проходит через холестерик, не ослабляясь.

Попробуем понять наблюдаемую частотную зависимость направления вращения плоскости поляризации и инверсию ее знака вращения, а также частотную зависимость

величины вращательной способности холестерика. Наблюдаемая зависимость находит естественное объяснение, если разложить амплитуду световой волны на входной поверхности холестерика по так называемым **собственным волнам**, а потом с учетом различия фазовых скоростей собственных волн найти поле световой волны на выходной поверхности холестерика. В холестерике собственные волны обладают круговыми поляризациями. В холестерике вращение плоскости поляризации света происходит при любой ориентации плоскости поляризации линейно поляризованного падающего света и описывается следующей формулой:

$$j = (\omega/c)(n_L - n_R)L, \quad (3)$$

где  $n_L$  и  $n_R$  – показатели преломления лево и право поляризованной волны, соответственно.

Другая особенность вращения плоскости поляризации состоит в нелинейной зависимости угла поворота плоскости поляризации от толщины слоя и связана с тем, что в холестерике в области селективного рассеяния существуют две собственные волны с дифрагирующей круговой поляризацией. Эти волны обладают различными фазовыми скоростями. Это и приводит к тому, что величина и даже направление вращения плоскости поляризации в холестерике зависят от частоты света.

Дело в том, что при падении на холестерик света извне в нем возбуждаются обе собственные волны дифрагирующей круговой поляризации, обладающие различными скоростями распространения. Однако в зависимости от частоты света происходит изменение соотношения амплитуд возбуждаемых собственных волн так, что с одной стороны области селективного отражения возбуждается преимущественно волна, например, медленная, а с другой – другая собственная волна – быстрая. Если теперь учесть, что фазовая скорость недифрагирующей собственной волны с противоположной круговой поляризацией не зависит от частоты (в узком интервале частот вблизи области селективного отражения такой зависимостью можно пренебречь), то станет понятным, что знак разности  $n_L - n_R$  в формуле (3) оказывается различным по обе стороны от области селективного отражения, что и соответствует противоположным направлениям вращения плоскости поляризации. В некоторой же промежуточной точке, как предсказывает теория и подтверждает эксперимент, вращение отсутствует.

Еще одно удивительное свойство холестерика проявляется также в области селективного отражения (ОСО) и состоит в **аномальном поглощении света**. А именно, для определенной частоты света в холестерике может полностью исчезнуть поглощение света и слой холестерика, совершенно непрозрачный для света выше температуры перехода в изотропную фазу (жидкость), оказывается прозрачным для света в холестерической фазе [7]. Это свойство также связано с дифракцией света на холестерической спирали и объясняется тем, что поле электромагнитной волны в холестерике в условиях дифракции существенно отличается от плоской волны  $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$  (где  $\mathbf{k}$  – волновой вектор света), которая описывает распространение света вне дифракции. В условиях дифракции поле электромагнитной волны представляет собой суперпозицию двух плоских волн  $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r})]$  и  $\exp[i(\mathbf{k}_1\mathbf{r})]$ , где  $\mathbf{k}$  – волновой вектор первичной волны, а  $\mathbf{k}_1$  – волновой вектор дифрагировавшей волны.

Волна дифрагирующей поляризации в холестерике имеет пространственную структуру, подобную холестерической спирали. Если найти суммарное электрическое поле двух плоских волн, образующих дифрагирующую собственную волну, то окажется, что ориентация суммарного поля относительно директора зависит от частоты. Так на границе ОСО суммарное электрическое поле в любой точке направлено вдоль директора, а на другой границе ОСО – перпендикулярно директору.

Описанная структура поля дифрагирующей собственной волны объясняет исчезновение поглощения света в холестерике на некоторой частоте. Однако следует отметить, что исчезновение поглощения света может наблюдаться только в **дихроичных молекулах**, поглощение света которыми зависит от поляризации волны. Поглощение дихроичных молекул максимально, если поле в волне (поляризация) совпадает с ориентацией осцилляторов поглощения. Эти осцилляторы могут обладать сильной анизотропией, что проявляется в зависимости поглощения света от его поляризации. В дихроичных молекулах ориентация осцилляторов строго определена, а в ЖК, содержащем эти молекулы, она оказывается скореллированной с локальным направлением директора (например, направлена вдоль директора). Поэтому, если, например, в холестерике поле световой волны направлено перпендикулярно директору, то оно оказывается также перпендикулярным (для нашего примера) осцилляторам поглощения и поглощение света в холестерике должно исчезнуть. Именно такая благоприятная структура поля и может реализоваться в холестерике при частотах света, совпадающих с границами ОСО, так как в типичной ситуации осцилляторы поглощения направлены вдоль длинной оси или перпендикулярны ей. Причем в зависимости от направления осцилляторов поглощения в молекуле исчезновение поглощения происходит либо на коротковолновой, либо на длинноволновой границе ОСО. По частоте, на которой происходит исчезновение поглощения, можно судить об ориентации осцилляторов поглощения в дихроичных молекулах.

Отметим, что исчезновение поглощения в холестериках является аналогом известного в дифракции рентгеновских лучей **эффекта Бормана** [8]. Последний состоит в подавлении поглощения рентгеновских лучей в условиях дифракции и так же связан с образованием в кристалле из двух плоских волн конфигурации поля рентгеновских лучей, которая не испытывает поглощения.

Приведенные выше качественные объяснения не достаточны для количественного описания оптических свойств холестерика. Поэтому в следующем разделе будет изложена более сложная теория оптических свойств холестериков, основанная на точном решении уравнений Максвелла в спиральных средах и позволяющая количественно описать наблюдаемые оптические свойства холестериков.

## 2. Оптика ХЖК (точное решение)

Необычные оптические свойства холестериков обусловлены одномерной периодичностью их структуры [4]. Для холестериков (и более общо одномерных спиральных сред) в случае распространения света вдоль спиральной оси известно точное аналитическое решение уравнений Максвелла [5, 6], которое к тому же оказывается достаточно простым. Подчеркнем, что других примеров точного аналитического решения уравнений Максвелла для периодических сред даже с более простой структурой, чем у холестерика, неизвестно.

### 2.1. Диэлектрические свойства холестериков

Переходя к описанию точного аналитического решения уравнений Максвелла для холестериков, приведем в начале вид их тензора диэлектрической проницаемости, который определяется равномерным вращением с координатой вдоль холестерической оси направления анизотропии холестерика [4-6]:

$$\boldsymbol{\epsilon}(z) = \begin{pmatrix} \epsilon_0[1+\delta\cos\tau z] & \pm\epsilon_0\delta\sin\tau z & 0 \\ \pm\epsilon_0\delta\sin\tau z & \epsilon_0[1-\delta\cos\tau z] & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix} \quad (4)$$



где  $\epsilon_0 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$ ,  $\delta = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$  и  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  – главные значения тензора диэлектрической проницаемости ( $\epsilon_2 = \epsilon_3$  в случае холестерика). Угол вращения направления локальной анизотропии  $\varphi(z)$  линейно зависит от координаты  $z$  вдоль холестерической оси, а именно,  $\varphi(z) = \tau z/2$ , где **вектор обратной решетки холестерика**  $\tau = 4\pi/p$ , а  $p$  является шагом холестерика. Период изменения диэлектрических свойств, как уже отмечалось, холестерика совпадает с полу-шагом  $p/2$  холестерической спирали, так как направление анизотропии, повернутое на пол оборота физически эквивалентно исходному направлению анизотропии. Два знака в выражении для тензора (4) соответствуют двум топологическим возможностям – левой и правой спиралям.

## 2.2. Собственные волны

Найдем сначала собственные волны в ХЖК при распространения света вдоль холестерической оси. Заметим, что для выбранного направления распространения электромагнитная волна оказывается строго поперечной, т.е., вектор электрического поля волны  $\mathbf{E}$  перпендикулярен оси  $Z$ . В отсутствии внешних токов и зарядов уравнения Максвелла для холестериков принимают вид

$$\partial^2 \mathbf{E} / \partial z^2 = c^{-2} \boldsymbol{\epsilon}(z) \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2, \quad (5)$$

где  $c$  – скорость света, а также было также принято, что магнитная проницаемость  $\mu = 1$ , что является хорошим приближением для немагнитных сред. Для плоской волны, распространяющейся вдоль холестерической оси, т.е. вдоль оси  $Z$ , поле не зависит от координат  $x$  и  $y$  и уравнение (5) допускает простое решение.

Мы будем искать решение уравнения (5) для фиксированной частоты волны  $\omega$ . Как известно (см, например [5]), в пространственно периодической среде простейшее решение уравнений Максвелла не является плоской волной,  $\exp[ikz]$  (где  $k$  – волновой вектор), как в однородной среде, а является **блоховской волной**, т.е. линейной суперпозицией многих плоских волн (формально бесконечного числа) с отличающимися значениями волновых векторов. Для справедливости надо сказать, что в реальных ситуациях в этой суперпозиции только ограниченное число плоских волн (обычно одна или две) имеют достаточно большие амплитуды, в то время как остальным плоским волнам в этой линейной суперпозиции соответствуют малые амплитуды.

Замечательным свойством решения уравнений Максвелла для холестерика при распространении света вдоль холестерической оси, т.е. решения уравнения (5), является то, что **точное решение этого уравнения представляется блоховской волной, являющейся суперпозицией всего двух плоских волн**. Не останавливаясь здесь на выводе названного свойства решения, отметим только, что оно является следствием специфических поляризационных характеристик рассеяния света в холестерике, определяемых видом тензора (4).

Таким образом, решение уравнения (5) следует искать в виде:

$$\mathbf{E}(z,t) = e^{-i\omega t} [\mathbf{E}^+ \mathbf{n}_+ \exp(i\mathbf{K}^+ z) + \mathbf{E}^- \mathbf{n}_- \exp(i\mathbf{K}^- z)], \quad (6)$$

где векторы круговых поляризаций  $\mathbf{n}_{\pm} = (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) / \sqrt{2}$ , а  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  являются единичными векторами вдоль осей  $x$  и  $y$  и волновые вектора  $\mathbf{K}^{\pm}$  удовлетворяют условию Брэгга:

$$\mathbf{K}^+ - \mathbf{K}^- = \boldsymbol{\tau}. \quad (7)$$

Далее для удобства введем следующие обозначения

$$K^{\pm} = k\eta^{\pm}, \quad k = \omega (\epsilon_0)^{1/2}/c \quad (8)$$

Подставляя (6) с учетом (7), (8) в уравнение (5), получаем систему уравнений для  $E^+$  и  $E^-$

$$[1-(\eta^+)^2] E^+ + \delta E^- = 0, \quad \delta E^+ + [1-(\eta^-)^2] E^- = 0 \quad (9)$$

Условием нетривиального решения системы (9) является равенство нулю ее определителя:

$$[1-(\eta^+)^2][1-(\eta^-)^2] - \delta^2 = 0 \quad (10)$$

Из уравнения (10) с учетом формулы (7) получаем выражения, определяющие  $K^{\pm}$  как функции частоты (или  $k$ ), шага холестерической спирали  $p$  и параметра анизотропии  $\delta$ :

$$K^+_{j/k} = \eta^+_{j/k} = (\tau/2 \pm q^+)/k, \quad \eta^-_{j/k} = \eta^+_{j/k} - \tau/k, \quad (11)$$

$$q^{\pm} = \kappa \{ 1 + (\tau/2\kappa)^2 \pm [(\tau/\kappa)^2 + \delta^2]^{1/2} \}^{1/2}.$$

Выражение (11) для фиксированного значения частоты  $\omega$  определяет четыре значения  $\eta^{\pm}_{j/k}$ , т.е., четыре значения волновых векторов  $K^{\pm}_{j/k}$ . Четыре соответствующих решения системы (9) и выражение (7) определяют **собственные волны в холестерике** для направления распространения света вдоль холестерической оси.

Пронумеруем собственные решения (собственные волны) следующим образом:  $j=1,4$  для знака “+” и “-” перед  $q^{\pm}$  в первом соотношении уравнений (11) и  $j=2,3$  для знака “+” и “-” пред  $q^{\pm}$  в том же соотношении.

Отношение  $\xi_j$  амплитуд двух плоских волн в  $j^{\text{ом}}$  собственном решении  $E^-/E^+$  определяется следующим выражением

$$\xi_j = (E^-/E^+)_j = \delta / [(K^+_{j/k} - t)^2 / \kappa^2 - 1] \quad (12)$$

Рисунок 3, представляющий частотную зависимость модуля  $\xi_j$  для двух собственных решений с  $j$  равными 1 и 2 выявляет существенное различие в частотном поведении соответствующих собственных решений (которые также часто называют **собственными волнами в ХЖК**).

Это различие является следствием сильных дифракционных эффектов для собственной волны, соответствующей  $j=2$ , и практическому отсутствию дифракционных эффектов для собственной волны, соответствующей  $j=1$ . В следующем разделе мы рассмотрим свойства собственных волн более детально.

### 2.3. Свойства собственных волн

Как видно из уравнения (6), собственные решения представляют собой суперпозицию двух циркулярно поляризованных плоских волн. В зависимости от относительного знака  $K^+$  и  $K^-$  в (6) это могут быть либо две волны с противоположными круговыми поляризациями, распространяющиеся в одном направлении (в случае одного знака  $K^+$  и  $K^-$ ), либо две волны с одной и той же круговой поляризации, распространяющиеся в противоположных направлениях (в случае противоположных знаков  $K^+$  и  $K^-$ ). Напомним, что изменение знака волнового вектора в выражении, описывающем циркулярно поляризованную волну, эквивалентно одновременному изменению

направления распространения и круговой поляризации волны на противоположную круговую поляризацию.

Из выражений (6), (8) и (12) следует, что решения 1 и 4, содержащие  $q^+$  в (11), соответствуют двум собственным волнам, недифрагирующим на периодической структуре холестерика и распространяющимся вдоль и против оси  $Z$ . Каждая из этих собственных волн является суперпозицией двух плоских волн дифрагирующей и недифрагирующей поляризации, распространяющихся в одном направлении, причем преимущественно представлена составляющая с недифрагирующей круговой поляризацией (за исключением коротковолнового предела). Решения 2 и 3, содержащие  $q^-$  в (11) отвечают двум собственным волнам, дифрагирующим в холестерике.

Остановимся подробнее на физических характеристиках собственных решений и их зависимости от частоты, считая, как это обычно бывает, что параметр диэлектрической анизотропии холестерика  $\delta \ll 1$ . В собственной волне 1 для всех частот  $K^+$  и  $K^-$  имеют совпадающие знаки, а одна из амплитуд в (6)  $E^+$  (или  $E^-$ ) – порядка  $\delta$  по сравнению с другой (рис. 3), за исключением высокочастотного предела  $\omega/c \gg \tau/\delta$ , в котором амплитуды сравниваются.

Поэтому оказывается, что собственная волна 1 с точностью порядка  $\delta$  соответствует волне, поляризованной по кругу в направлении, обратном винту холестерической спирали для всех частот за исключением  $\omega/c > \tau/\delta$ . При  $\omega/c \gg \tau/\delta$ , т.е., в пределе очень коротких волн по сравнению с шагом холестерикоа, собственная волна 1 соответствует линейно-поляризованной волне, плоскость поляризации которой вращается с периодом  $p$  в направлении винта спирали с изменением координаты  $z$ . При этом плоскость поляризации света везде параллельна локальной ориентации главной оси тензора диэлектрической проницаемости (4), соответствующей меньшему главному значению  $\epsilon_2$ . Волновой вектор собственной моды в этом пределе равен  $k(1 - \delta/2)$ . Собственная волна 4, как уже отмечалось, совершенно аналогична собственной волне 1, но описывает распространение волны в противоположном направлении.

В собственной волне 2 волновые векторы  $K^+$  и  $K^-$  в зависимости от частоты могут быть действительными и иметь противоположные знаки, могут быть комплексными, могут быть действительными и иметь совпадающие знаки. Область комплексных значений  $K^+$  и  $K^-$  находится вблизи **брегговской частоты**

$$\omega_B = \tau c / 2(\epsilon_0)^{1/2} \quad (13)$$

в интервале частот  $\omega_B / (1 + \delta)^{1/2} < \omega < \omega_B / (1 - \delta)^{1/2}$ , определяющем границы области селективного отражения, соответствующем существованию «запрещенной зоны» (ОСО) и чисто мнимым  $q^-$ , т.е. отсутствию в этом интервале частот распространяющихся в холестерике волн с круговой поляризацией, совпадающей с винтом холестерической спирали. Длина волны света  $\lambda$ , отвечающая брегговской частоте (13), в точности равна шагу холестерической спирали  $p$ . Независимо от значения  $\delta$ , для частот в области запрещенной зоны  $|E^+ / E^-| = 1$  и, как будет показано ниже, имеет место обусловленное дифракцией селективное отражение света в холестерике.

Вне запрещенной зоны, за исключением высокочастотного предела, одна из амплитуд  $E^-$  (или  $E^+$ ) порядка  $\delta$  относительно другой и собственная волна 2 с хорошей точностью соответствует волне, поляризованной по кругу в направлении винта холестерической спирали. При  $\omega/c \gg \tau/\delta$ , т.е., в пределе очень коротких волн по сравнению с шагом холестерика, собственная волна 2 соответствует линейно-поляризованной волне, плоскость поляризации которой, будучи перпендикулярной плоскости поляризации моды 1, вращается с периодом  $p$  в направлении винта спирали с

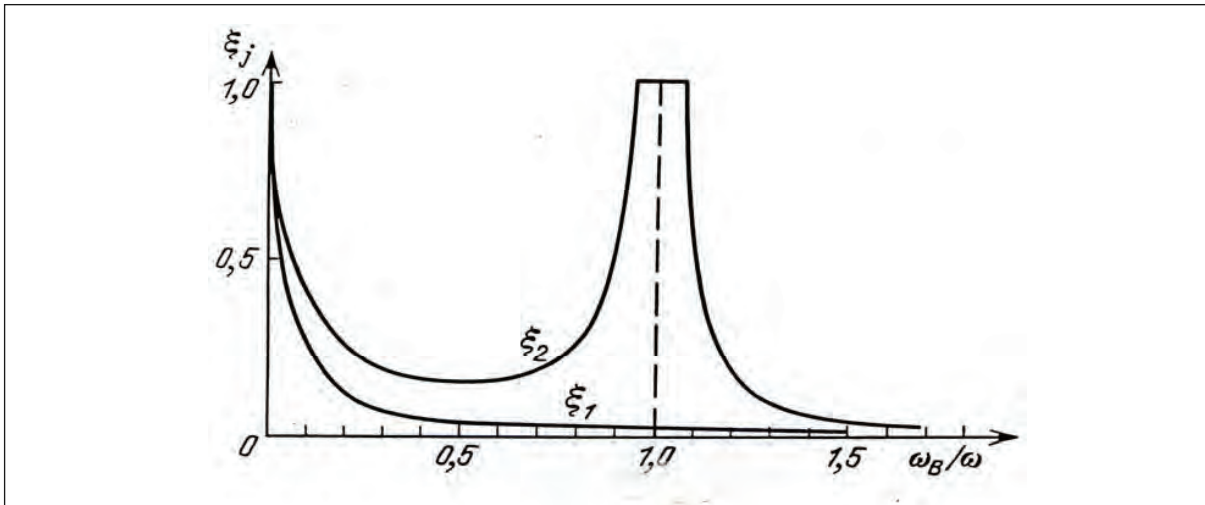


Рис. 3

изменением координаты  $z$ . В этом пределе волновой вектор собственной волны 2 равен  $k(1 + \delta/2)$ . Собственная волна 3 обладает теми же свойствами, что и собственная волна 2, описывая при этом вне запрещенной зоны распространения света в противоположном направлении.

Характер зависимости от частоты  $q^\pm$  ( $K^\pm$ ) в собственных волнах иллюстрирует рис. 4 ( $\text{Im}[q^\pm]$ , изображенное на рисунке пунктиром, отложено на оси ординат справа). Из этого рисунка, в частности, видно, что закон дисперсии  $K(\omega)$  в собственных волнах 1 и 4 близок к закону дисперсии для волны, распространяющейся в однородной среде. Закон же дисперсии  $K(\omega)$  в собственных волнах 2 и 3 имеет дифракционный вид с запрещенной для распространения света зоной.

В заключение этого раздела отметим еще раз интересные особенности распространения света в холестерике. При распространении света вдоль оси холестерика селективное дифракционное отражение испытывает только свет с круговой поляризацией (левой или правой), в зависимости от того какова (левая или правая) холестерическая спираль. При этом существенно, что реализуется дифракционное отражение только в первом порядке и строго отсутствуют все высшие порядки дифракционного отражения (в формуле (2)  $s=1$ ). Отсутствие дифракционных рефлексов высших порядков иллюстрируют дисперсионные кривые, представленные на рис.4, демонстрирующем только одну запрещенную зону для собственных волн 2 и 3 при отсутствии вовсе дифракционных рефлексов для собственных волн 1 и 4. Поведение собственных волн в коротковолновом пределе ( $\omega/c \gg \tau/\delta$ ), т.е., для длин волн малых по сравнению с холестерическим шагом, состоящее во вращении собственных линейных поляризаций как функции координаты  $z$  вдоль холестерической оси вокруг этой оси, повторяющем вращение директора, известно как **предел Могена** [4].

### 3. Граничная задача

Описание экспериментально наблюдаемых оптических характеристик спиральных периодических сред требует не только знания собственных волн для этой среды, но и решения уравнений Максвелла, удовлетворяющего определенным граничным условиям, т.е. решения граничной задачи. Решение граничной задачи для спиральных периодических сред продемонстрировано ниже на примере ХЖК с использованием найденных выше собственных волн ХЖК.

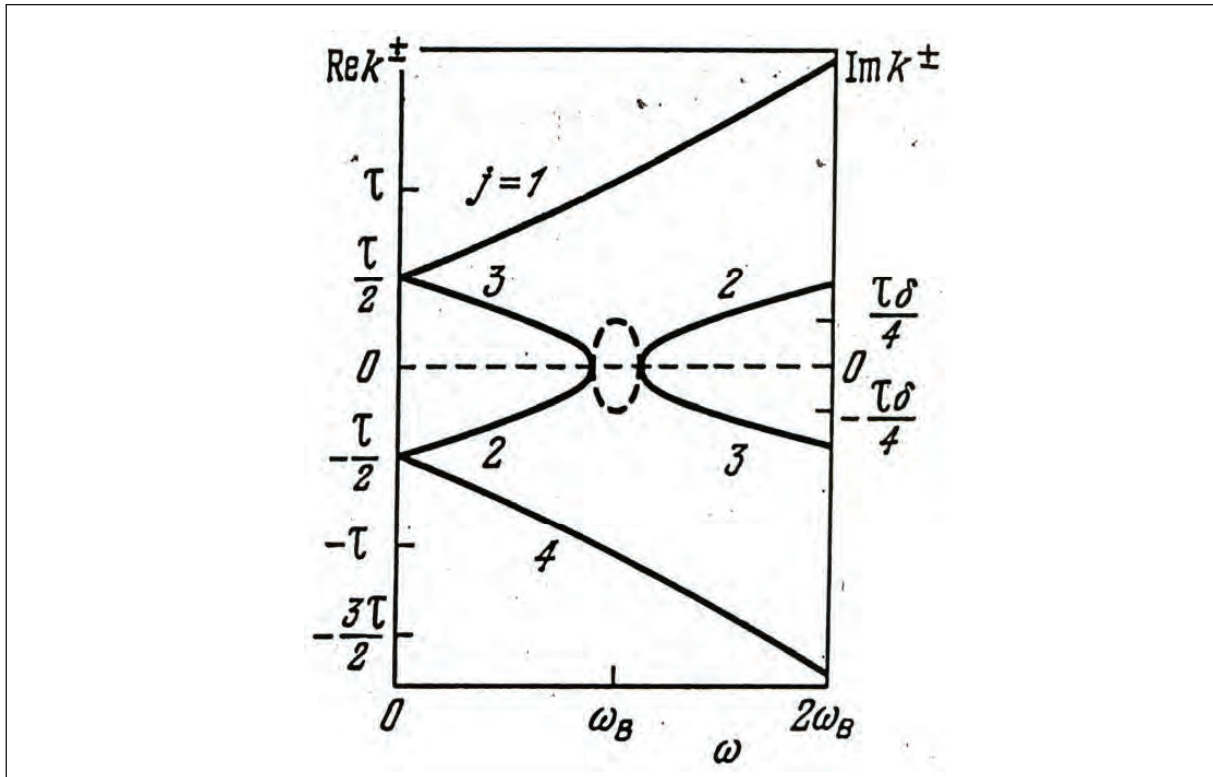


Рис. 4

### 3.1. Планарная холестерическая текстура

Используя найденные выше собственные волны, приступим к решению задачи об отражении и прохождении света в случае холестерического образца конечных размеров. Будем считать, что образец представляет собой плоскопараллельную пластину толщиной  $L$  и пучок света падает по нормали к поверхности. Другими словами, рассмотрим оптические свойства идеальной планарной текстуры при нормальном падении света (см. рис. 5).

Для того, чтобы найти амплитуды волн, отраженной от слоя холестерика и прошедшей через него, надо найти, какие из собственных решений системы (9), т.е. собственных волн, и с каким весом возбуждаются в образце падающей на него волной. Это делается с помощью граничных условий, задаваемых на обеих поверхностях образца. В рассматриваемом случае нормального падения света, так как в холестерике волна, распространяющаяся вдоль холестерической оси строго поперечна, граничные условия, состоящие в непрерывности на границе тангенциальных составляющих электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H} = (ic/\omega)\text{rote } \mathbf{E}$  полей, принимают вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e(0) + \mathbf{E}_r(0) &= \mathbf{E}(0), \quad \mathbf{E}_t(L) = \mathbf{E}(L) \\ \text{rot}[\mathbf{E}_e(z) + \mathbf{E}_r(z)]_{z=0} &= \text{rot}[\mathbf{E}(z)]_{z=0} \\ \text{rot}[\mathbf{E}(z)]_{z=L} &= \text{rot}[\mathbf{E}_t(z)]_{z=L}. \end{aligned} \tag{14}$$

Электрические поля падающей  $\mathbf{E}_e$ , отраженной  $\mathbf{E}_r$ , прошедшей  $\mathbf{E}_t(L)$  и волны  $\mathbf{E}$  в образце представим в виде

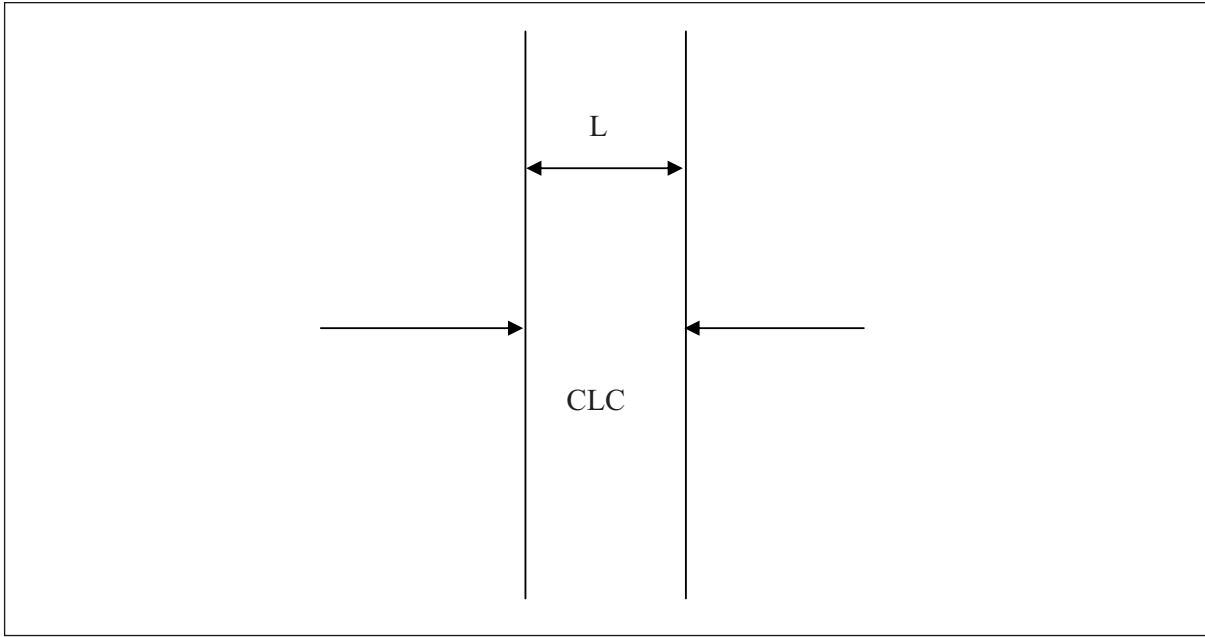


Рис. 5

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_e &= \text{Exp}[i(k_e z - \omega t)](\mathbf{E}_e^+ \mathbf{n}_+ + \mathbf{E}_e^- \mathbf{n}_-), \\
 \mathbf{E}_r &= \text{Exp}[-i(k_e z + \omega t)](\mathbf{E}_e^+ \mathbf{n}_+ + \mathbf{E}_r^- \mathbf{n}_-), \\
 \mathbf{E}_t &= \text{Exp}[i(k_e z - \omega t)](\mathbf{E}_t^+ \mathbf{n}_+ + \mathbf{E}_{et}^- \mathbf{n}_-), \\
 \mathbf{E} &= \text{Exp}[-i\omega t] \sum (\mathbf{E}_e^+ \mathbf{n}_+ + \mathbf{E}_e^- \mathbf{n}_-),
 \end{aligned} \tag{15}$$

где у  $\mathbf{n}_\pm$  – векторы круговых поляризаций и  $k_e$  – волновой вектор света вне образца. Здесь же напомним, что если для волны, распространяющейся в положительном направлении оси Z, (в частности для падающей волны)  $\mathbf{n}_+$  и  $\mathbf{n}_-$  описывают правую и левую круговую поляризацию, соответственно, то для отраженной волны, распространяющейся в противоположном направлении,  $\mathbf{n}_+$  и  $\mathbf{n}_-$  описывают левую и правую поляризации, соответственно. Это нашло свое отражение в формуле для  $\mathbf{E}_t^+$  в (15).

Подставляя (15) в (14), приравнявая затем нулю по отдельности множители перед  $\mathbf{n}_+$  и  $\mathbf{n}_-$  и проведя затем несложные преобразования, найдем, что амплитуды отраженной и прошедшей через образец волн выражаются через амплитуды возбуждаемых в образце собственных волн  $\mathbf{E}_j^+$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_r^+ &= (1/2) \sum \xi_j (1 - K_j^- / \kappa_e) \mathbf{E}_j^+, \\
 \mathbf{E}_t^+ &= (1/2) \sum \exp[i(K_j^+ - \kappa_e)L] (1 + K_j^+ / \kappa_e) \mathbf{E}_j^+, \\
 \mathbf{E}_r^- &= (1/2) \sum (1 - K_j^+ / \kappa_e) \mathbf{E}_j^+, \\
 \mathbf{E}_t^- &= (1/2) \sum \xi_j \exp[i(K_j^- - \kappa_e)L] (1 + K_j^- / \kappa_e) \mathbf{E}_j^+,
 \end{aligned} \tag{16}$$

где суммирование ведется по всем четырем значениям  $j$ .

Амплитуды же собственных волн  $\mathbf{E}_j^+$  определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
(1/2) \sum (1+K_j^+ / \kappa_e) \mathbf{E}_j^+ &= \mathbf{E}_e^+, \\
\sum \exp[iK_j^+ L] (1- K_j^+ / \kappa_e) \mathbf{E}_j^+ &= 0, \\
(1/2) \sum \xi_j (1+ K_j^- / \kappa_e) \mathbf{E}_j^+ &= \mathbf{E}_e^-, \\
\sum \xi_j \exp[iK_j^- L] (1- K_j^- / \kappa_e) \mathbf{E}_j^+ &= 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, задача о прохождении и отражении света для случая нормального падения пучка на планарную холестерическую текстуру сводится к решению неоднородной системы четырех линейных уравнений [5, 6]. Ее решение в совокупности с выражениями (11) и (12) для параметров  $K_j^\pm$  и  $\xi_j$  в собственных волнах дает в общем случае точное описание оптических характеристик планарного слоя. В частности, оно описывает их зависимость от частоты, поляризации света и диэлектрических свойств среды, граничащей с холестериком.

Ниже мы для простоты ограничимся подробным рассмотрением задачи для случая совпадения диэлектрической проницаемости среды вне холестерика со средней диэлектрической проницаемостью холестерика  $\epsilon_0$ .

### 3.2. Планарный слой без френелевского отражения на границах

Таким образом, мы будем рассматривать оптические свойства слоя холестерика произвольной толщины  $L$  при нормальном падении светового пучка (см. рис. 5, схематически поясняющий геометрию оптической задачи), предполагая, что отсутствует отражение света на диэлектрических границах между холестериком и внешней средой (или, как говорят, в отсутствие френелевского отражения на границах), т.е. случай совпадения диэлектрической проницаемости среды вне холестерика со средней диэлектрической проницаемостью холестерика.

Мы изучим поляризационную и частотную зависимость отражения и прохождения света, предполагая малой диэлектрическую анизотропию холестерика  $\delta$ , что позволяет пренебречь отражением света на границах холестерика. В сделанных предположениях падающая на холестерический слой световая волна возбуждает в холестерике только три собственные волны: две собственные волны, соответствующие дифрагирующей в холестерике поляризации, и одну собственную волну распространяющуюся в направлении падения светового пучка и соответствующую недифрагирующей поляризации.

Предположение об отсутствии отражения света на границах позволяет дальнейшее упрощение задачи, а именно, редуцирует системы (16), (17) четырех уравнений к системам двух линейных уравнений. Это происходит по той причине, что в системах (16), (17) реализуется разделение поляризаций и падающая на холестерический слой волна с дифрагирующей круговой поляризацией возбуждает в слое только собственные волны дифрагирующей поляризации, т.е. собственные волны 2 and 3, в то время как волна с недифрагирующей поляризацией возбуждает только собственную волну 1. Это означает, что амплитуда и фаза собственной волны 1 на поверхности холестерического слоя определяется  $E_e^-$ , т.е., эта величина оказывается совпадающей с соответствующей величиной на поверхности холестерического слоя для недифрагирующей составляющей падающей световой волны.

Далее, учитывая принятое приближение, т.е. пренебрежение отражением на границе, которое вносит ошибку порядка  $\delta$ , получим из (17) уравнения для амплитуд дифрагирующих собственных волн  $E_2$  и  $E_3$ :

$$E_2^+ + E_3^+ = E_e^+, \quad \xi_2 \exp[iK_2^- L] E_2^+ + \xi_3 \exp[iK_3^- L] E_3^+ = 0. \quad (18)$$

Из выражений (16) находим соотношения, связывающие амплитуды отраженной и прошедшей волн дифрагирующей круговой поляризации с амплитудами собственных волн дифрагирующей поляризации:

$$E_r^+ = \sum \xi_j E_j^+, \quad E_t^+ = \sum \exp[iK_j^+ L] E_j^+, \quad (19)$$

где в сумме  $j$  принимает только два значения 2 и 3.

Из (18) и (19) мы получаем следующие выражения для амплитуд отраженной и прошедшей волн дифрагирующей поляризации (т.е. амплитудный коэффициент отражения и прохождения, если положить  $E_e^+ = 1$ ):

$$E_r^+ = i E_e^+ \delta \sin qL / \{ (q\tau/\kappa^2) \cos qL + i [(\tau/2\kappa)^2 + (q/\kappa)^2 - 1] \sin qL \} \quad (20)$$

$$E_t^+ = E_e^+ \exp[i\tau L/2] (q\tau/\kappa^2) / \{ (q\tau/\kappa^2) \cos qL + i [(\tau/2\kappa)^2 + (q/\kappa)^2 - 1] \sin qL \},$$

где  $q = \kappa \{ 1 + (\tau/2\kappa)^2 - [(\tau/\kappa)^2 + \delta^2]^{1/2} \}^{1/2}$  (см. (11)).

Для коэффициентов отражения  $R^+$  и прохождения  $T^+$  по интенсивности для света дифрагирующей круговой поляризации из (20) получаем:

$$R^+ = \delta^2 |\sin qL|^2 / \{ (q\tau/\kappa^2) \cos qL + i [(\tau/2\kappa)^2 + (q/\kappa)^2 - 1] \sin qL \}^2 \quad (21)$$

$$T^+ = |\exp[i\tau L/2] (q\tau/\kappa^2)|^2 / \{ (q\tau/\kappa^2) \cos qL + i [(\tau/2\kappa)^2 + (q/\kappa)^2 - 1] \sin qL \}^2.$$

Волна недифрагирующей круговой поляризации в принятом приближении отражения не испытывает ( $R^- = 0$ ), а полностью проходит через холестерический слой ( $T^- = 1$ ).

На эксперименте часто измеряется разница коэффициентов пропускания круговых поляризаций, т.е., так называемая величина **кругового дихроизма**  $D = (T^- - T^+) / (T^- + T^+)$ , которая для рассматриваемых непоглощающих холестериков в принятом приближении следующим образом выражается через  $T^+$  или  $R^+$ :

$$D = (1 - T^+) / (1 + T^+) = R^+ / (2 - R^+) \quad (22)$$

Рассмотрим, как оптические свойства холестерического слоя зависят от его параметров – толщины слоя  $L$ , величины анизотропии диэлектрической проницаемости  $\delta$ , значения шага холестерической спирали, величины поглощения или усиления в холестерике.

### 3.3. Непоглощающие холестерики

Рассмотрим сначала оптические свойства холестерического слоя в отсутствии поглощения. Поскольку в этом случае для любой поляризации падающего на холестерический слой света выполняется соотношение  $T+R=1$ , где  $R$  и  $T$  – коэффициенты отражения и пропускания холестерического слоя (по интенсивности), то в отсутствии поглощения вся оптическая информация содержится в коэффициенте отражения и мы ограничимся изучением зависимости только  $R$  от параметров задачи. На рис.6 приведена частотная зависимость  $R$  для различных толщин слоя  $L$ , рассчитанная по



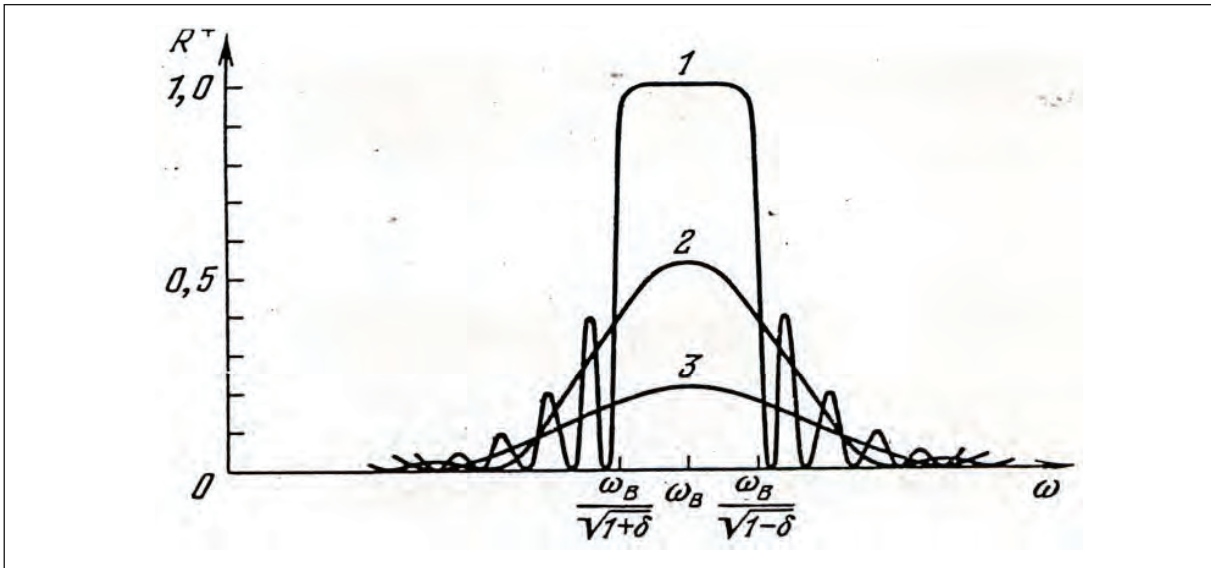


Рис. 6

формуле (21) для света дифрагирующей круговой поляризации (кривые 1,2,3, соответственно, для толстого, промежуточной толщины и тонкого холестерического слоя). Приведенные кривые демонстрируют, что вид частотной зависимости коэффициента отражения  $R$  определяется значением параметра  $\delta L/p$ . Случай  $\delta L/p < 1$  соответствует дифракционно тонкому слою и малому  $R$ , случай  $\delta L/p \approx 1$  соответствует умеренно толстому слою и появлению биений в отражении вне области селективного отражения при  $R$  сравнимом с 1 внутри области селективного отражения, случай  $\delta L/p > 1$  соответствует дифракционно толстому слою с резко выраженными биениями отражения вне области селективного отражения при  $R$  практически равном 1 внутри области селективного отражения. Отметим, что в минимумах биения отражения для рассматриваемого нами случая отсутствия поглощения в холестерике  $R$  строго обращается в ноль.

### 3.4. Поглощающие холестерики

Рассмотрим теперь оптические свойства холестерического слоя при наличии поглощения. Для этого в уравнениях Максвелла (5) следует использовать тензор диэлектрической проницаемости вида (4), компоненты которого являются комплексными числами. При этом в общем случае тензор будет соответствовать наличию анизотропии в поглощении света. Мы ниже для упрощения задачи будем считать, что поглощение в холестерике изотропно. Изотропное поглощение описывается добавкой мнимой составляющей к усредненной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_0$  в выражении (4) для тензора диэлектрической проницаемости. Поэтому будем ниже считать, что усредненная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  теперь задается формулой  $\epsilon = \epsilon_0(1 + i\gamma)$ , где  $\gamma$  – малый положительный параметр (что подтверждается фактически реализующейся величиной поглощения в оптическом диапазоне). В этом случае использованное выше соотношение  $T+R=1$  не справедливо, а выполняется неравенство  $T+R < 1$ , поскольку часть излучения поглощается в слое холестерика.

При малых  $\gamma$  частотная зависимость коэффициентов отражения и прохождения остается качественно такой же, как и в случае отсутствия поглощения. Отметим, однако, что при наличии поглощения в холестерике в минимумах биения отражения коэффициент отражения  $R$  теперь не обращается в ноль.

Качественно новая особенность по сравнению с соответствующим однородным слоем выявляется в частотной зависимости поглощения в слое (особенно при очень малых  $\gamma$ ). Поглощение, а именно величина  $1-T-R$ , оказывается функцией частоты и достигает максимума на частотах, соответствующих минимумам  $R$ . Причем максимум поглощения для каждого минимумам  $R$  достигается при вполне определенном значении  $\gamma$  (см. рис. 7 а.б, на котором частота отсчитывается от края ОСО и обезразмерена береговой частотой, т.е. в качестве безразмерной частоты отложена величина  $\nu = \delta[2(\omega - \omega_B)/(\delta \omega_B) - 1]$ , толщина слоя выражена в числе шагов холестерической спирали  $N=L/p=25$ ,  $\delta = 0,05$  и  $\gamma = 0.001$  на рис. а;  $\gamma = 0.005$  на рис. б).

Значения  $\gamma$ , обеспечивающие максимум поглощения, определяются условием

$$\partial(1-T-R)/\partial\gamma = 0, \quad (23)$$

приводящем к трансцендентному уравнению на  $\gamma$ .

Для толстых холестерических слоев и слабого поглощения, такого, что  $\text{Im}[q]L \ll 1$ , значения  $\gamma$ , соответствующие максимумам поглощения, находятся аналитически путем разложения (23) по малому параметру  $\text{Im}[q]L$  и даются следующим выражением:

$$\gamma = \delta(n\pi)^2/(\delta L\tau/4)^3. \quad (24)$$

Сами же коэффициенты отражения и прохождения для соответствующих частот как функция  $\gamma$  принимают значения

$$R = ((\delta L\tau/4)^3\gamma)^2/[(n\pi)^2 + (\delta L\tau/4)^3\gamma]^2, \quad T = (n\pi)^4/[(n\pi)^2 + (\delta L\tau/4)^3\gamma]^2, \quad (25)$$

где  $n$  нумерует минимумы  $R$  ( $n=1$  соответствует минимуму, ближайшему к границе ОСО, рис. 6).

При выполнении соотношения (25) коэффициенты отражения и прохождения в минимумах  $R$  принимают значения  $R=1/4$ ,  $T=1/4$  и  $1-R-T=1/2$ . В связи с принятой малостью  $\gamma$  этот результат означает сильное возрастание поглощения для слабо поглощающих холестерических слоев на частотах минимумов  $R$ , если выполняется условие (24). Из соотношений (24, 25) следует, что наиболее сильным возрастание поглощения оказывается для  $n=1$ , т.е. на частоте первого минимума в частотных биениях коэффициента отражения  $R$ . Условие (24) означает, что для достижения максимального поглощения в слое требуется выполнение специального соотношения между параметрами холестерика и толщиной слоя  $L$ .

### 3.5. Усиливающие ХЖК

Рассмотрим теперь оптические свойства усиливающего (на некоторой частоте света) холестерического слоя. Такая ситуация, например, реализуется в лазерах, где за счет инверсии заселенностей для верхнего состояния лазерного перехода в рабочей среде лазера свет соответствующей частоты испытывает усиление при распространении в этой среде.

Для упрощения задачи так же как для случая поглощения будем считать, что усиление в холестерике изотропно. Теперь  $\epsilon_0$  в выражении (4) для тензора диэлектрической проницаемости следует заменить на  $\epsilon = \epsilon_0(1+i\gamma)$ , где  $\gamma$  – малый отрицательный параметр. В этом случае выполняется неравенство  $T+R>1$ , поскольку излучения в слое холестерика усиливается.

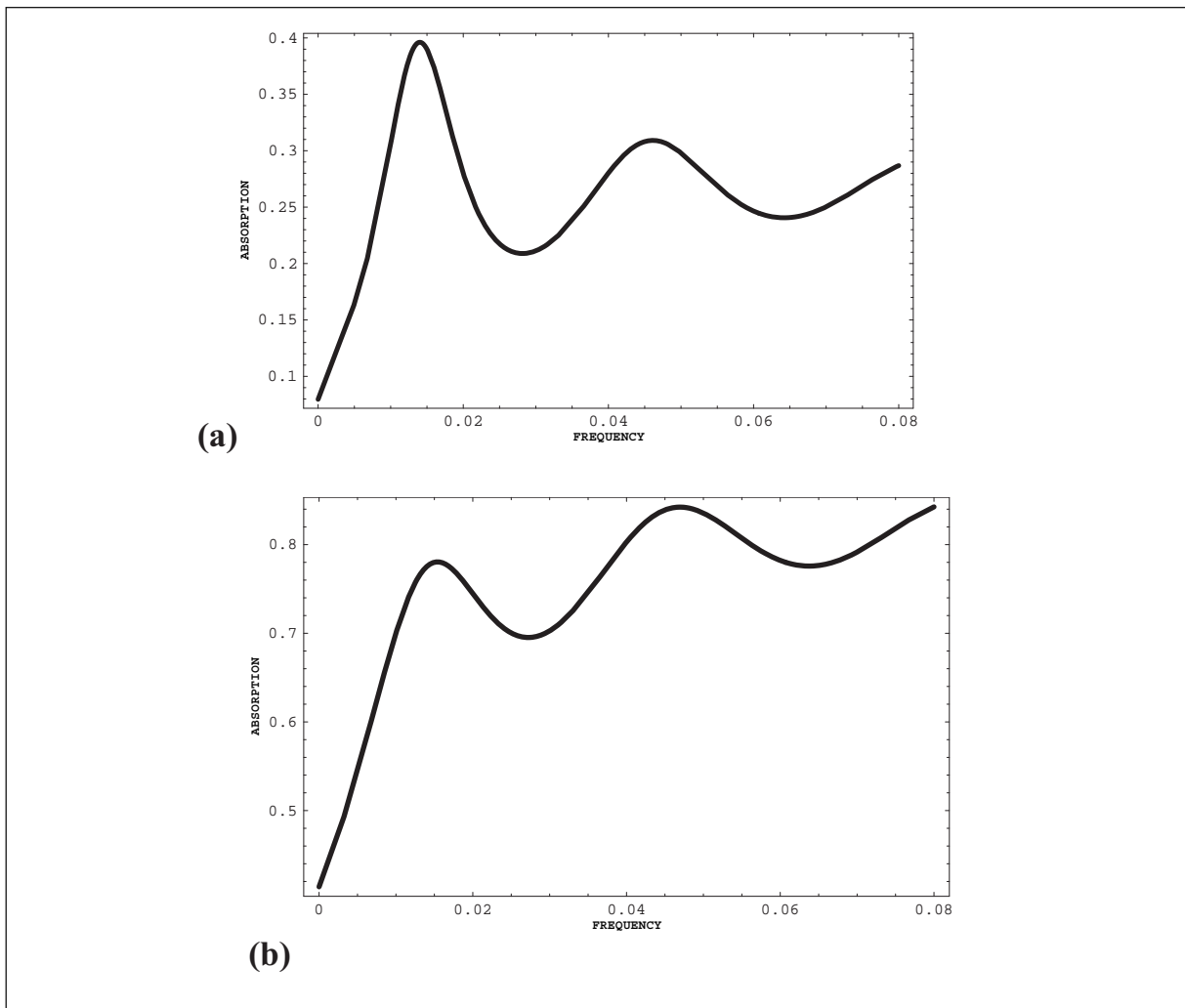


Рис. 7

При малых  $|\gamma|$  частотная зависимость коэффициентов отражения и прохождения остается качественно такой же, как и в случае отсутствия усиления, а превышение  $T+R$  единицы является малым. Однако по мере возрастания  $|\gamma|$   $T+R$  возрастает и становится существенно больше единицы, а по достижении некоторого критического значения  $|\gamma|$  ситуация коренным образом меняется: каждый из коэффициентов  $T$  и  $R$  оказывается расходящимся на частоте первого минимума в частотных биениях  $R$  (для  $n=1$ ), что означает достижение порога лазерной генерации.

Здесь кратко напомним принцип устройства **лазера с распределенной обратной связью (РОС-лазера)**. В фотонных кристаллах любого вида возможна реализация РОС-лазера, который в отличие от традиционной схемы лазера [9] не требует использования зеркал в качестве элементов резонаторной системы. В таком РОС лазере роль зеркал, используемых в традиционном лазере, играет дифракция (брегговское отражение) на периодической структуре [5, 6]. Краситель, необходимый для обеспечения требуемых для осуществления **накачки** и **лазерной генерации** переходов, как правило, вводится (растворяется) непосредственно в материале фотонного кристалла, волна накачки направляется на фотонный кристалл по направлению близкому либо к направлению периодичности, либо перпендикулярному этому направлению. Поскольку в фотонном кристалле сильное дифракционное отражение осуществляется для длины волны света вблизи удвоенного периода фотонного кристалла (для

определенности речь идет об одномерном фотонном кристалле и распространении света вдоль направления периодичности), длина волны лазерной генерации в РОС лазере оказывается почти совпадающей с величиной удвоенного периода фотонного кристалла. Порог лазерной генерации в РОС лазере определяется мощностью накачки, которая обеспечивает инверсию заселенности уровней лазерного перехода, достаточную для начала индуцированного излучения (лазерной генерации, т.е. расходимости коэффициентов пропускания и отражения) в обсуждаемой структуре. Направление индуцированного излучения в РОС лазере совпадает с направлением периодичности, а генерируемое лазерное излучение испускается в обе стороны вдоль этого направления.

Рис. 8, представляющий частотную зависимость коэффициента отражения, иллюстрирует эту расходимость. На рис. 8а  $\gamma = 0,00565$ . При дальнейшем увеличении  $|\gamma|$  расходимость T и R исчезает, а затем вновь появляется по достижении некоторого нового критического значения  $|\gamma|$  (см. рис. 8б,  $\gamma = 0,0129$  на частоте второго минимума в биениях R (для  $n=2$ ). На рис. 8 толщина слоя принята той же, что для рис. 7, частота на рис. 8 и всех последующих рисунках измеряется в тех же единицах, что на рис. 7, а также везде в расчетах диэлектрическая анизотропия  $\delta = 0,05$ .

Итак, с увеличением  $|\gamma|$  проявляются другие критические значения  $|\gamma|$  в виде расходимостей T+R на частотах других минимумов в биениях R. Соответствующие значения  $|\gamma|$  определяют пороги лазерной генерации для лазеров с распределенной обратной связью (РОС) на частотах минимумов в биениях R, причем, чем больше  $n$ , тем выше оказывается соответствующий порог, а минимальным значение порога лазерной генерации оказывается при  $n=1$ . Трансцендентное уравнение, определяющее пороговые значения  $\gamma$ , следует из выражения для T и R (21), имеет вид

$$\operatorname{tg}qL = i(q\tau/\kappa^2)/[(\tau/2\kappa)^2 + (q/\kappa)^2 - 1] \quad (26)$$

и может быть решено численными методами.

Для толстых холестерических слоев при выполнении условия  $|\operatorname{Im}qL| \ll 1$  значения  $\gamma$ , соответствующие порогам генерации, находятся аналитически и даются следующим выражением:

$$\gamma = -\delta(n\pi)^2/(\delta L\tau/4)^3. \quad (27)$$

Уравнение (27) показывает, что для толстых холестерических слоев порог лазерной генерации обратно пропорционален кубу толщины слоя и растет как квадрат  $n$ , номера минимума в биениях R. Таким образом, наименьшим порогом лазерной генерации оказывается порог генерации на частоте первого минимума в биениях R причем этот порог оказывается ниже, чем порог генерации в соответствующем непериодическом слое для традиционной схемы лазера с зеркалами. Для реализации минимумов порога лазерной генерации в слое, как следует из (27), требуется выполнение специального соотношения между параметрами холестерика в активном слое и толщиной этого слоя L.

#### 4. Локализованные моды в фотонных кристаллах

В физике волновых процессов уже давно известно, что собственные состояния волновых полей для конкретных структур могут приводить к весьма интересным, а часто и полезным явлениям. Так в акустике хорошо известно явление «шепчущей галереи». Оно состоит в том, что, например, для определенной конфигурации колонн в храме даже шепотом произнесенное слово оказывается прекрасно слышимым в

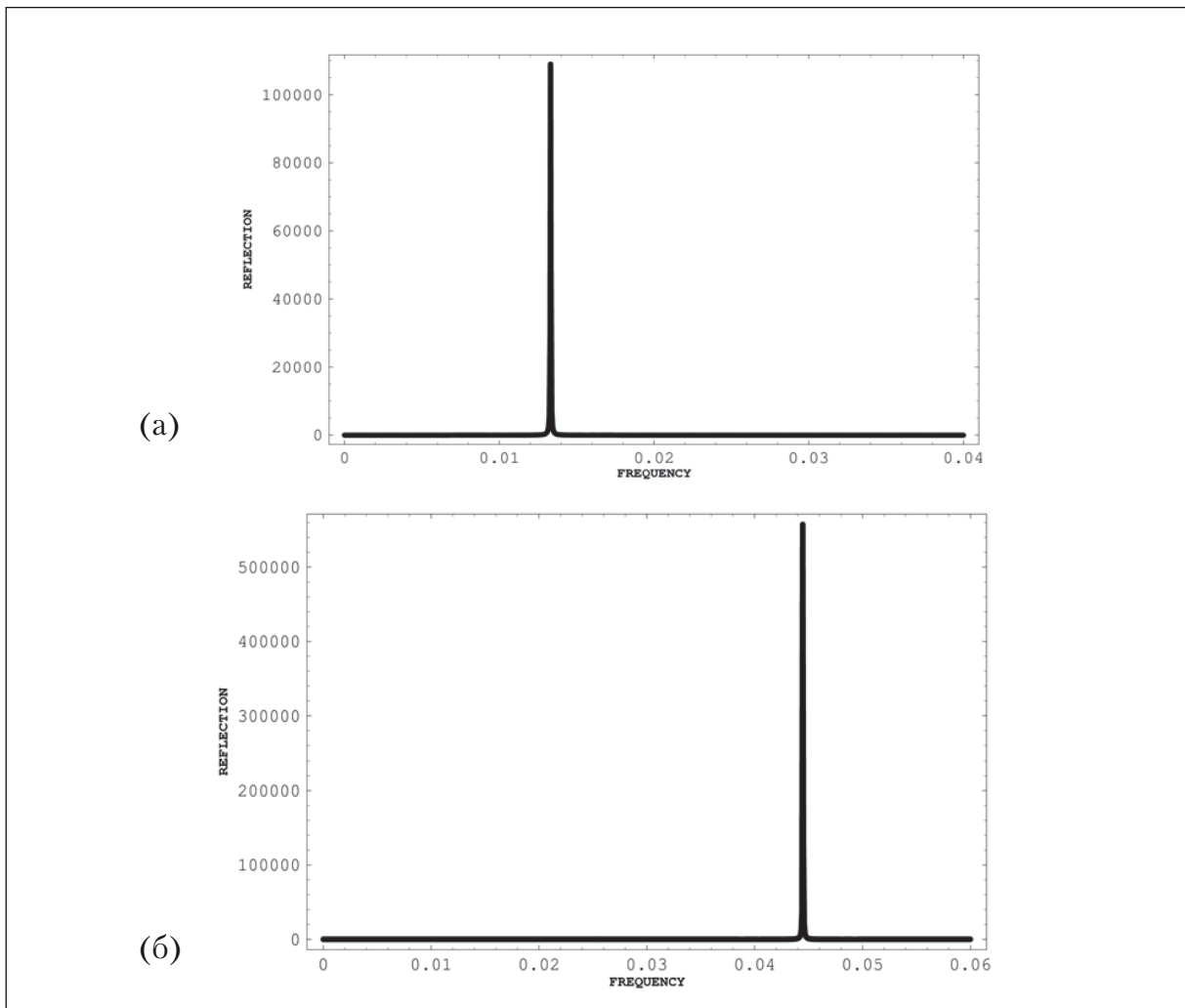


Рис. 8

некоторой зоне помещения или архитектурного ансамбля (как правило, по его периметру), в то время как в других местах слышимость практически нулевая. Эффект «шепчущей галереи» объясняется тем, что в сооружении существуют, так называемые «собственные моды», т.е. локализованные решения волнового уравнения для конкретной конфигурации сооружения, которым соответствует резко неоднородное в пространстве распределение волновой (в нашем примере акустической) энергии. Пребывание человека в соответствующей зоне повышенной плотности волновой энергии и обеспечивает реализацию эффекта «шепчущей галереи». Разумеется, для реализации эффекта требуется специальная геометрия сооружения, которую умели создавать уже архитекторы древности. Конечно, локализованные акустические моды не ограничиваются только «шепчущей галереей» – существуют и другие их виды.

В связи с общностью свойств волновых явлений, т.е. независимости их общих свойств от конкретной природы волнового явления, естественно ожидать, что локализованные собственные решения граничных задач (локализованные моды) существуют не только для акустических, но и для других типов волн, в частности электромагнитных. В последнее время выяснилось, что электромагнитные локализованные моды весьма ярко проявляются в оптике фотонных кристаллов. Ниже на примере ХЖК будут рассмотрены два типа локализованных мод в фотонных кристаллах [10, 11].

### 4.3.1. Краевые моды

Существующее в поглощающем слое аномально сильное поглощение и в усиливающем слое расходимости коэффициентов отражения и пропускания на дискретных частотах является следствием того, что эти частоты соответствуют собственным модам рассматриваемой структуры, т.е. холестерического слоя. Проверим это утверждение, не ограничиваясь только расчетом коэффициентов отражения и пропускания слоя (рис. 6), а рассчитаем частотную зависимость амплитуд собственных мод холестерика, возбуждаемых в слое (считая, что амплитуда падающей на слой волны постоянна). Соответствующие зависимости представлены на рис. 9 для числа витков на толщине ХЖК слоя  $N=350$ .

Как видно из рис. 8 амплитуды собственных волн в слое на частотах, соответствующих нулю коэффициента отражения  $R$ , резко возрастают, причем это возрастание тем сильнее, чем больше толщина слоя  $L$ . Таким образом можно думать, что частоты минимумов  $R$  совпадают с частотами собственных мод холестерического слоя. Чтобы окончательно убедиться в этом следует решить уравнение, определяющее собственные моды. Таким уравнением оказывается уравнение, получаемое из (18), если в нем положить равной нулю амплитуду волны, падающей на холестерический слой, т.е. однородная система уравнений, соответствующая неоднородной системе (18).

Условием разрешимости однородной системы является зануление ее детерминанта, которое оказывается в точности совпадающим с выражением (26). Однако теперь для нахождения частот собственных мод выражение (26) следует решить относительно частоты. В общем случае выражение (26) удовлетворяется только для комплексных значений частоты, поэтому частоту собственной моды (которая получила название краевой моды)  $\omega_{EM}$  представим в виде  $\omega_{EM} = \omega_{EM}^0(1+i\Delta)$ , где  $\omega_{EM}^0$  и  $\Delta$  действительные величины (в реальных ситуациях  $\Delta$  является малой величиной).

Комплексность  $\omega_{EM}$  означает, что краевая мода оказывается затухающей, а время ее жизни  $\tau_\mu$  определяется мнимой составляющей частоты  $\omega_{EM}$ .

$$\tau_\mu = 1/\text{Im}(\omega_{EM}) . \quad (28)$$

Для толстых слоев и таких малых  $\Delta$  что удовлетворяется условие  $L\text{Im}q \ll 1$  может быть найдено аналитическое решение уравнения (26). В этом случае величина  $\omega_{EM}^0$  совпадает с частотой минимума коэффициента отражения  $R$  для непоглощающего холестерического слоя, т.е. определяется условием  $qL = n\pi$ , а  $\Delta$  дается выражением

$$\Delta = -1/2 \delta(n\pi)^2 / (\delta L \tau / 4)^3, \quad (29)$$

где  $n$  – целое число, задающее номер краевой моды (порядковый номер минимума коэффициента отражения  $R$ ), возрастающий с удалением частоты от границы ОСО (с  $n=1$ , соответствующим ближайшему к ОСО частотному минимуму коэффициента отражения  $R$ ). В пределе толстых слоев, как следует из (29) время жизни краевой моды пропорционально третьей степени толщины слоя, обратно пропорционально квадрату номера моды и определяется согласно (28) выражением:

$$\tau_\mu = (L/c)(\delta L / pn)^2. \quad (30)$$

Найдя решение однородного уравнения, следующего из (18), легко получить распределение по координате поля краевой моды в слое:

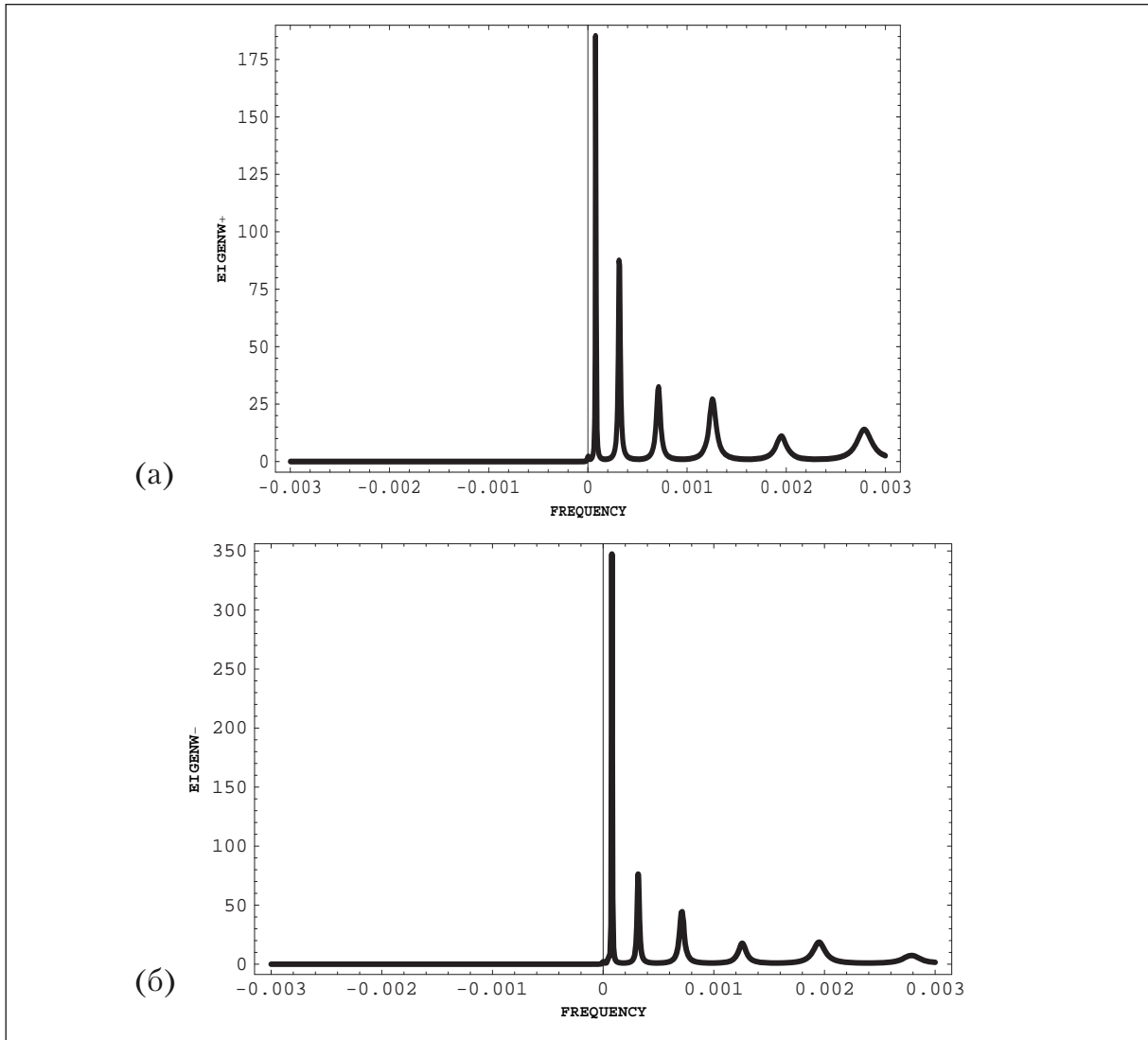


Рис. 9

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\omega_{EM}, z, t) = & i \exp(-i\omega_{EM}t) \{ \mathbf{n}_+ \exp(i\tau z/2) \sin qz - \mathbf{n}_- \exp(-i\tau z/2) \{ [(\tau/\kappa)^2 + \delta^2]^{1/2} \sin qz \\
 & + i\tau q / (\delta\kappa)^2 \cos qz \} \},
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

где  $q$  определено в (11,20). Для обсуждавшегося выше случая толстых слоев из аналитического решения дисперсионного уравнения для краевой моды следует, что в (31) надо положить  $q = n\pi/L$  (условие, обеспечивающее  $R^+ = 0$ , см.(20)).

Выражение (31) приводит к следующему координатному распределению плотности энергии краевой моды в пределах холестерического слоя [12], вычисленному для числа витков на толщине ХЖК слоя  $N=350$  (см. рис. 9, по оси абсцисс отложено  $\tau z$ ) для трех первых краевых мод ( $n=1,2,3$ ). Как видно из рисунка, плотность энергии краевой моды внутри слоя испытывает осцилляции, причем число максимумов в этих осцилляциях совпадает с номером краевой моды  $n$ . Поскольку собственные волны, комбинация которых создает поле краевой моды в слое, являются суперпозициями двух плоских волн (см. (6)), то можно легко вычислить поток энергии в слое вблизи его поверхности, направленный внутрь слоя и наружу (рис. 10,  $N=16,5$ ). Оказывается, что точно на границе слоя поток энергии, направленный внутрь слоя (жирная линия) точно равен нулю, что же касается потока на границе, направленного наружу (тонкая линия), он оказывается хотя и малым (тем меньше, чем больше толщина слоя), но не нулевым. Вот

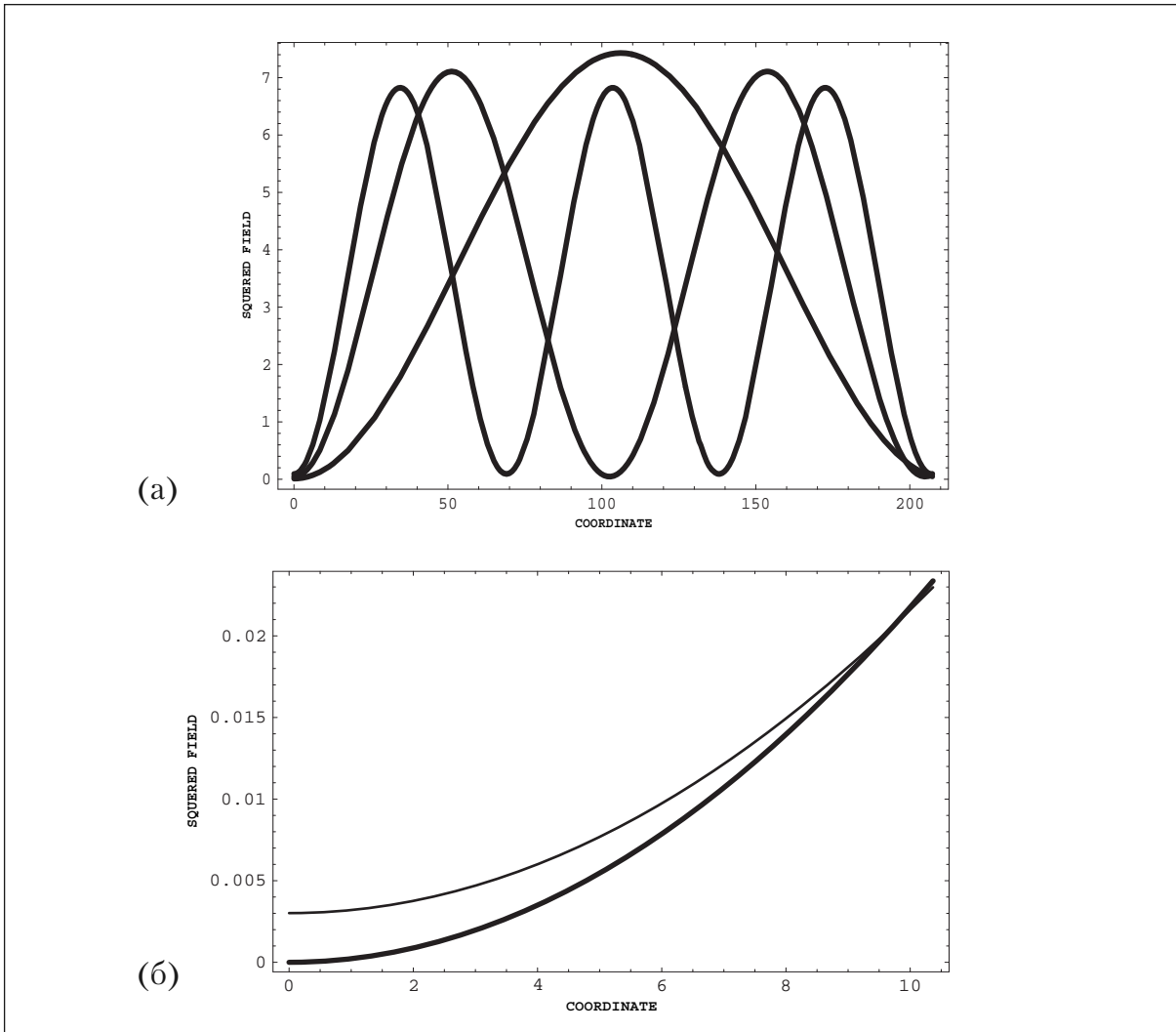


Рис. 10

этот поток энергии из слоя (утечка) и является физической причиной найденного выше затухания краевой моды.

Таким образом, как показывает этот раздел, аномально сильное поглощение в поглощающих холестериках и расходимости коэффициентов отражения и прохождения в усиливающих холестериках (ведущие к понижению порога лазерной генерации), происходящие на дискретных частотах, оказываются проявлением возбуждения в слое локализованных краевых мод. Отметим, что понижение порога РОС лазерной генерации является не единственным явлением, в котором проявляются краевые моды. Например, краевые моды проявляются также в повышении эффективности нелинейной генерации высших оптических гармоник и усилении черенковского излучения в выделенных направлениях в спиральных средах [5].

#### 4.2. Оптимизация накачки в РОС лазерах

Формулы предыдущих разделов демонстрируют возможность понижения порога лазерной РОС генерации при совмещении частоты генерации с частотами краевых мод (максимальный эффект соответствует  $n=1$ ). При этом никаких специальных требований к волне накачки не подразумевалось. Однако, существует возможность дальнейшего понижения порога лазерной РОС генерации при наложении дополнительных условий на волну накачки. А именно, такая возможность реализуется, если волна накачки



находится в условиях аномально сильного поглощения, которые обсуждались выше (максимальный эффект соответствует  $n=1$ ). Напомним, что при лазерной РОС генерации ХЖК должен быть усиливающим материалом на частоте генерации и одновременно поглощающим на частоте накачки. Если обеспечить условия аномально сильного поглощения волны накачки (сохраняя при этом совмещение частоты генерации с частотой краевой моды), то произойдет дальнейшее понижение порога лазерной РОС генерации. Поскольку частота волны накачки всегда выше, чем частота генерации, то для реализации эффекта аномально сильного поглощения на частоте накачки ее частота  $\omega_p$  должна совпадать с частотой краевой моды на высокочастотной границе ОСО, т.е. должно выполняться соотношение

$$\omega_p = (c\tau/2)/[\epsilon_{0p}(1-\delta_p)]^{1/2}. \quad (32)$$

При этом частота лазерной РОС генерации  $\omega_1$ , должна совпадать с частотой краевой моды на низкочастотной границе ОСО, т.е. должно выполняться соотношение

$$\omega_1 = (c\tau/2)/[\epsilon_{0l}(1+\delta_l)]^{1/2}. \quad (33)$$

Совмещение частоты генерации и накачки с частотами краевых мод в коллинеарной геометрии РОС генерации (т.е. при распространении всех волн вдоль холестерической оси) требует следующего соотношения между этими частотами накачки и генерации

$$\omega_p/\omega_1 = [\epsilon_{0l}(1+\delta_l)/\epsilon_{0p}(1-\delta_p)]^{1/2}, \quad (34)$$

где диэлектрическая постоянная  $\omega_0$  и ее анизотропия  $\delta$  помечены индексами «р» и «l», отмечающими, что из-за частотной дисперсии диэлектрических свойств ХЖК соответствующие величины, относящиеся к частоте накачки и частоте РОС генерации, могут быть различными. Следует отметить, что хотя соотношение (34) достижимо на эксперименте, однако оно накладывает серьезные ограничения на частоты накачки и генерации, поскольку в типичной экспериментальной ситуации лазерной генерации отношение  $\omega_p/\omega_1$  оказывается больше величины, даваемой выражением (34). Однако существует регулярный способ обеспечения условия аномального поглощения волны накачки – это осуществление накачки пучком, распространяющимся под углом к холестерической оси (т.е. выход в эксперименте из коллинеарной геометрии).

При этом приближенное значения угла отклонения пучка накачки  $\theta$  от направления холестерической оси, вдоль которой реализуется РОС генерация, дается выражением

$$\theta = \arccos[\omega_1/\omega_p]. \quad (35)$$

Отметим, что понижения порога лазерной генерации за счет аномально сильного поглощения волны накачки были экспериментально реализованы как в коллинеарной, так и неколлинеарной геометрии эксперимента.

### 4.3. Локализованные дефектные моды

Другой разновидностью локализованных мод в фотонных кристаллах являются **дефектные моды**. Свое название они получили потому, что они наблюдаются в фотонных кристаллах, содержащих плоский дефект, нарушающий совершенную периодическую структуру фотонного кристалла. В последнее время дефектные моды привлекают к себе значительное внимание, в частности потому, что они позволяют

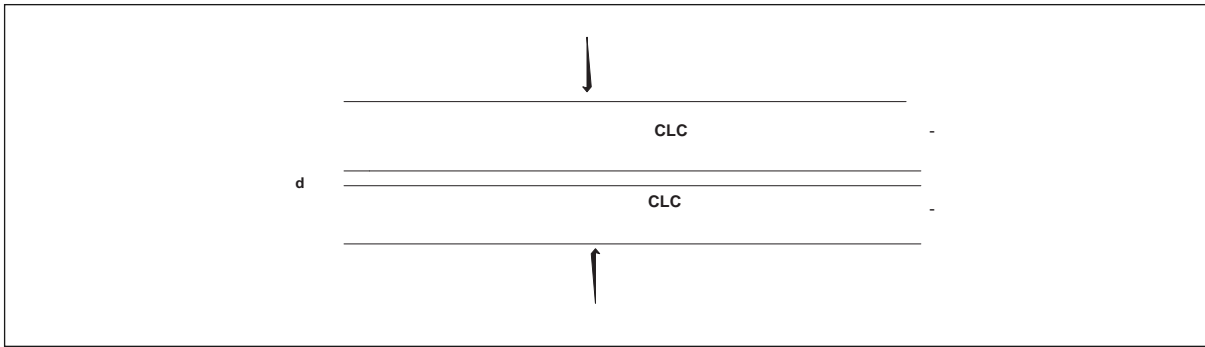


Рис. 11

реализовать низкопороговую РОС лазерную генерацию, узкополосные оптические фильтры и оказываются полезными в некоторых других явлениях оптики фотонных кристаллов. Как и выше, описание локализованных дефектных мод проведем на примере дефектных структур ХЖК.

#### 4.3.1. Граничная задача для дефектной ХЖК структуры

Рассмотрим граничную задачу для дефектной структуры [10-13], представляющей собой два совершенных планарных слоя толщины  $L$  с холестерической осью, направленной перпендикулярно их поверхностям и разделенных изотропным слоем толщины  $d$  (см. рис. 11).

Примем, что диэлектрическая проницаемость дефектного слоя и среды вне структуры совпадает со средней диэлектрической проницаемостью ХЖК  $\epsilon_0$ . Решая граничную задачу для дефектной структуры (см. рис. 11) аналогично рассмотренному выше случаю краевой моды, для коэффициентов отражения  $|R(d,L)|^2$  и прохождения  $|T(d,L)|^2$  дефектной структуры при нормальном падении на нее света дифрагирующей круговой поляризации получим следующие выражения:

$$|T(d,L)|^2 = | [T_e T_d \exp(ikd)] / [1 - \exp(2ikd) R_d R_u] |^2, \quad (36)$$

$$|R(d,L)|^2 = | \{ R_e + R_u T_e T_u \exp(2ikd) / [1 - \exp(2ikd) R_d R_u] \} |^2, \quad (37)$$

где  $R_e(T_e)$ ,  $R_u(T_u)$  и  $R_d(T_d)$  – амплитудные коэффициенты отражения (прохождения) индивидуального ХЖК слоя (20) (см. рис. 6) при падении света на внешнюю (верхнюю) поверхность ХЖК слоя, при падении света из дефектного слоя на внутреннюю верхнюю поверхность ХЖК слоя и при падении света из дефектного слоя на внутреннюю нижнюю поверхность ХЖК слоя, соответственно. При выводе выражений (36, 37) предполагалось, что свет на дефектную структуру (рис. 11) падает только сверху. Результаты расчетов  $|R(d,L)|^2$  и  $|T(d,L)|^2$  приведены в следующем разделе.

Легко также найти выражения для амплитуд собственных волн, возбуждаемых в слоях ХЖК волной, падающей на структуру (см. Рис.11) извне, используя выражения (36, 37) для коэффициентов пропускания  $T(d,L)$  и отражения  $R(d,L)$ . Амплитуды собственных волн на входной поверхности структуры  $E_{\pm}^{+u}$  выражаются через амплитудный коэффициент отражения  $R(d,L)$  следующим образом:

$$E_{+}^{+u} = (E_{iu}) [\xi^{-} - R(d,L)] / (\xi^{-} - \xi^{+}), \quad E_{-}^{+u} = -(E_{iu}) [\xi^{+} - R(d,L)] / (\xi^{-} - \xi^{+}). \quad (38)$$

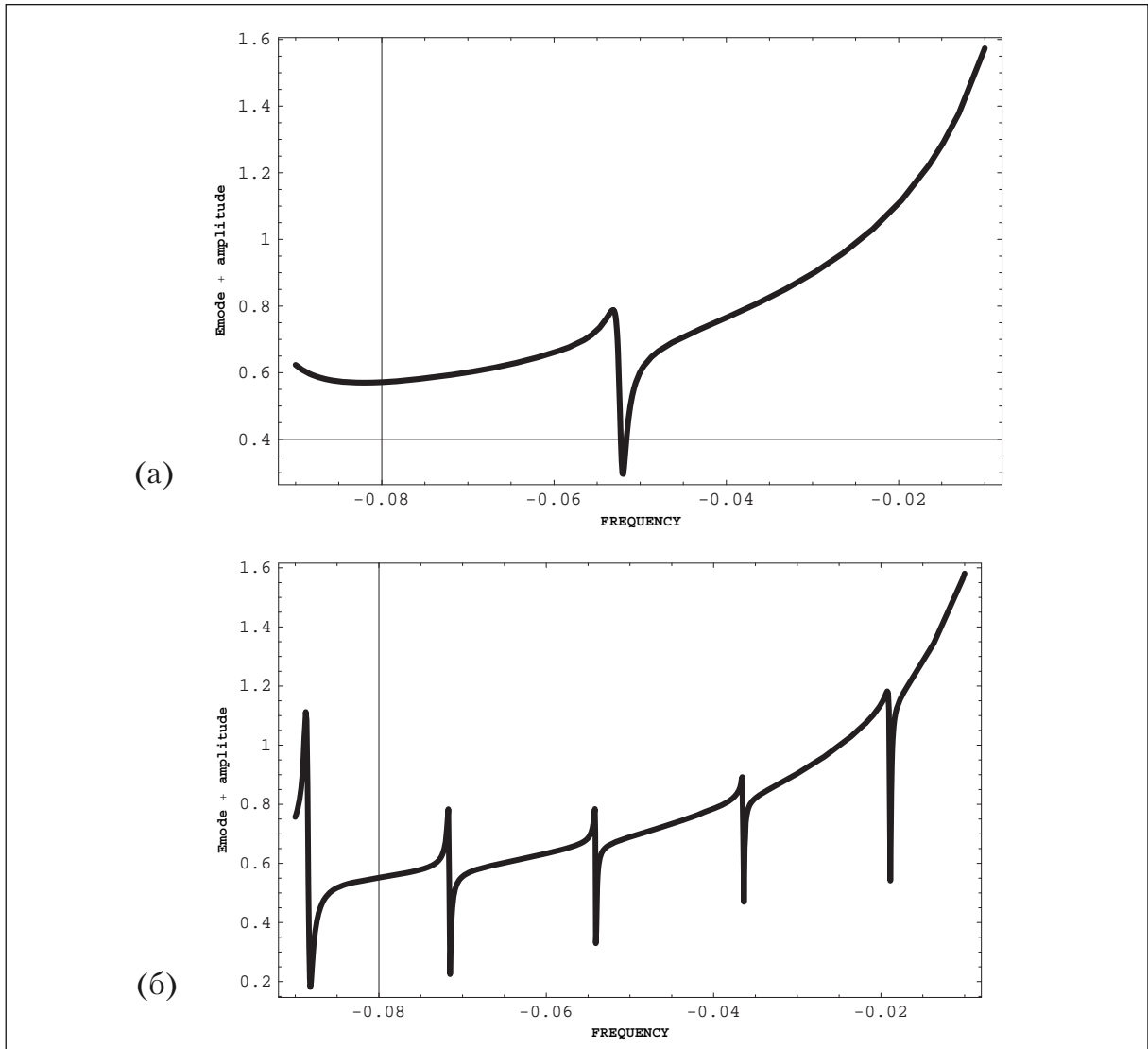


Рис. 12

Амплитуды собственных волн на выходной поверхности структуры выражаются через амплитудный коэффициент пропускания  $T(d,L)$  аналогичным образом:

$$E^{+d}_+ = (E_{iu})[\xi^- T(d,L)] \exp[-i(2K^+_+L+kd)] / (\xi^- - \xi^+), \quad (39)$$

$$E^{+d}_- = -(E_{iu}) [\xi^+ T(d,L)] \exp[-i(2K^+_+L+kd)] / (\xi^- - \xi^+).$$

Соответствующие вычисления амплитуд  $E^{+u}_+$ ,  $E^{+u}_-$ ,  $E^{+d}_+$  и  $E^{+d}_-$  собственных волн в структуре обнаруживают их нетривиальную зависимость от частоты (см. рис. 12,  $d/p = 0,25$  (a),  $d/p = 1000,6$  (b);  $N=33$ ). А именно, вблизи частоты дефектной моды (которая находится внутри области селективного отражения, см. рис. 13-15) амплитуды собственных волн испытывают резкие изменения. В результате происходит существенное возрастание амплитуды собственных волн по сравнению с амплитудой волны, падающей на дефектную структуру извне. И чем толще слои ХЖК, тем больше оказывается возрастание амплитуд собственных волн.

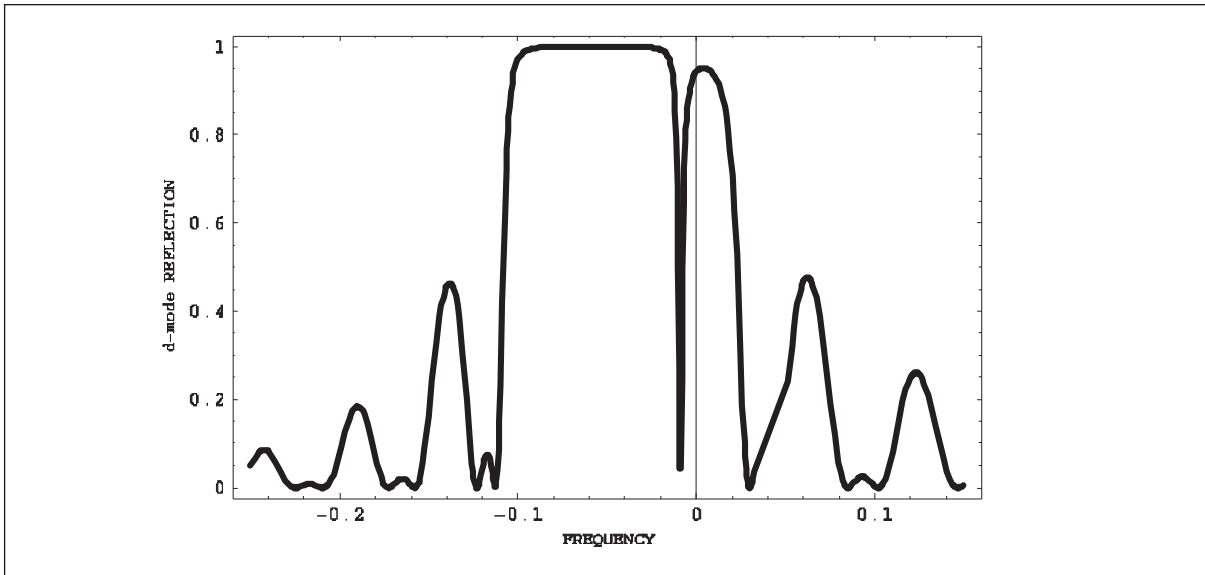


Рис. 13

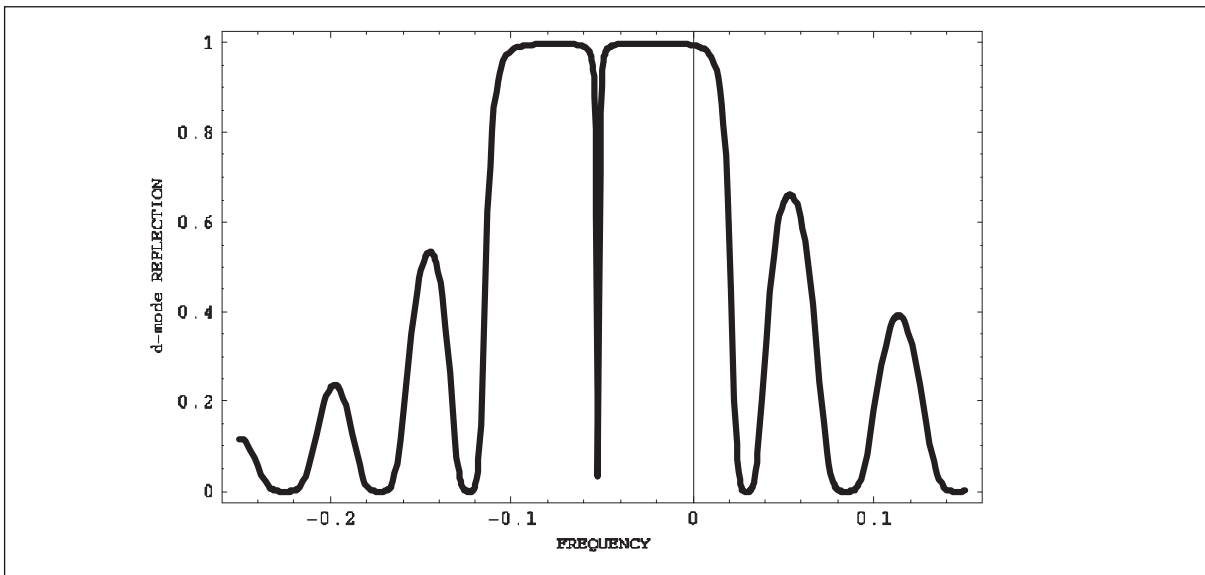


Рис. 14

#### 4.3.2. ДМС с непоглощающими ХЖК слоями

Рассмотрим подробнее формулы предыдущего раздела для непоглощающих ХЖК слоев в структуре на рис. 11. Рассчитанные частотные спектры отражения  $|R(d,L)|^2$  и пропускания  $|T(d,L)|^2$  при нормальном падении внешней волны на структуру представлены на рис. 13, 14 (здесь представлены только  $|R(d,L)|^2$  поскольку для непоглощающих слоев выполняется соотношение  $|R(d,L)|^2 + |T(d,L)|^2 = 1$ ). Характерной чертой этих спектров является существование максимумов пропускания  $|T(d,L)|^2$  и минимумов отражения  $|R(d,L)|^2$  на некоторой частоте внутри области селективного отражения, положение которой зависит от толщины дефектного слоя  $d$ . Как известно, частотное положение соответствующих минимумов  $|R(d,L)|^2$  и максимумов  $|T(d,L)|^2$  совпадает со значением действительной части частоты дефектной моды. Для толщины дефектного слоя  $d=p/4$ , соответствующей как раз половине периода изменения тензора диэлектрической проницаемости ХЖК, эти максимумы и минимумы расположены точно по середине ОСО.

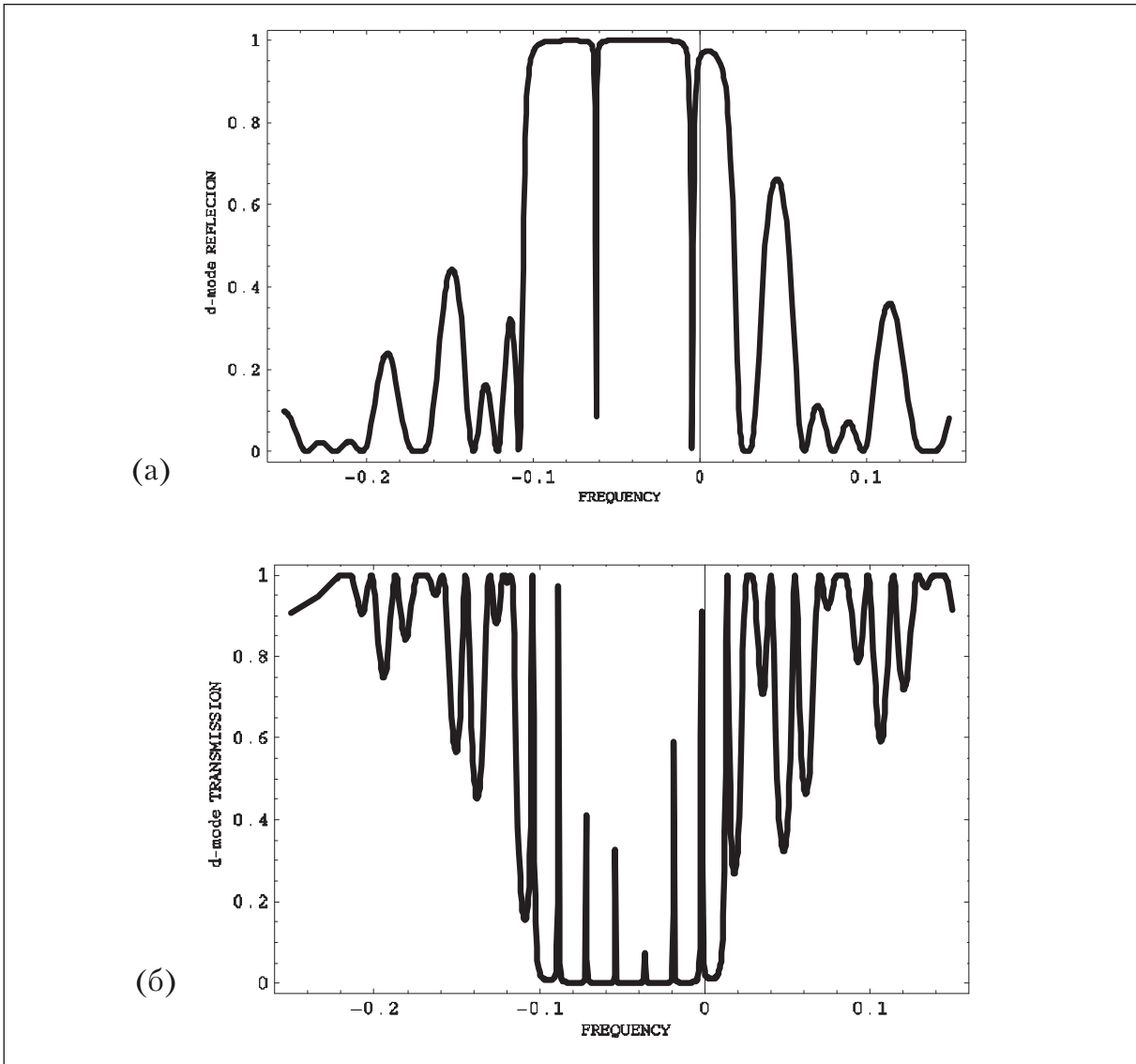


Рис. 15

В интервале толщин  $0 < d/p < 0.5$  частота дефектной моды перемещается от высокочастотной границы ОСО до ее низкочастотной границы. При дальнейшем увеличении толщины дефектного слоя частота дефектной моды испытывает частотные осцилляции между высокочастотной границей ОСО и ее низкочастотной границей. Однако, эти осцилляции происходят только до тех пор пока  $\Delta kd$  остается меньше, чем  $2\pi$ , где  $\Delta k$  представляет собой изменение волнового вектора на частотном интервале, равном частотной ширине ОСО. Когда  $\Delta kd$  начинает превосходить  $2\pi$ , внутри ОСО появляется вторая дефектная мода (два провала в коэффициенте отражения  $|R(d,L)|^2$  или максимума в  $|T(d,L)|^2$ ). При дальнейшем росте толщины дефектного слоя продолжается дальнейшее увеличение числа дефектных мод, число которых может быть оценено как  $\Delta kd/2\pi$ .

Описанное появление многих дефектных мод иллюстрируется рис. 15 ( $d/p = 200,15$  (a),  $d/p = 1000,6$  (b);  $N=33$ ), на которых представлены только  $|T(d,L)|^2$  или  $|R(d,L)|^2$  поскольку, как уже отмечалось, для непоглощающих слоев выполняется соотношение  $|R(d,L)|^2 + |T(d,L)|^2 = 1$ .

Как видно из рис. 13, 14 и следует из (37), на некоторой частоте коэффициент отражения  $|R(d,L)|^2 = 0$ . Условие зануления коэффициент отражения, вытекающее из (37) имеет вид:

$$R_e [1 - \exp(2ikd) R_d R_u] + R_u T_e T_u \exp(2ikd) = 0. \quad (40)$$

Интересно сравнить частотную зависимость коэффициента отражения  $|R(d,L)|^2$  с поведением амплитуд собственных волн  $E^{+u}_+$ ,  $E^{+u}_-$ ,  $E^{+d}_+$ , and  $E^{+d}_-$ , возбуждаемых в дефектной структуре. Сравнивая рис. 13-15 с рис. 16, видим, что частотное положение резких осцилляций амплитуд собственных волн как раз совпадает с точками зануления  $|R(d,L)|^2$ . Это является проявлением того факта, что соответствующие частоты совпадают с частотами локализованных мод рассматриваемой дефектной структуры, т.е. с частотами, так называемых, **дефектных мод**.

#### 4.3.3 Дефектные моды (непоглощающие ХЖК слои)

Так же, как в случае ЕМ дефектная мода (DM) определяется решением соответствующей граничной задачи (см. рис. 11) при отсутствии падающих на дефектную структуру (ДМС) внешних волн, т.е. при  $E_{iu} = E_{id} = 0$ . В этом случае, как известно, условием разрешимости соответствующей однородной системы является зануление ее детерминанта, которое, в частности, определяет частоту DM  $\omega_D$  и поэтому является дисперсионным уравнением для DM.

Явный вид найденного описанным способом дисперсионного уравнения для DM определяется следующим уравнением:

$$\{\exp(2ikd)\sin^2 qL - \exp(-itL)[(\tau q/\kappa^2)\cos qL + i((\tau/2\kappa)^2 + (q/\kappa)^2 - 1)\sin qL]^2 / \delta^2\} = 0, \quad (41)$$

которое также является условием обращения в ноль знаменателя в выражениях (36-37) для коэффициентов отражения и пропускания дефектной структуры, т.е. может быть записано в виде:

$$1 - R_d R_u \exp(2ikd) = 0 \quad (42)$$

Заметим, что для непоглощающих ХЖК при конечной толщине  $L$  слоев ХЖК дисперсионное уравнение (41) удовлетворяется только при комплексном значении частоты  $\omega_D$ , при чем, чем больше толщина  $L$ , тем меньше мнимая часть  $\omega_D$ . И только в пределе бесконечного  $L$  частота  $\omega_D$  становится действительной. Таким образом, дефектная мода является квазистационарным состоянием, а ее время жизни, как известно, определяется мнимой частью частоты  $\omega_D$ .

Поле DM в слое ХЖК является суперпозицией собственных волн ХЖК с амплитудами, удовлетворяющими условию:

$$E^{+u}_+ + E^{+u}_- = 0. \quad (43)$$

С помощью соотношения (43) можно найти поле DM в ХЖК слоях дефектной структуры, используя выражение (6) для собственных волн в ХЖК. Например, для отдельного ХЖК слоя дефектной структуры (см. рис. 11) выражение, описывающее координатную зависимость поля DM, принимает вид

$$E(\omega_D, z, t) = i \exp(-i\omega_D t) \{n_+ \exp(i\tau z/2) \sin qz + (n_-/\delta) \exp(-i\tau z/2) \{[(\tau/2\kappa)^2 + (q/\kappa)^2 - 1] \sin qz - i(\tau q/\kappa^2) \cos qz\}\} \quad (44)$$

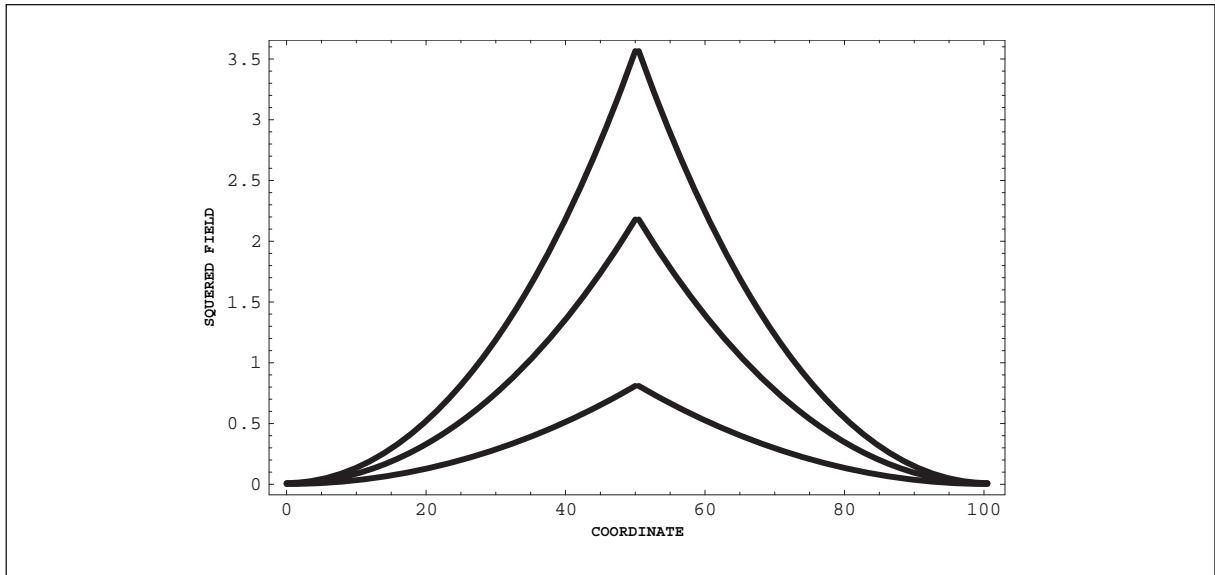


Рис. 16

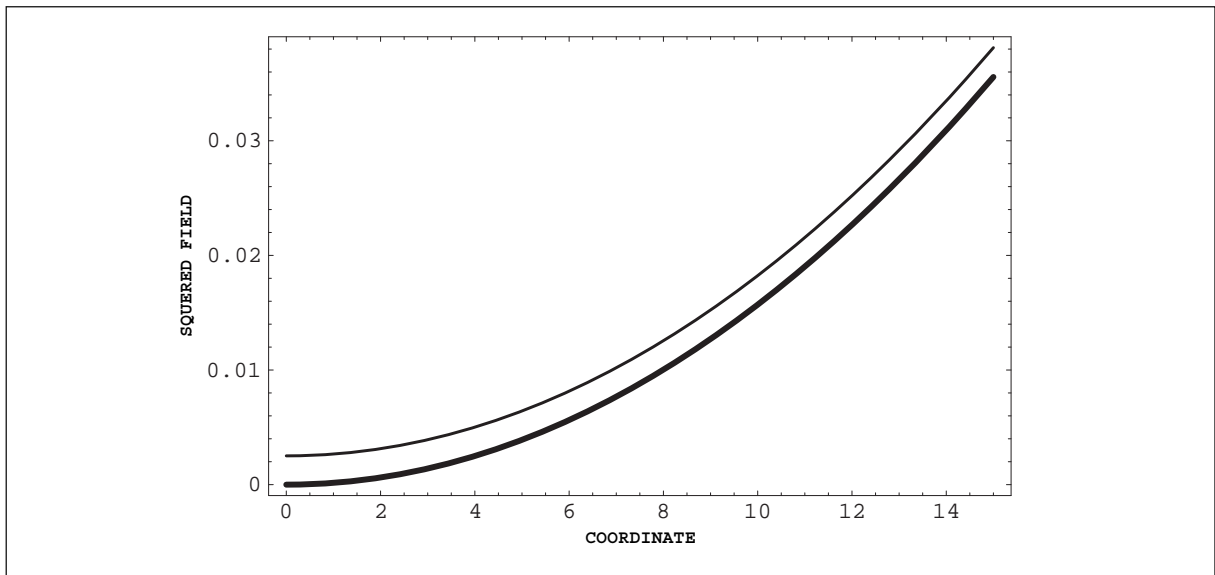


Рис. 17

где  $\omega_D$  – частота ДМ,  $q$  определены в (20), а  $z=0$  соответствует внешней поверхности ХЖК слоя. Координатные зависимости распределения энергии в ДМС представлены на рис. 16 ( $N=50$ ,  $d/p=1/4$ ,  $\delta=0,05$ ;  $0,04$ ;  $0,025$  соответственно, для верхней, средней и нижней кривых; координата по толщине ХЖК слоев обезразмерена величиной шага  $p$ ), а зависимости плотности потока энергии вблизи внешней поверхности ХЖК слоя внутрь структуры (жирная линия) и наружу – на рис. 17 при тех же значениях параметров, что на рис. 16  $\delta=0,05$ .

Рис. 16 демонстрирует, что, чем больше диэлектрическая анизотропия ХЖК  $\delta$ , тем возрастание плотности энергии в ДМ по направлению к дефектному слою структуры оказывается более быстрым. Рис. 17 показывает, что на внешней поверхности ХЖК слоя равен нулю только поток энергии, направленный внутрь ДМС, а поток энергии, направленный наружу хоть и мал, но отличен от нуля при конечных толщинах ХЖК слоев  $L$ .

Это обстоятельство приводит к утечке во вне энергии DM, которая исчезает только в пределе бесконечно больших толщин ХЖК слоя L. Отношение утечки энергии через поверхности ДМС к полной энергии DM, аккумулированной в ДМС, определяет обратное время жизни (а поэтому и частотную ширину линии) DM и соответствующая величина может быть представлена в аналитическом виде.

Для непоглощающих ХЖК слоев, которые рассматриваются здесь, единственным каналом убывания энергии DM является ее утечка через внешние поверхности ДМС. Ее убыль за единицу времени равна потоку энергии через внешние поверхности ДМС:  $(2c/\varepsilon_0^{1/2})|E_{out}|^2$ , где  $E_{out}$  – амплитуда волны, вытекающей из ДМС через внешние поверхности. Поэтому, используя (44) можно получить следующее выражение для  $\tau_m$ , времени жизни DM:

$$\tau_m = \int |E(\omega_D, z, t)|^2 dz / \{d[\int |E(\omega_D, z, t)|^2 dz]/dt\} = \int |E(\omega_D, z, t)|^2 dz / (2c/\varepsilon_0^{1/2}) |E_{out}|^2 = [(\delta\kappa^2/\tau q)^2] (L\varepsilon_0^{1/2}/2c) \{[1-(2/qL)\sin 2qL](1+\delta^{-2} [(\tau/2\kappa)^2 + (q/\kappa)^2 - 1]^2) + \delta^{-2}(\tau q/\kappa^2)^2(1+(2/qL)\sin 2qL)\}, \quad (45)$$

где интегрирование в силу симметрии ДМС ограничивается только половиной структуры. Анализ уравнения (45) показывает, что времени жизни  $\tau_m$  зависит от положения  $\omega_D$ , частоты DM, внутри ОСО и достигает максимума для  $\omega_D$  точно посередине ОСО, т.е. при  $k=\tau/2$ .

В общем случае описание DM требует численного решения дисперсионного уравнения (41). То обстоятельство, что  $\text{Re}\omega_D$  определяется частотой, соответствующей занулению коэффициента отражения в случае непоглощающих ХЖК слоев упрощает изучение DM в общем случае. В частности, т.к. время жизни DM может быть представлено как  $1/\text{Im}\omega_D$ , уравнение (45) для времени жизни  $\tau_m$  может быть применено для вычисления  $\text{Im}\omega_D$ . Однако существуют некоторые предельные случаи, упрощающие описание DM. В целом, как показывает анализ, чем толще ХЖК слои, тем больше время жизни DM, а в пределе бесконечно толстых ХЖК слоев время жизни DM становится бесконечным.

#### 4.3.4. ДМС с бесконечно толстыми ХЖК слоями

Рассмотрим задачу о DM в пределе бесконечно толстых ХЖК слоев в структуре, изображенной на рис. 11. В этом случае амплитуды собственных волн, распространяющихся в ХЖК слоях в направлениях к внешним поверхностям структуры должны обратиться в ноль. При этом ненулевыми амплитудами собственных волн оказываются только амплитуды собственных волн распространяющихся по направлению к дефектному слою. Это означает, что в уравнении, определяющем DM, остается только две неизвестных амплитуды собственных волн и оно принимает вид:

$$\exp[i kd] \exp[i K^+_{+L}] E^+_{+} = \exp[i K^+_{-L}] E^{+d}, \quad (46)$$

$$\xi^+ \exp[i K^-_{+L}] E^+_{+} = \exp[i kd] \xi^- \exp[i K^-_{-L}] E^{+d}.$$

Частота DM, т.е.  $\omega_D$ , в этом случае определяется условием зануления определителя системы (46), сводящегося к следующему соотношению:

$$-(2/\delta)\exp[i(k-q)d] \{(\tau q/\kappa^2) \cos(\tau/2-k)d + i[(\tau/2\kappa)^2 + (q/\kappa)^2 - 1] \sin(\tau/2-k)d\} = 0. \quad (47)$$



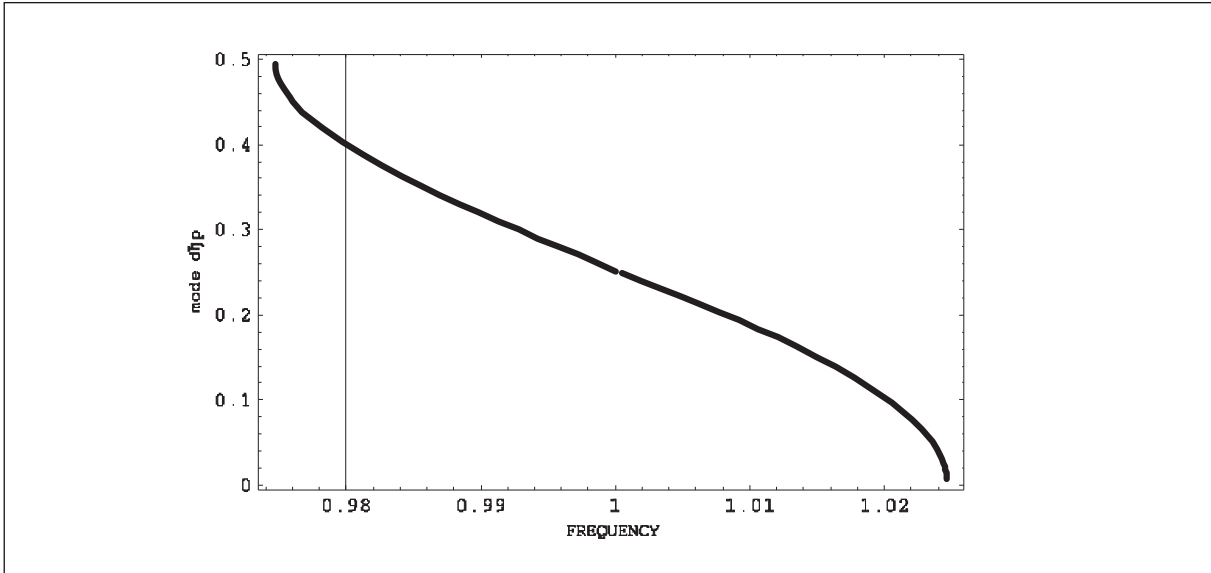


Рис. 18

Для частот внутри ОСО определитель (47) обращается в ноль, если толщина дефектного слоя  $d$  следующим образом связана с частотой:

$$(d/p)(1 - k/(\tau/2)) = (1/2\pi) \arctg \left[ \frac{2(\tau/2\kappa) \{ [4(\tau/2\kappa)^2 + \delta^2]^{1/2} - 1 - (\tau/2\kappa)^2 \}^{1/2}}{[2(\tau/2\kappa)^2 - [4(\tau/2\kappa)^2 + \delta^2]^{1/2}]} \right] \quad (48)$$

Это означает, что для любой частоты внутри ОСО существует ДМ, однако каждая выбранная частота реализуется при строго определенной толщине  $d$  дефектного слоя.

Обсуждаемая связь  $\omega_D$  с толщиной дефектного слоя в пределе бесконечной толщины ХЖК слоев приведена на рис. 18, на котором отсчет частоты ДМ смещен так, что брегговской частоте (см. (13)) соответствует 1 на оси абсцисс. Как уже упоминалось,  $\omega_D$  для  $d/p=1/4$  расположена точно в центре ОСО, что и подтверждает рис. 18. Этот результат следует непосредственно из (48), если предположить, что  $\omega_D$  расположена точно в середине ОСО, т.е.  $\tau/2\kappa=1$ . При этом (48) дает:

$$d/p = (1/2\pi) \arctg \left[ \frac{2 \{ [4 + \delta^2]^{1/2} - 2 \}^{1/2}}{[4 + \delta^2]^{1/2} - 2} \right] \approx (1/2\pi) \arctg [4/\delta]. \quad (49)$$

что приближенно соответствует  $d/p = 1/4 + n/2$ , где  $n$  – ноль или целое число.

Сдвиг  $\Delta\omega$  частоты  $\omega_D$ , обусловленный  $\Delta d$ , малыми изменениями толщины дефектного слоя, в интервале  $|\Delta\omega/\omega_B| < \delta$  вблизи  $d/p=1/4$ , приблизительно дается соотношением

$$\Delta\omega/\omega_B = -4\Delta d/p. \quad (50)$$

Как показывают вычисления,  $\omega_D$  слабо зависит от толщины ХЖК слоев  $L$ . Поэтому приведенные выше зависимости  $\omega_D$  от  $d/p$  для бесконечно больших  $L$  можно рассматривать как хорошее приближение для  $\omega_D$  при любых  $L$ .

Как известно, поле в ДМ локализовано в окрестности дефектного слоя. Рис. 19 ( $d/p = 1/4$ ,  $\delta = 0,05$ ;  $0,1$ ;  $0,2$  соответственно, для верхней, средней и нижней кривых; координата по толщине ХЖК слоев обезразмерена величиной шага  $p$ ), представляющий координатную зависимость распределения энергии в ДМ, иллюстрирует эту локали-

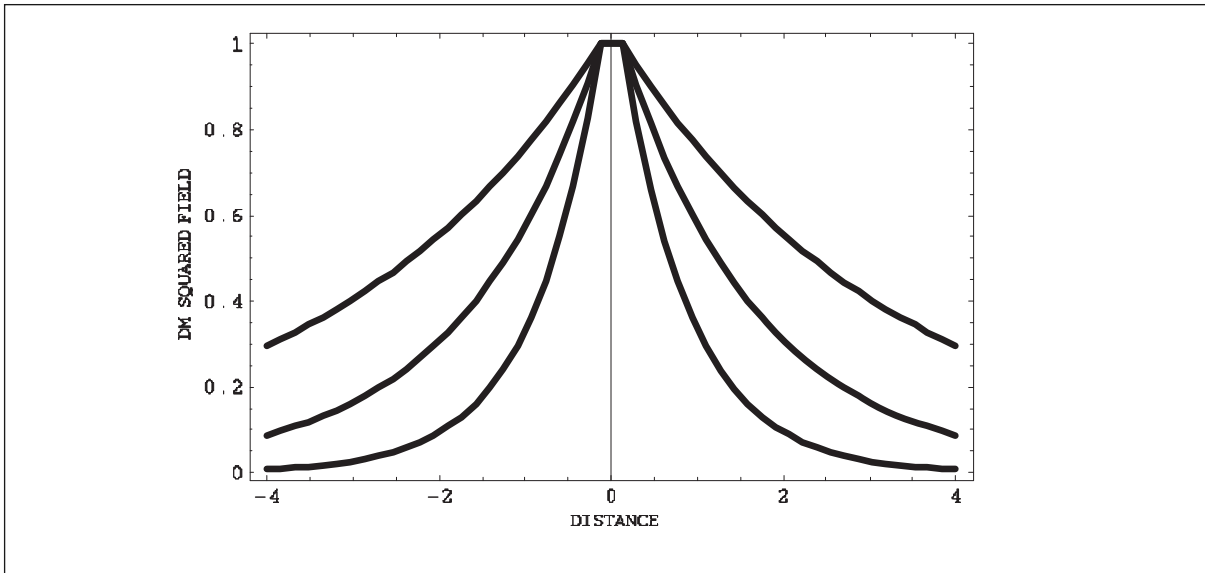


Рис. 19

зацию для случая бесконечно толстых ХЖК слоев в ДМС. Максимум амплитуды поля в ДМС расположен в дефектном слое и поле затухает экспоненциально с координатой вне дефектного слоя. Наиболее быстрое затухание реализуется для  $d/p=1/4$ , т.е. для  $\omega_D$  точно в центре ОСО. При удалении  $\omega_D$  от центра ОСО скорость экспоненциального затухания уменьшается. Затухание поля ДМ с координатой также усиливается с возрастанием диэлектрической анизотропии  $\delta$  (при фиксированных прочих параметрах).

Уравнения (47-49) демонстрируют, что для случая бесконечно толстых ХЖК слоев в ДМС  $\omega_D$  является действительной величиной и, следовательно, время жизни ДМ бесконечно. Для случая конечной толщины ХЖК слоев это не так. Физическая причина этого вполне прозрачна. Для конечной толщины ХЖК слоев, как уже отмечалось, происходит утечка энергии ДМ через внешние поверхности ДМС, что и приводит к конечному времени жизни ДМ. Из решения дисперсионного уравнения (41) отмеченный факт объясняется тем, что для конечной толщины ХЖК слоев решение дисперсионного уравнения дает комплексное значение  $\omega_D$ , что эквивалентно конечному времени жизни ДМ.

#### 4.3.5. ДМС с толстыми холестерическими слоями

В случае ДМС с толстыми ХЖК слоями ( $|q|L \gg 1$ ) также могут быть получены некоторые аналитические результаты, относящиеся к ДМ. Эти результаты можно получить как из дисперсионного уравнения (41), а также из выражений (36, 37) для коэффициентов пропускания и отражения ДМС.

Вместо непосредственного решения (41) для отыскания комплексной частоты ДМ могут быть использованы уравнения (36, 37) для коэффициентов пропускания и отражения ДМС с целью оценки мнимой составляющей частоты дефектной моды  $\omega_D$ . Следует считать, что частота имеет малую ненулевую мнимую добавку (определенную, например, соотношением  $\omega/\text{Re}[\omega] = \omega(1+i\Delta)$ , где  $\Delta$  является малой величиной) и найти экстремумы (36, 37) по отношению к этой малой мнимой добавке  $i\Delta$ . Оценить эту добавку можно по результатам соответствующих вычислений коэффициентов пропускания  $|T(d,L)|^2$  и отражения  $|R(d,L)|^2$  демонстрирующих, что мнимая добавка к частоте дефектной моды  $\omega_D$  уменьшается с возрастанием толщины ХЖК слоев, а также возрастает с приближением  $\text{Re}\omega_D$  к краям ОСО при фиксированной толщине ХЖК слоя.

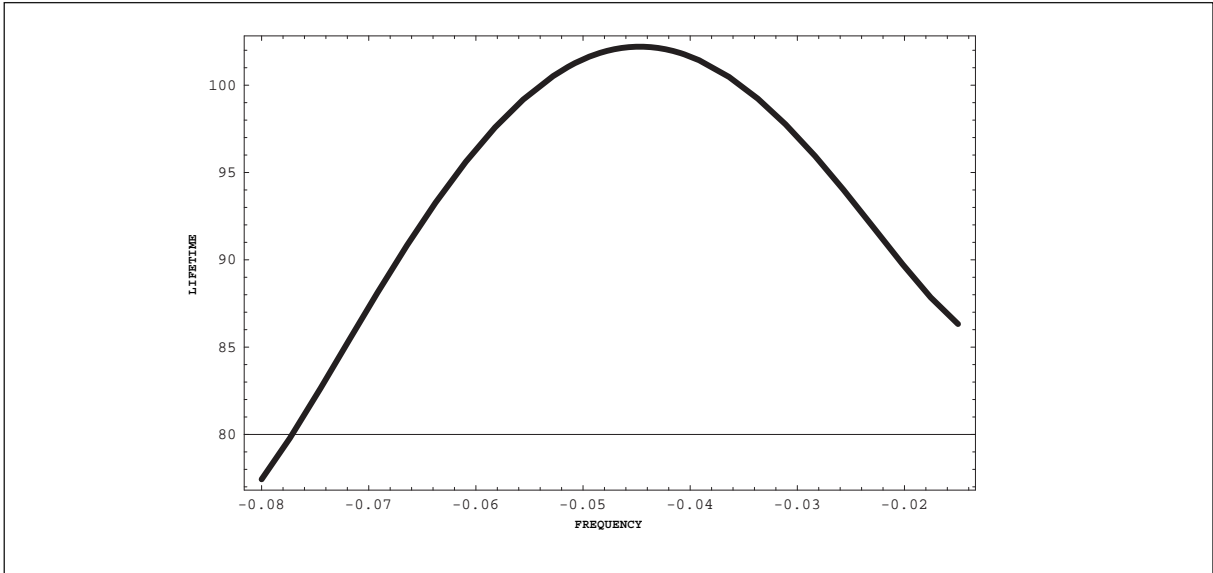


Рис. 20

На рис. 24 приведены результаты расчета времени жизни ДМ в частотном интервале, где выполняется условие  $|q|L \gg 1$ . В частности, как показывает рис. 24 (на котором приведены расчеты по формуле (53) времени жизни ДМ, обезразмеренное временем пролета света ДМС с  $N=40$ , как функции положения частоты дефектной моды  $\omega_D$  в ОСО, центру которой на оси абсцисс рисунка соответствует  $-0,05$ ), время жизни дефектной моды, определяемое как  $\tau = 1/|\text{Im}\omega_D|$ , экспоненциально возрастает с ростом толщины ХЖК слоя и достигает максимума для частоты дефектной моды в центре ОСО при фиксированной толщине ХЖК слоя.

Выполняя разложение знаменателей (36, 37) относительно малого параметра  $\Delta$ , можно найти аналитически закон роста времени жизни  $\tau$  при увеличении толщины слоев ХЖК, т.е. величину  $\Delta$  (в пределе  $|q|L \gg 1$ ), соответствующую расходимости коэффициентов пропускания и отражения ДМС как функции  $\Delta$ .

Соответствующее выражение для  $\Delta$  как функции  $L$  дается формулой:

$$\Delta = \Delta q / [iqF(\delta^2)], \tag{51}$$

где  $\Delta q$  – изменение  $q$  связанное с мнимой добавкой к частоте дефектной моды  $\omega_D$ , обеспечивающее расходимости коэффициентов пропускания и отражения ДМС.

$$F(\delta^2) = \tau + \{1/(2[(\tau/\kappa)^2 + \delta^2]^{1/2}) - (\tau/2\kappa)^2\} / (1 - [(\tau/\kappa)^2 + \delta^2]^{1/2} + (\tau/2\kappa)^2)$$

и

$$\Delta q = [2\kappa^2/(q\tau L)] \exp[-|q|L].$$

Т.к. время жизни дефектной моды  $\tau_m = 1/\text{Im}\omega_D$ , выражение (51) дает экспоненциальное возрастание  $\tau_m$  с ростом толщины ХЖК слоев  $L$ , показывая при этом сильную зависимость скорости возрастания  $\omega_D$ , частоты ДМ, от ее положения внутри ОСО. Если  $\omega_D$  расположена точно по центру ОСО выражение (51) для  $\Delta$  принимает следующий вид:

$$\Delta = -(2/3\pi)(p/L) \exp[-2\pi\delta(L/p)]. \tag{52}$$

Зависимость времени жизни ДМ от положения  $\omega_D$ , частоты ДМ, внутри ОСО, рассчитанные по формуле (51), приведены на рис. 20.

Найденные по формулам (51, 52) величины  $\Delta$  можно рассматривать как исходное приближение в численных расчетах для случаев произвольной толщины ХЖК слоев  $L$ . Те же результаты для  $\tau_m$ , времени жизни ДМ для толстых ХЖК слоев  $L$  в ДМС ( $|q|L \gg 1$ ) дает выражение Eq. (45), определяющее время жизни  $\tau_m$  через утечку энергии через поверхности ДМС:

$$\tau_m = [(\delta\kappa^2/\tau q)^2] (L\epsilon_0^{1/2}/2c)[1/(\delta^2 qL)] \{ [(\tau/2\kappa)^2 + (q/\kappa)^2 - 1]^2 + [(\tau q/\kappa^2)^2] \} \exp[2|q|L]. \quad (53)$$

В случае положения  $\omega_D$  точно в середине ОСО уравнение (53) дает:

$$\tau_m = [(3\pi/c\tau)(L/p)\epsilon_0^{1/2} \exp[2\pi\delta L/p]]. \quad (54)$$

И, как следовало ожидать, максимум  $\tau_m$ , времени жизни ДМ, соответствует положению частоты ДМ точно в середине ОСО, т.е. при  $k=\tau/2$ , где  $| \cdot |$  достигает своего максимума.

#### 4.3.6. ДМС с поглощающими слоями ХЖК

Применим теперь формулы (36, 37) к ДМС (см. рис. 11) с поглощающими ХЖК слоями. Этот случай, например, имеет прямое отношение к лазерной генерации в ХЖК: на частоте генерации ХЖК должен быть усиливающим, и в тоже время поглощающим на частоте волны накачки. Чтобы учесть поглощение введем так же, как в рассмотренном случае ЕМ, малый параметр  $\gamma$ , равный отношению мнимой части диэлектрической проницаемости к действительной части, т.е.  $\epsilon = \epsilon_0(1+i\gamma)$ . Отметим, что в реальных ситуациях  $\gamma \ll 1$ . Естественным следствием ненулевого поглощения, т.е.  $\gamma > 0$ , является уменьшение коэффициентов пропускания  $T(d)$  и отражения  $R(d)$  ДМС. Однако, кроме того проявляются интересные особенности оптических характеристик, рассматриваемой нами структуры (рис. 11). Результаты расчетов полного поглощения в ДМС в зависимости от значений  $\gamma$ , представленные на рис. 25-28 ( $N=33$ ,  $d/p=0,1$ ), выявляют эти особенности. Для поглощающих структур  $|T(d,L)|^2 + |R(d,L)|^2 < 1$  и представленная на рис. 25-28 величина  $A_{tot} = 1 - |T(d,L)|^2 - |R(d,L)|^2$  дает суммарное поглощение в структуре. До относительно сильного поглощения ( $\gamma = 0.005$  на рис. 21) спектральные формы отражения и пропускания сохраняют типичные для ДМС минимумы и максимумы в отражении и пропускании, соответственно, однако отличающиеся от соответствующих величин для случая непоглощающих ХЖК слоев (см. рис. 13, 14).

При уменьшении  $\gamma$  до малых величин спектральная форма отражения и поглощения почти приближается к соответствующим формам (см. рис. 17, 18) для случая непоглощающих ХЖК, однако, суммарное поглощение  $(1 - |T(d,L)|^2 - |R(d,L)|^2)$  на частоте ДМ ведет себя необычно.

Что касается суммарного поглощения, то оно демонстрирует необычную частотную зависимость. При небольших  $\gamma$  для частот, совпадающих с частотами ДМ, суммарное поглощение оказывается намного больше, чем поглощение вне ОСО (см. рис. 22-24).

Если величина  $\gamma$  не слишком мала (рис. 21,  $\gamma = 0.005$ ), то возрастание суммарного поглощения проявляет себя на границе ОСО.

Это является проявлением, так называемого, «эффекта аномально сильного поглощения» для совершенных ХЖК слоев на частоте ЕМ (см. (24-25)). Для меньших  $\gamma$

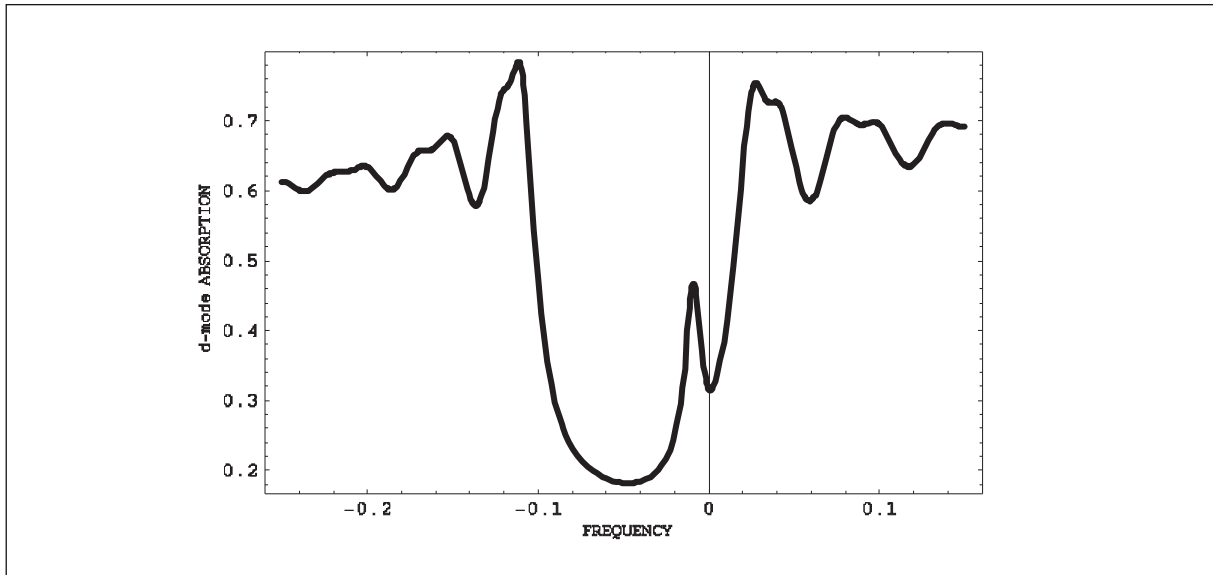


Рис. 21

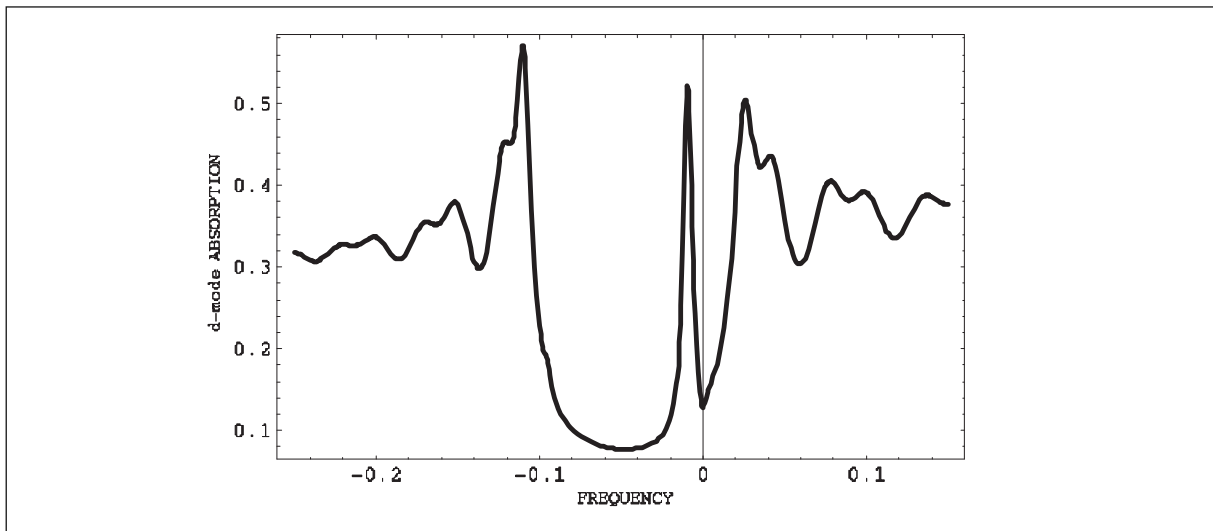


Рис. 22

суммарное поглощение начинает превосходить поглощение вне ОСО на частоте дефектной моды  $\omega_D$ , оказываясь примерно таким же, как для ЕМ (рис. 23,  $\gamma = 0.002$ ). При дальнейшем уменьшении  $\gamma$  эффект anomalно сильного поглощения становится сильнее на частоте дефектной моды, чем на частоте краевой моды (рис. 23,  $\gamma = 0.001$ ; рис. 24,  $\gamma = 0.0003$ ). Таким образом, на  $\omega_D$ , частоте DM, существует эффект anomalно сильного поглощения, подобный эффекту на частоте краевой моды (см. (23-25)), более того, усиление поглощения на DM при малых  $\gamma$  оказывается больше чем для ЕМ. Ясно, что эффект anomalно сильного поглощения на частоте DM обязан своим происхождением локализованным DM, существующим на ДМС. Его реализация предполагает наличие некоторого соотношения между  $\gamma$  и другими параметрами ХЖК. Соответствующее соотношение определяется условием:

$$\partial(1 - |T(d,L)|^2 - |R(d,L)|^2) / \partial\gamma = 0. \quad (55)$$

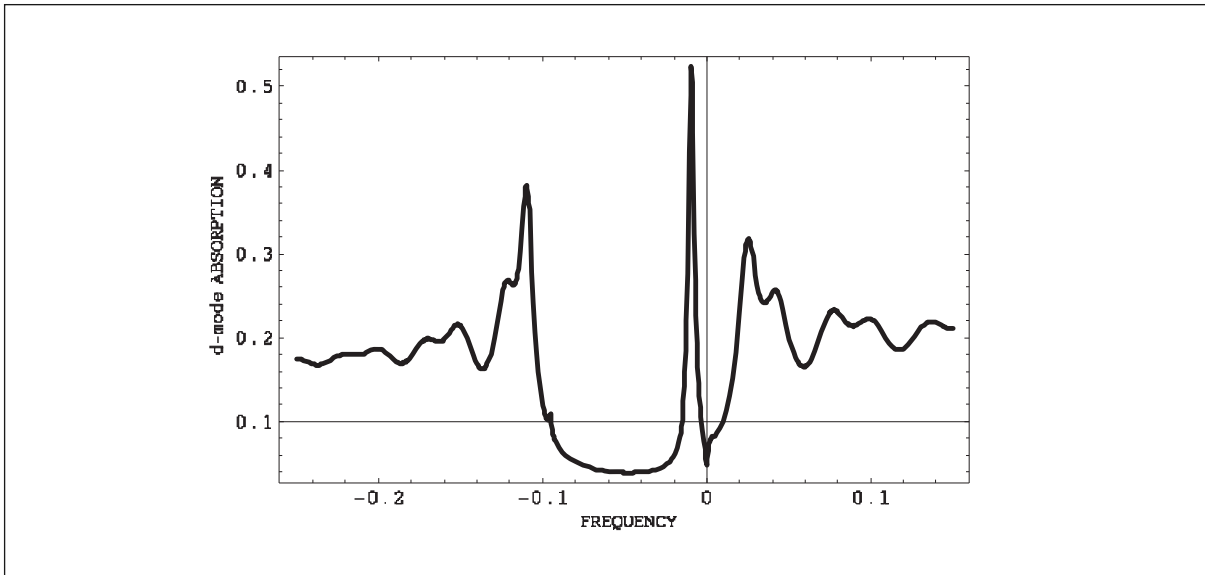


Рис. 23

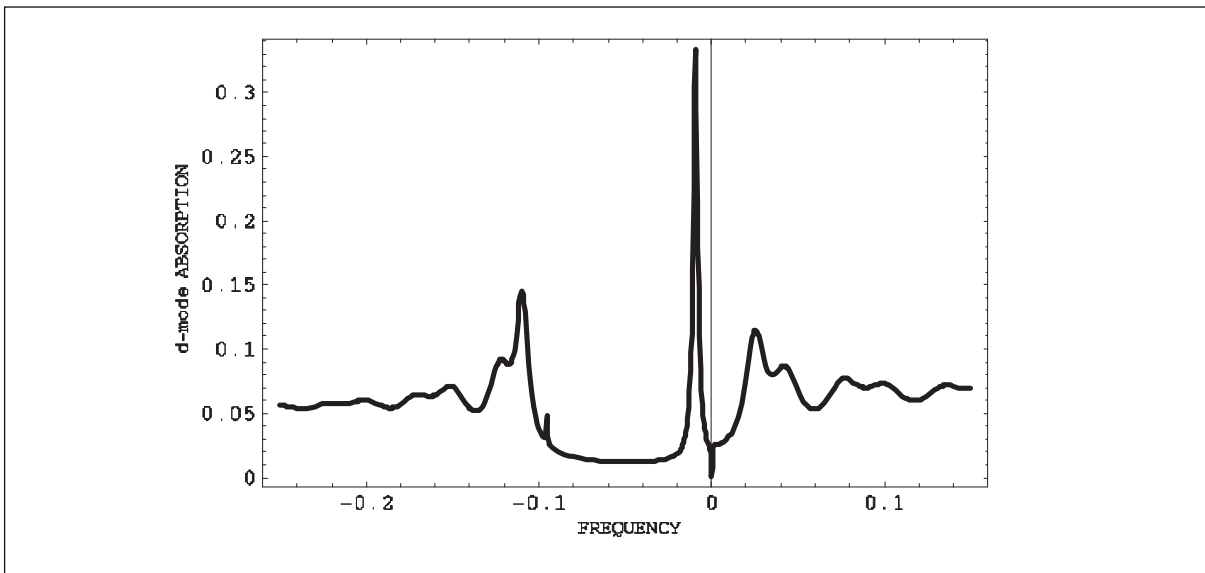


Рис. 24

В общем случае для решения уравнения (55) требуется применение численных методов. Однако, в случае толстых ХЖК слоев ( $|q|L \gg 1$ ) зависимость  $\gamma$  от  $L$  и других параметров, обеспечивающая максимальное суммарное поглощение, может быть найдена аналитически:

$$\gamma = 2[2\kappa^2/(q\tau L)] \exp[|q|L] (1/iq) / \{1 + \{1/(2[(\tau/\kappa)^2 + \delta^2]^{1/2}) - (\tau/2\kappa)^2\} / (1 - [(\tau/\kappa)^2 + \delta^2]^{1/2} + (\tau/2\kappa)^2)\} \} \quad (56)$$

Величина  $\gamma$ , даваемая (56), может рассматриваться как начальное приближение в численных расчетах для произвольной толщины ХЖК слоев  $L$ . На рис. 25 (для ДМС с  $N=40$ ) приведены результаты расчетов частотной зависимости  $\gamma$  по формуле (56) для толстых ХЖК слоев в ДМС в пределе  $|q|L \gg 1$  как функции положения частоты дефектной моды  $\omega_D$  в ОСО, центру которой на оси абсцисс рисунка соответствует  $-0,05$ .

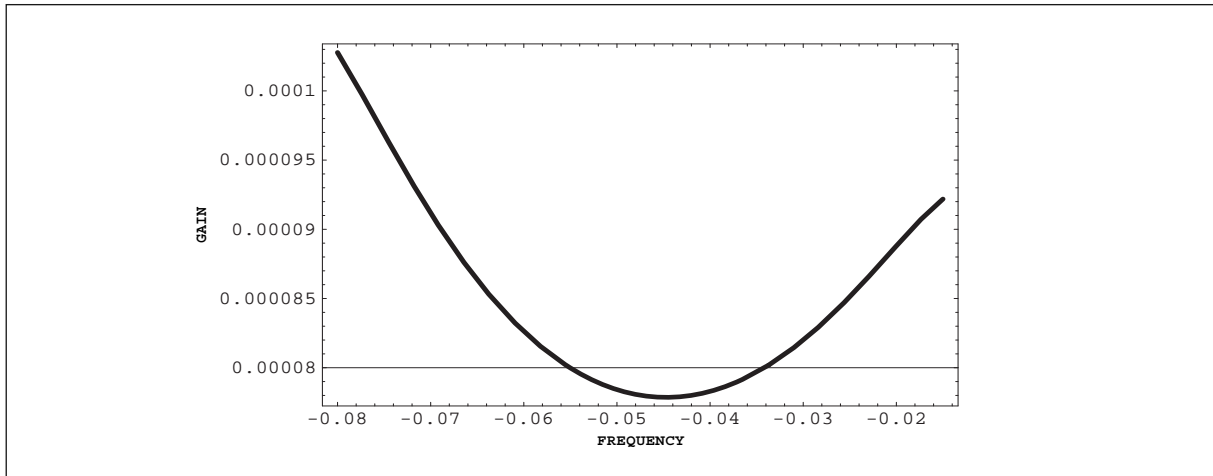


Рис. 25

рис. 29 демонстрирует, что максимальное усиление поглощения происходит в центре ОСО.

Для положения  $\omega_D$  в центре ОСО выражение (56) для  $\gamma$  принимает следующий вид

$$\gamma = (4/3\pi)(p/L) \exp[-2\pi\delta(L/p)] \quad (57)$$

Заметим, что «эффект аномально сильного поглощения» на частоте DM и его реализация в условиях определенной взаимосвязи между  $\gamma$  и другими параметрами обнаруживает себя в вычислениях суммарного поглощения на частоте DM как функции  $\gamma$ .

#### 4.3.7. ДМС с усиливающими слоями ХЖК

Рассмотрим теперь формулы (36, 37) для коэффициентов отражения и прохождения в случае усиливающих ХЖК слоев. Как и выше мы представим диэлектрическую проницаемость той же формулой  $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + i\gamma)$ , однако теперь при  $\gamma < 0$ . Результаты вычислений коэффициентов прохождения  $|T(d,L)|^2$ , отражения  $|R(d,L)|^2$  и суммарного поглощения при  $\gamma < 0$  представлены на рис. 26-26 ( $N=33$ ,  $d/p=0,1$ ). Для небольших по абсолютной величине  $\gamma$  форма коэффициентов прохождения  $|T(d,L)|^2$  и отражения  $|R(d,L)|^2$  остается качественно той же, что и в отсутствии усиления ( $\gamma = 0$ ) (рис. 13, 14). Поглощение теперь оказывается небольшой отрицательной величиной (что означает усиление) на всех частотах с некоторым увеличением усиления на частотах дефектной и краевой мод (рис. 26,  $\gamma = -0,00005$ ).

При возрастании абсолютной величины  $\gamma$  форма коэффициента отражения  $|R(d,L)|^2$  изменяется при некотором значении  $\gamma$  (типичный минимум в  $|R(d,L)|^2$  заменяется на небольшой максимум, близкий к 1, а прохождение  $|T(d,L)|^2$  значительно превосходит 1 (рис. 27,  $\gamma = -0,00006$ ).

При дальнейшем возрастании абсолютной величины  $\gamma$  коэффициенты прохождения и отражения на частоте дефектной моды для выбранных значений параметров задачи для рис. 28 ( $\gamma = -0,00117$ ) превосходят сотню без каких-либо следов заметных максимумов на других частотах. Соответствующее значение  $\gamma$  можно считать близким к пороговому значению лазерной РОС генерации на частоте дефектной моды. Продолжая увеличивать абсолютное значение величины  $\gamma$  мы обнаруживаем, что возникают расходящиеся максимумы  $|R(d,L)|^2$  на частоте краевой моды (без каких-нибудь следов максимумов на частоте дефектной моды) с порогом ( $\gamma$ ) в пять раз более высоким, чем для дефектной моды (рис. 29,  $\gamma = -0,0045$ ). При дальнейшем увеличении абсолютного

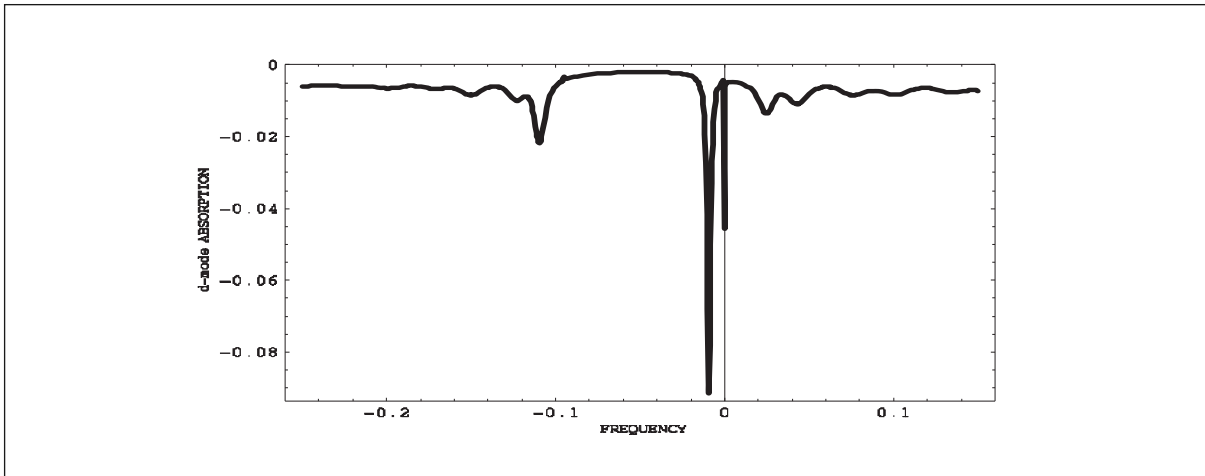


Рис. 26

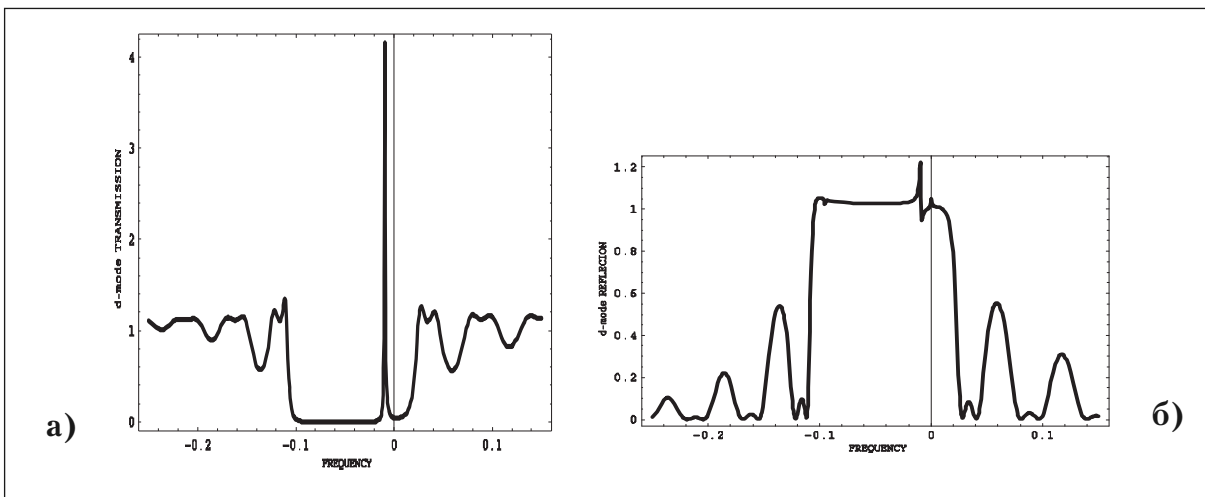


Рис. 27

значения  $\gamma$  обнаруживается, что возникают максимумы  $|R(d, L)|^2$ , более удаленные от границы ОСО, соответствующие новым краевым модам с  $n > 1$  (см. раздел **Локализованные краевые моды**).

Выявленные закономерности показывают, что **порог лазерной генерации на частоте дефектной моды оказывается ниже, чем соответствующий порог на частоте краевой моды**. Другой вывод состоит в том, что **существует определенная взаимосвязь между пороговым  $\gamma$  и параметрами жидкого кристалла**, которая для случая толстых ХЖК слоев была найдена аналитически (для DM см. (57)) и для EM (см. (27)). Действительно, при непрерывном увеличении  $\gamma$  результатом оказывается последовательное возникновение лазерной генерации на частотах новых краевых мод с исчезновением генерации на предыдущих модах, с меньшим  $n$ , соответствующих генерации с более низким порогом.

Чтобы найти обсуждаемую связь между пороговым  $\gamma$  и параметрами жидкого кристалла следует решить дисперсионное уравнение для DM (41) в предположении, что ХЖК слои являются усиливающими ( $\gamma < 0$ ). В общем случае для этого следует применять численные методы. Однако, в случае толстых ХЖК слоев ( $|q|L \gg 1$ ) зависимость порогового  $\gamma$  от  $L$  и других параметров может быть найдена аналитически. Например, если  $\omega_D$ , частота DM, расположена в центре ОСО соответствующая связь порогового  $\gamma$  с другими параметрами дается формулой:



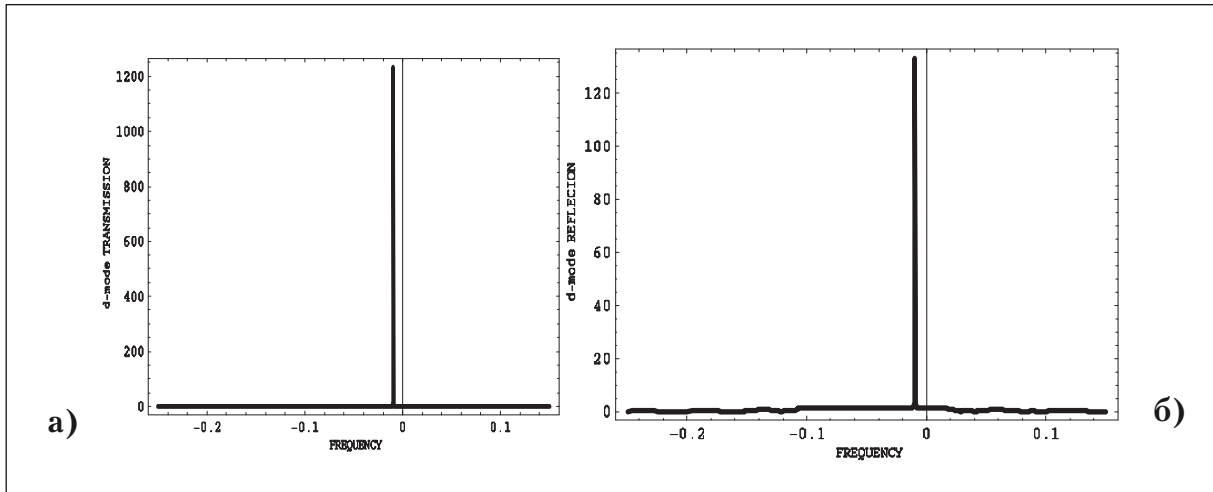


Рис. 28

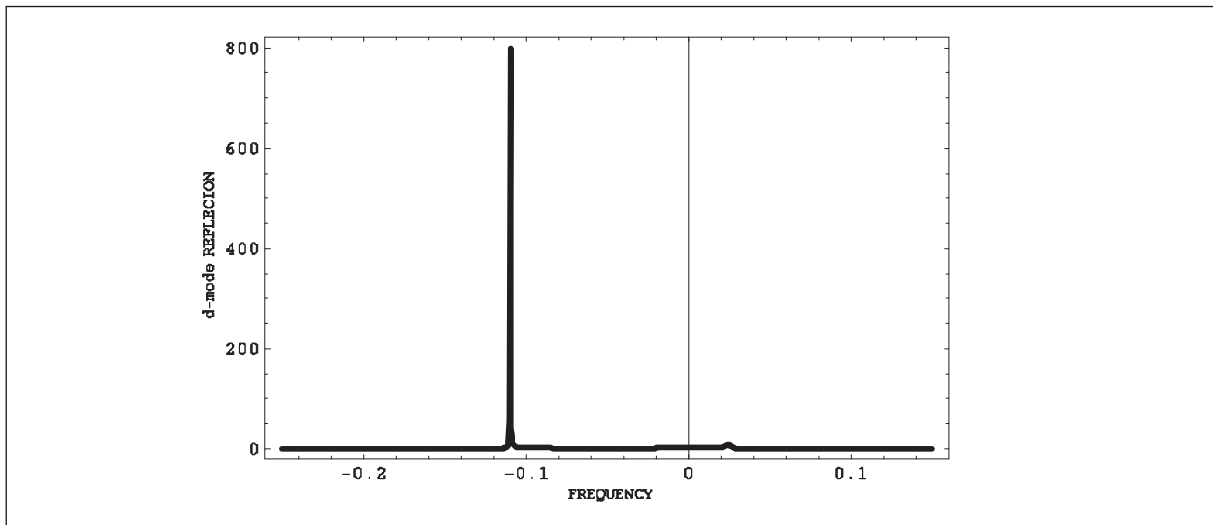


Рис. 29

$$\gamma = -(4/3\pi)(p/L) \exp[-2\pi\delta(L/p)], \quad (58)$$

которая только знаком отличается от выражения (57). Следующая из (58) экспоненциальная малость  $|\gamma|$  в случае толстых ХЖК слоев подтверждает сделанное выше утверждение, о более низком пороге лазерной генерации на частоте DM, чем на частоте EM. Действительно, как было показано выше, лазерный порог на частоте EM  $|\gamma|$  для толстых ХЖК слоев уменьшается не экспоненциально с ростом толщины ХЖК слоя L, а только обратно пропорционально третьей степени L.

#### 4.4. ДМС с активным дефектным слоем

Пока что мы считали, что дефектный слой в ДМС является слоем изотропного материала. Такая ситуация вполне типична, однако встречаются ситуации, в которых это предположение не соблюдается, так как дефектный слой обладает двупреломлением, либо может быть поглощающим или усиливающим. Например, последняя возможность может быть актуальной для РОС лазерной генерации в ситуациях, когда краситель (основной элемент активной среды) проще вводить в материал дефектного слоя, чем в ХЖК слой ДМС [11, 14-17]. Поэтому ниже будет рассмотрена ДМ в ДМС с активным дефектным слоем. Начнем со случая двупреломляющего дефектного слоя в ДМС [15, 16].

#### 4.4.1 Дефектная мода на двупреломляющем дефектном слое

Чтобы описать ДМ в случае двупреломляющего дефектного слоя в ДМС (рис. 15) требуется решить Уравнения Максвелла и граничную задачу, соответствующую рис. 11 с двупреломляющим дефектным слоем. Соответствующая задача решается аналогично тому, как это было сделано в предыдущих разделах для случая изотропного дефектного слоя с сохранением всех основных предположений принятых там. Поэтому, не повторяя подробно выводы формул предыдущих разделов, приведем соответствующие формулы для рассматриваемого случая, включая в них некоторые физически ясные поправки, относящиеся к случаю двупреломляющего дефектного слоя в ДМС. Теперь справедливое выше предположение об отсутствии преобразования круговой дифрагирующей поляризации в ДМС (обязанное тому, что усредненная диэлектрическая проницаемость ХЖК  $\epsilon_0$  совпадает как с диэлектрической проницаемостью дефектного слоя, так и с диэлектрической проницаемостью среды вне ДМС) и достаточно принимать во внимание только дифрагирующую круговую поляризацию оказывается нарушенным. Действительно, благодаря двупреломлению дефектного слоя поляризация света, вообще говоря, изменяется в ходе его распространения от одной поверхности дефектного слоя до другой его поверхности и поляризация света после прохождения дефектного слоя отличается от поляризации света на его входе в дефектный слой. Поэтому в ДМС оказывается представленной волна недифрагирующей поляризации и происходит утечка из структуры света недифрагирующей поляризации. Естественным следствием этой утечки оказывается, в общем случае, уменьшение времени жизни ДМ в случае ДМС с двупреломляющим дефектным слоем.

Как мы видели выше, спектры пропускания  $|T(d,L)|^2$  и отражения  $|R(d,L)|^2$  ДМС содержат богатую информацию о ДМ. Поэтому приведем выражения для этих величин в случае ДМС с двупреломляющим дефектным слоем. В пренебрежении многократным рассеянием света недифрагирующей поляризации в ДМС для света дифрагирующей поляризации коэффициенты пропускания  $|T(d,L)|^2$  и отражения  $|R(d,L)|^2$  ДМС с двупреломляющим дефектным слоем даются формулами:

$$|T(d,L)|^2 = | [T_e T_d M(k,d,\Delta n) (\sigma_e \sigma_{ed}^*)] / [1 - M^2(k,d,\Delta n) (\sigma_r \sigma_{ed}^*)^2 (R_d R_u)] |^2, \quad (59)$$

$$|R(d,L)|^2 = | \{ R_e + R_d T_e T_u M^2(k,d,\Delta n) | (\sigma_e \sigma_{ed}^*) |^2 / [1 - M^2(k,d,\Delta n) | (\sigma_r \sigma_{ed}^*)^2 R_d R_u ] \} |^2, \quad (60)$$

где  $\sigma_e$ ,  $\sigma_r$  и  $\sigma_{ed}$  – это вектора поляризации света, выходящего в дефектный слой из ХЖК слоя через внутреннюю поверхность ХЖК слоя, отраженного от внутренней нижней границы ХЖК слоя при падении на нее света из дефектного слоя и света, чей вектор поляризации  $\sigma_{ed}$  преобразуется в вектор поляризации  $\sigma_e$  при прохождении двупреломляющего дефектного слоя толщины  $d$ , соответственно,  $\Delta n$  – разность двух показателей преломления в двупреломляющем дефектном слое и  $M(k,d,\Delta n)$  – фазовый фактор, определяемый разностью фаз пучков света двух собственных линейных поляризаций при прохождении двупреломляющего дефектного слоя толщины  $d$ . При получении (59, 60) предполагалось, что внешний пучок падает на ДМС (рис. 11) сверху. При наличии границы ХЖК слоев с двупреломляющим дефектным слоем при прохождении (отражения от) этой границы из ХЖК слоя света дифрагирующей круговой поляризации его поляризация перестает быть чисто круговой дифрагирующей поляризацией. Соответствующий вектор поляризации может быть найден [5-8] так же, как и вектор поляризации  $\sigma_{ed}$ , если известны  $d$  и  $\Delta n$ . То же самое может быть сказано о поляризации внешнего пучка света, который возбуждает в ДМС только дифрагирующие собственные волны ХЖК при своем падении на ДМС. Соответствующую поляризацию

внешнего пучка света будем называть далее дифрагирующей поляризацией. Поляризацию, ортогональную дифрагирующей поляризацией будем называть недифрагирующей поляризацией. Свет недифрагирующей поляризацией при своем падении извне на ДМС возбуждает в ХЖК слоях только недифрагирующие собственные волны. Вектора поляризации  $\sigma_e$ ,  $\sigma_r$  и  $\sigma_{ed}$  могут быть представлены в виде:

$$\sigma_i = (\cos\alpha_i \mathbf{e}_x + e^{i\beta} \sin\alpha_i \mathbf{e}_y), \quad (61)$$

где  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  являются единичными векторами вдоль осей  $x$  и  $y$ , а  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  — параметры, определяющие вид поляризации. Так, например,  $\alpha_i = \pi/4$  и  $\beta_i = \pi/2$  ( $-\pi/2$ ) соответствуют правой (левой) круговой поляризации.

В общем случае отраженный и прошедший через ДМС пучки не обладают круговой дифрагирующей поляризацией в случае двупреломляющего дефектного слоя и поэтому в отраженном и прошедшем пучках света имеются составляющие с недифрагирующей поляризацией даже в случае падения на ДМС света с дифрагирующей круговой поляризацией. Пренебрегая многократным рассеянием света недифрагирующей поляризации, можно получить следующее выражение для коэффициентов отражения  $R(d,L)^-$  и прохождения  $T(d,L)^-$  света с недифрагирующей поляризацией (для падающего пучка с дифрагирующей круговой поляризацией):

$$\left| T(d,L)^- \right|^2 = \left| [T_e T_d \{M(k,d,\Delta n)(\sigma_e \sigma_{ed}^\perp)^* + (\sigma_r \sigma_{ed}^*)(\sigma_e \sigma_{ed}^*)(\sigma_r \sigma_{ed}^\perp)^*\} M^2(k,d,\Delta n) / [1 - M^2(k,d,\Delta n)(\sigma_r \sigma_{ed}^*)^2 R_d R_u]] \right|^2, \quad (62)$$

$$\left| R(d,L)^- \right|^2 = \left| \{R_e^- + R_d T_e T_u M^2(k,d,\Delta n) (\sigma_e \sigma_{ed}^*)(\sigma_r \sigma_{ed}^\perp)^* / [1 - M^2(k,d,\Delta n)(\sigma_r \sigma_{ed}^*)^2 R_d R_u]\} \right|^2, \quad (63)$$

где  $R_e^-$  — это коэффициент отражения от слоя ХЖК света недифрагирующей поляризации с учетом диэлектрической границы при падении света дифрагирующей поляризации,  $T^-$  — коэффициент прохождения слоя ХЖК света недифрагирующей поляризации с учетом диэлектрической границы при падении света дифрагирующей поляризации и  $\sigma_{ed}^\perp$  — вектор поляризации, ортогональный вектору поляризации  $\sigma_{ed}$ . Заметим, что амплитудные коэффициенты прохождения  $T_d^-$  и  $T_u^-$  равны приблизительно  $\exp[ikL n_0 / n_0]$ , где  $n_0$  — показатель преломления света недифрагирующей поляризации в слое ХЖК.

Вычисление коэффициентов отражения и прохождения по формулам (59-60, 62-63) может быть выполнено аналитически в общем случае, однако оказывается очень громоздким. Поэтому ниже обсуждается в деталях случай малого двупреломления и представлены выражения для  $\left| T(d,L)^- \right|^2$  и  $\left| R(d,L)^- \right|^2$ , учитывающие трансформацию поляризации только в дефектном слое и пренебрегающие трансформацией поляризации на диэлектрических границах.

При сделанных выше упрощениях и в предположении, что показатель преломления вне ДМС совпадает со средним показателем преломления ХЖК и что показатель преломления двупреломляющего дефектного слоя может быть представлен в виде

$$n_{\max} = n_0 + \Delta n/2, \quad n_{\min} = n_0 - \Delta n/2, \quad (64)$$

где  $n_0$  совпадает со средним показателем преломления ХЖК, а  $\Delta n$  мало, фазовый фактор  $M(k,d,\Delta n)$  может быть записан в следующем виде:

$$M(k,d,\Delta n) = \exp[ikd] \cos(\Delta\phi/2), \quad (65)$$

где разность фаз двух составляющих пучка с различными собственными линейными поляризации на толщине дефектного слоя составляет  $\Delta\varphi = \Delta nkd/n_0$ .

Окончательно выражения для коэффициентов отражения и прохождения света с дифрагирующей круговой поляризацией для падающего пучка с дифрагирующей круговой поляризацией в случае малого двупреломления получаются подстановкой (65) в (59-60):

$$|T(d,L)|^2 = | [T_e T_d \exp[ikd] \cos(\Delta\varphi/2)] / [1 - \exp[i2kd] \cos^2(\Delta\varphi/2) R_d R_u] |^2, \quad (66)$$

$$|R(d,L)|^2 = | \{R_e + R_d T_e T_u \exp[i2kd] \cos^2(\Delta\varphi/2) / [1 - \exp[i2kd] \cos^2(\Delta\varphi/2) R_d R_u] \} |^2 \quad (67)$$

Уравнения (66, 67) показывают, что, если величина  $\Delta\varphi/2\pi$  является целым числом, уравнения (66, 67) оказываются идентичными соответствующим уравнениям для ДМС с изотропным дефектным слоем (36, 37), так как в этом случае отсутствует конверсия дифрагирующей круговой поляризации в недифрагирующую круговую поляризацию, однако, если  $\Delta\varphi/2\pi$  не является целым числом, происходит конверсия дифрагирующей круговой поляризации в недифрагирующую круговую поляризацию и, следовательно, имеет место утечка света из ДМС и, в частности, оказывается, что время жизни DM становится меньше, чем время жизни DM для соответствующей ДМС с изотропным дефектным слоем. Эта зависимость характеристик DM от разности фаз волн собственных поляризаций на толщине дефектного при их прохождении этого слоя открывает возможности для управления свойствами DM. Простейший такой способ связан с вариациями величины двупреломления или толщины дефектного слоя.

Конверсия поляризации света в ДМС приводит к появлению компонент недифрагирующей круговой поляризации в прошедшем ДМС и отраженном пучках. В случае малого двупреломления, который соответствует условию  $\Delta n/n_0 < \delta$ , амплитудные коэффициенты прохождения и отражения света недифрагирующей круговой поляризации (при падающем свете дифрагирующей круговой поляризации) описываются выражениями:

$$T(d,L) = [T_e \exp[ikLn/n_0] \exp[ikd] \sin(\Delta\varphi/2)] / [1 - \exp[i2kd] \cos^2(\Delta\varphi/2) R_d R_u], \quad (68)$$

$$R(d,L) = \frac{1}{2} R_u T_e \exp[ikLn/n_0] \exp[i2kd] \sin(\Delta\varphi) / [1 - \exp[i2kd] \cos^2(\Delta nkd/2n_0) R_d R_u], \quad (69)$$

где  $n$  – коэффициент преломления света недифрагирующей круговой поляризации в слое ХЖК.

Результаты вычисления коэффициента прохождения  $|T(d,L)|^2$  света дифрагирующей круговой поляризации в случае слабого двупреломления представлены на рис. 30 ( $N=33$ ,  $d/p=0,25$ ) для нескольких различных значений разности фаз  $\Delta\varphi$  соответствующего однократному прохождению пучка через двупреломляющий дефектный слой. Рис. 30 ( $\Delta\varphi = \pi/20$  (a);  $\pi/16$  (b);  $\pi/12$  (c);  $\pi/8$  (d);  $\pi/6$  (e);  $\pi/4$  (f);  $\pi/2$  (g); 0 (h)) демонстрирует, что при малых значениях фазового сдвига между собственными волнами дефектного слоя при однократном прохождении пучка через двупреломляющий дефектный слой ( $\Delta\varphi < \pi/2$ ) форма кривой пропускания очень близка к форме соответствующей кривой для ДМС с изотропным дефектным слоем (для  $\Delta\varphi/2\pi$ , равном целому числу или нулю она просто совпадает с кривой для ДМС с изотропным дефектным слоем). Однако, при приближении  $\Delta\varphi$  к  $\pi/2$  (см. рис. 34 e-g) типичное для случая изотропного

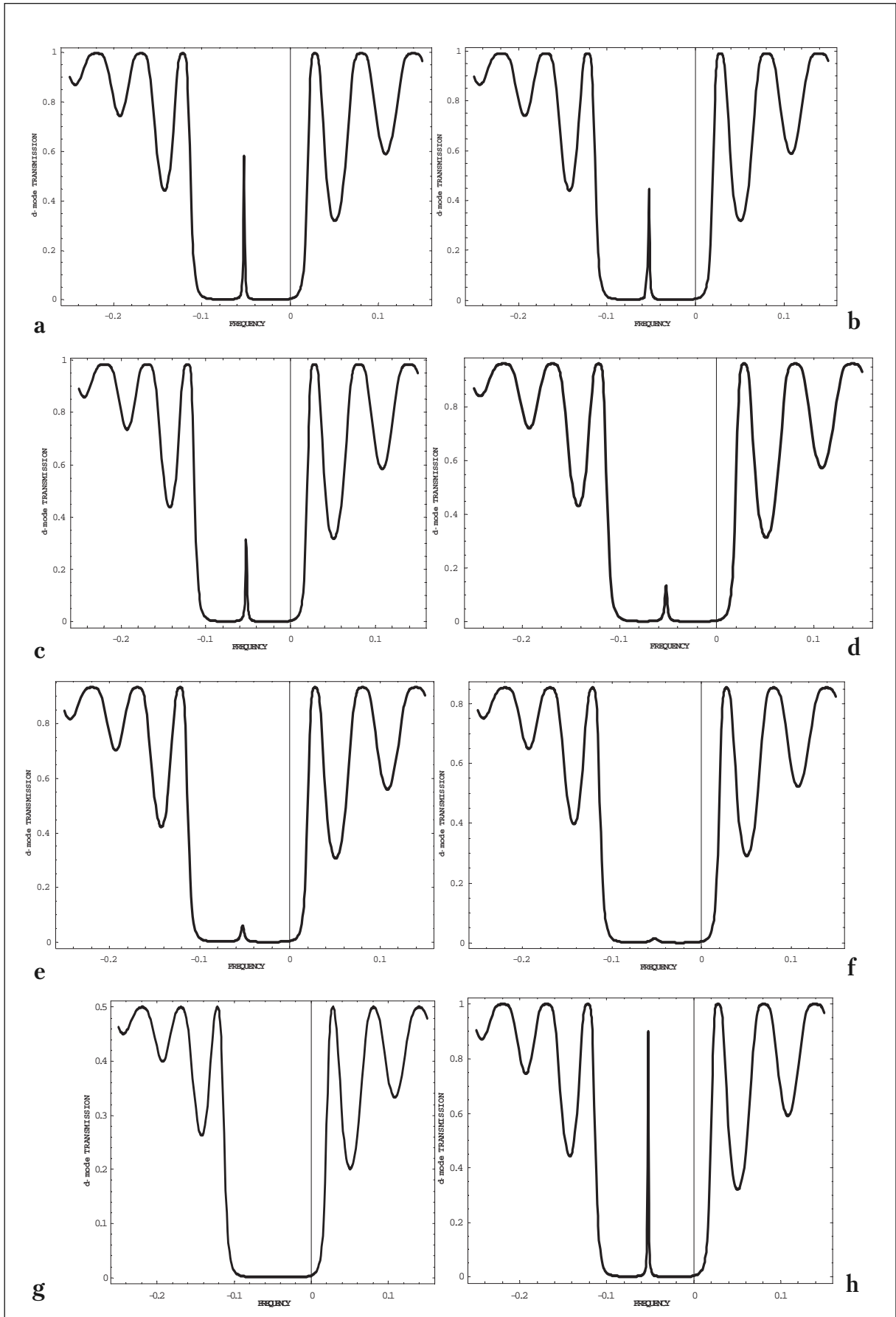


Рис. 30

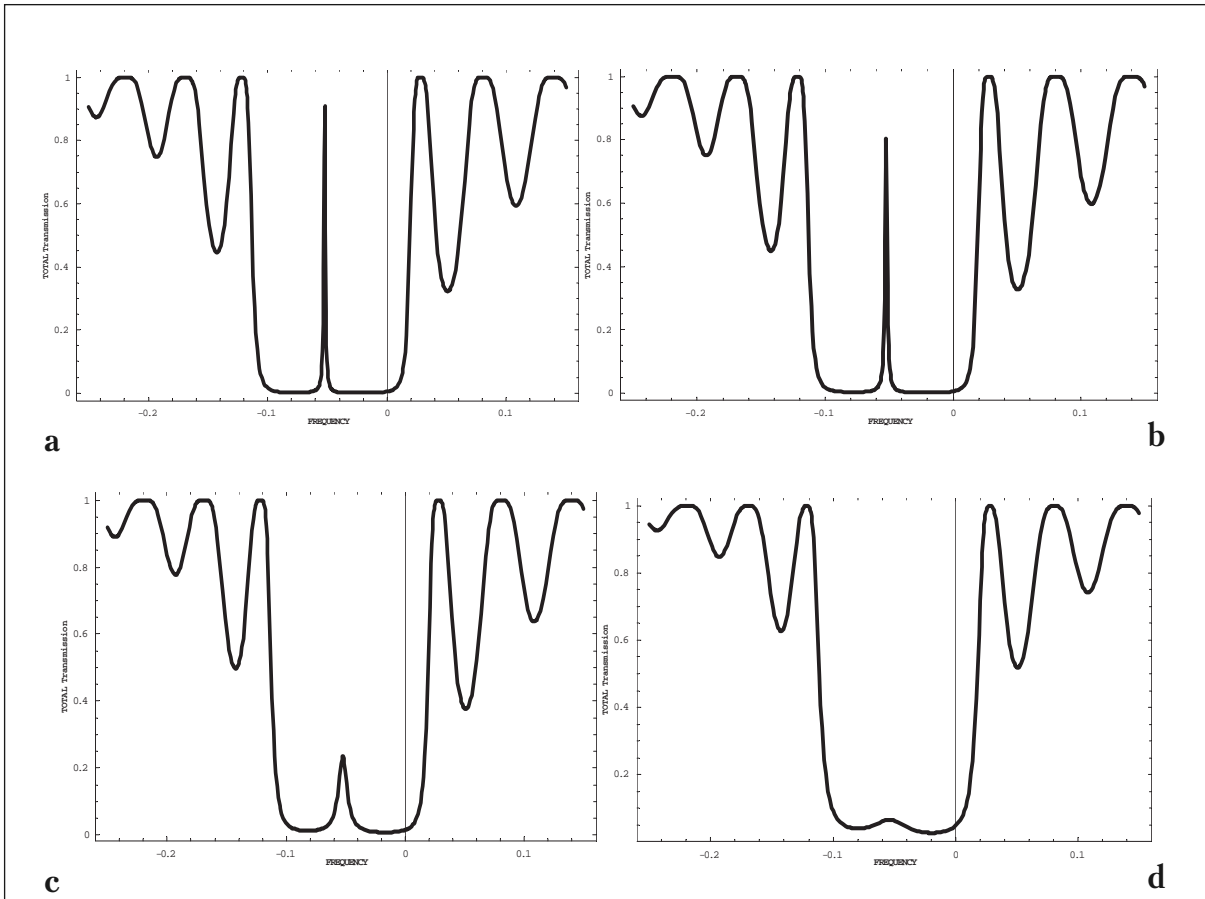


Рис. 31

дефектного слоя увеличение коэффициента пропускания на частоте DM постепенно исчезает и при  $\Delta\varphi = \pi/2$  (рис. 34(g)) вообще не проявляет себя.

Это, в частности, может быть воспринято как указание на то, что время жизни DM уменьшается с увеличением разности фаз двух собственных волн при их прохождении дефектного слоя, и, начиная с некоторого значения этой разности фаз DM вообще не существует.

Если учесть частичную конверсию света дифрагирующей поляризации в свет недифрагирующей поляризации, ситуация не изменяется коренным образом. Действительно, представленные на рис. 31 ( $N=33$ ,  $d/p=0,25$ ,  $\Delta\varphi = \pi/20$  (a);  $\pi/12$  (b);  $\pi/4$  (c);  $\pi/2$  (d)) спектры пропускания для суммарной интенсивности света, проходящего через ДМС (сумма интенсивностей свет для обеих круговых поляризации, вычисленная с использованием (68, 69)) выявляет сохранение общего уменьшения пропускания на частоте DM  $\omega_d$  при увеличении  $\Delta\varphi$ , однако более медленное, чем для дифрагирующей поляризации, и только при  $\Delta\varphi$  близком к  $\pi/2$  наступает практическое отсутствие пропускания (это демонстрирует конверсию света дифрагирующей поляризации в свет недифрагирующей поляризации в двупреломляющем дефектном слое). Как было показано выше, положение частоты DM  $\omega_d$  в ОСО определяется частотой максимума (минимума) в пропускании (отражении) ДМС, поэтому представленные на рис. 34, 35 спектры пропускания позволяют определить действительную часть частоты DM. Однако, поскольку DM является квазистационарной модой ее частота комплексна и требуется еще определить мнимую составляющую частоты DM.

Прямой способ нахождения мнимой составляющей частоты DM – это решение дисперсионного уравнения для DM. Дисперсионное уравнение для DM в случае дву-

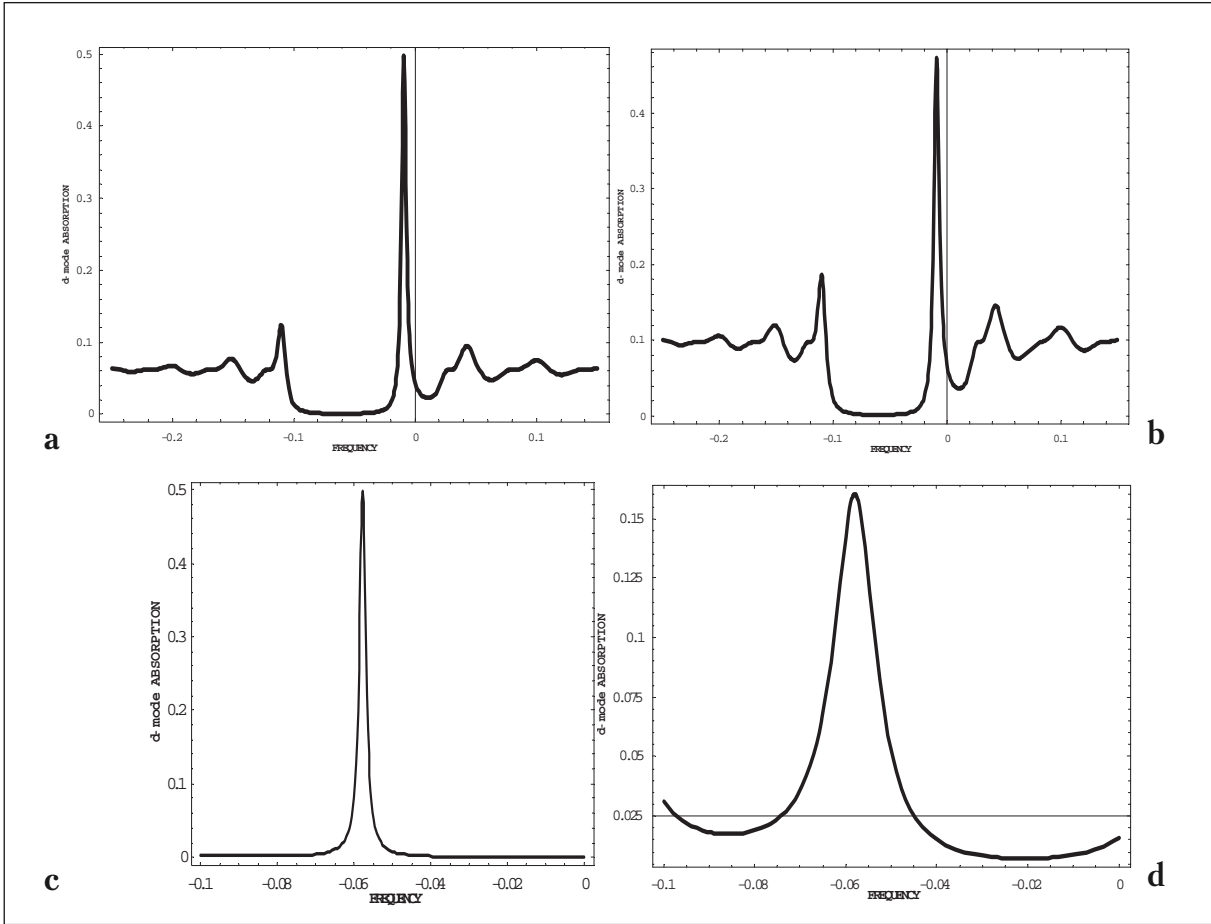


Рис. 32

преломляющего дефектного слоя может быть найдено аналогично случаю изотропного дефектного слоя. В пренебрежении многократным рассеянием света недифрагирующей поляризации в ДМС дисперсионное уравнение для DM в случае двупреломляющего дефектного слоя имеет вид:

$$\{M^2(k,d, \Delta n)\sin^2qL - \exp(-itL)[(\tau q/\kappa^2)\cosqL + i((\tau/2\kappa)^2 + (q/\kappa)^2 - 1)\sinqL]^2/\delta^2\} = 0. \quad (70)$$

В общем случае решение уравнения (70) требует применения численных методов так же, как решение уравнения (41) для ДМС с изотропным дефектным слоем. Некоторые упрощения уравнения (70) имеют место в случае малого двупреломления дефектного слоя, когда фазовый фактор  $M(k,d, \Delta n)$  в (70) определяется выражением (65).

В случае поглощающих (усиливающих) ХЖК слоев в ДМС с двупреломлением дефектного слоя проявляются обсуждавшиеся выше эффекты аномально сильного поглощения (усиление), однако, вообще говоря, их проявление оказывается ослабленным по сравнению со случаем изотропного дефектного слоя.

#### 4.4.2. DM на поглощающем (усиливающем) дефектном слое

В настоящем разделе будут рассмотрены DM в ДМС с поглощающими и усиливающими дефектными слоями и совершенными непоглощающими ХЖК слоями [11, 17]. Мотивацией рассмотрения DM в таких структурах, кроме общефизического интереса, являются исследования по лазерной РОС генерации в фотонных кристаллах. Так, например, введение красителя (активной среды для лазерной генерации) в ХЖК

часто сталкивается с проблемой плохой растворимости красителя в жидком кристалле. Трудности могут существенно уменьшиться, если вводить краситель в изотропную жидкость – проблема растворения красителя в изотропной жидкости, как правило, решается гораздо проще. Поэтому в исследованиях по лазерной РОС генерации в ХЖК используют ДМС с поглощающими и усиливающими жидкими дефектными слоями, в которые введен краситель, т.е. дефектный слой в такой ДМС является поглощающим или усиливающим изотропным дефектным слоем. Задачу о ДМ в таких структурах надо решать аналогично рассмотренному выше случаю изотропного дефектного слоя. При этом (см. рис. 11) ХЖК слои следует считать непоглощающими, требуется только учесть, что дефектный слой обладает поглощением (усилением), индуцированным красителем.

Результатом такого рассмотрения при тех же допущениях и обозначениях, что и выше, являются следующие выражения для коэффициентов отражения и пропускания рассматриваемой ДМС:

$$|T(d,L)|^2 = | [T_e T_d \exp(ikd(1+ig))] / [1 - \exp(2ikd(1+ig)) R_d R_u] |^2, \quad (71)$$

$$|R(d,L)|^2 = | \{ R_e + R_u T_e T_u \exp(2ikd(1+ig)) / [1 - \exp(2ikd(1+ig)) R_d R_u] \} |^2, \quad (72)$$

Выражения (71, 72) отличаются от соответствующих выражений (36, 37) для случая непоглощающего изотропного дефектного слоя тем, что толщина слоя  $d$  в них входит умноженной на фактор  $(1+ig)$ . Малая величина  $g$  описывает здесь поглощение (усиление) в изотропном дефектном слое, так как диэлектрическая проницаемость поглощающего (усиливающего) дефектного слоя  $\varepsilon$  связана с ней следующим соотношением  $\varepsilon = \varepsilon_0(1+2ig)$  с положительным  $g$  для поглощающего дефектного слоя и отрицательным  $g$  для усиливающего слоя.

$\omega_D$ , частота ДМ определяется следующим дисперсионным уравнением:

$$\{ \exp(2ikd(1+ig)) \sin^2 qL - \exp(-i\tau L) [(\tau q / \kappa^2) \cos qL + i((\tau/2\kappa)^2 + (q/\kappa)^2 - 1) \sin qL]^2 / \delta^2 \} = 0. \quad (73)$$

Частота ДМ  $\omega_D$  оказывается комплексной величиной, которая определяет время жизни ДМ и может быть найдена численным решением уравнения (74). Отметим, что при стремлении толщины ХЖК слоев к бесконечности мнимая составляющая частоты ДМ не обращается в ноль в отличие от случая непоглощающего дефектного слоя. Это связано с тем, что в рассматриваемом случае затухание поля ДМ происходит не только за счет утечки энергии через поверхности ДМС, но и за счет поглощения в дефектном слое, которое не определяется толщиной ХЖК слоев. Сказанное означает, что независимо от толщины ХЖК слоев время жизни ДМ в случае поглощающего дефектного слоя остается конечным. Для очень малых величин параметра  $g$  спектры отражения и прохождения ДМС очень близки к соответствующим спектрам ДМС с непоглощающим дефектным слоем (см. рис. 13-15). В частности, положение провалов в отражении и максимумов пропускания внутри ОСО как раз соответствует значению действительной части частоты ДМ  $\text{Re}[\omega_D]$  и это обстоятельство очень полезно при численном решении дисперсионного уравнения (74). Что касается времени жизни ДМ, то оно уменьшается для случая поглощающего дефектного слоя по сравнению со случаем непоглощающего дефектного слоя.



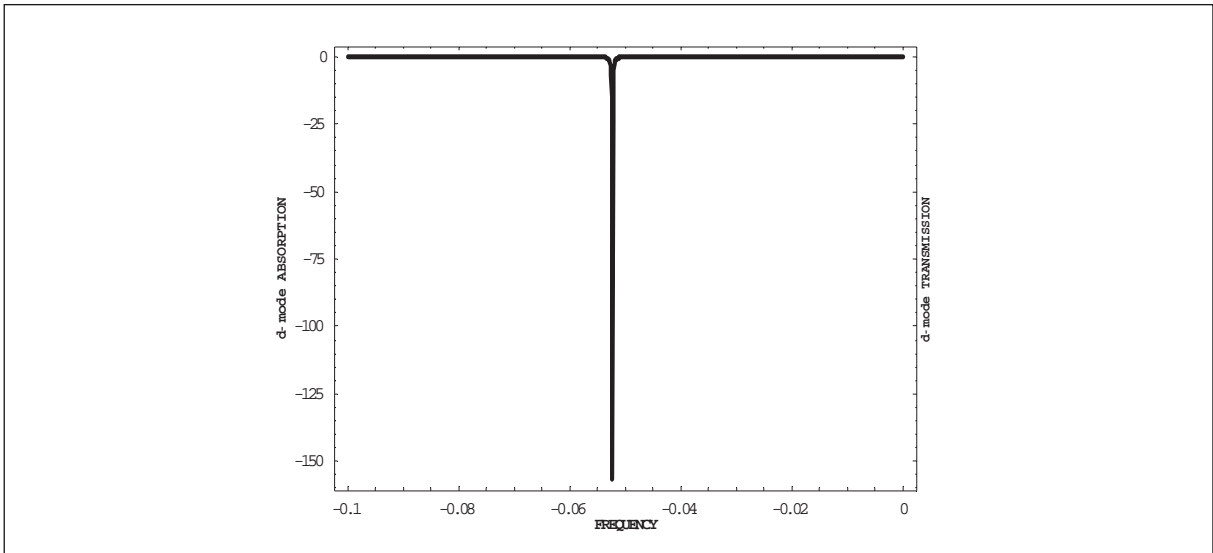


Рис. 33

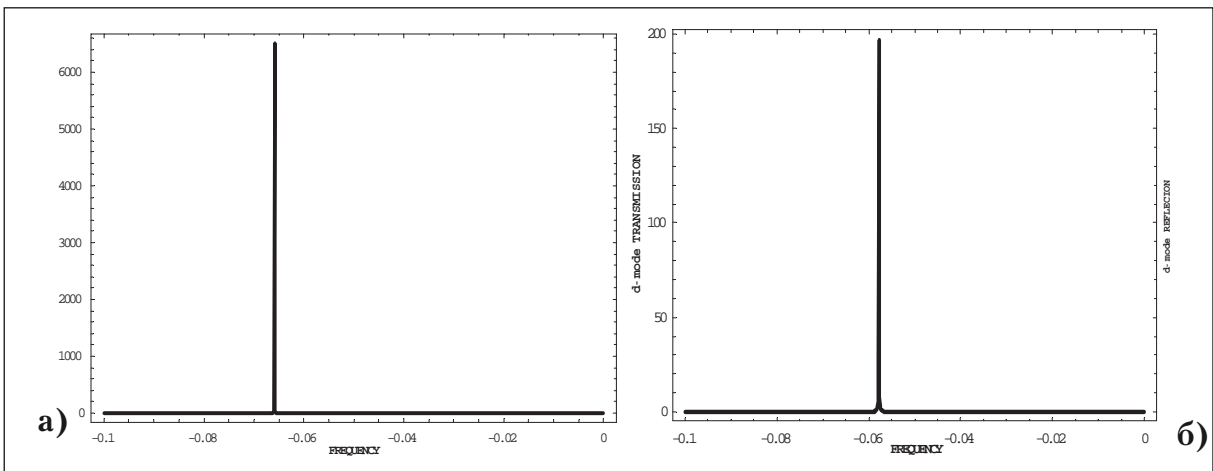


Рис. 34

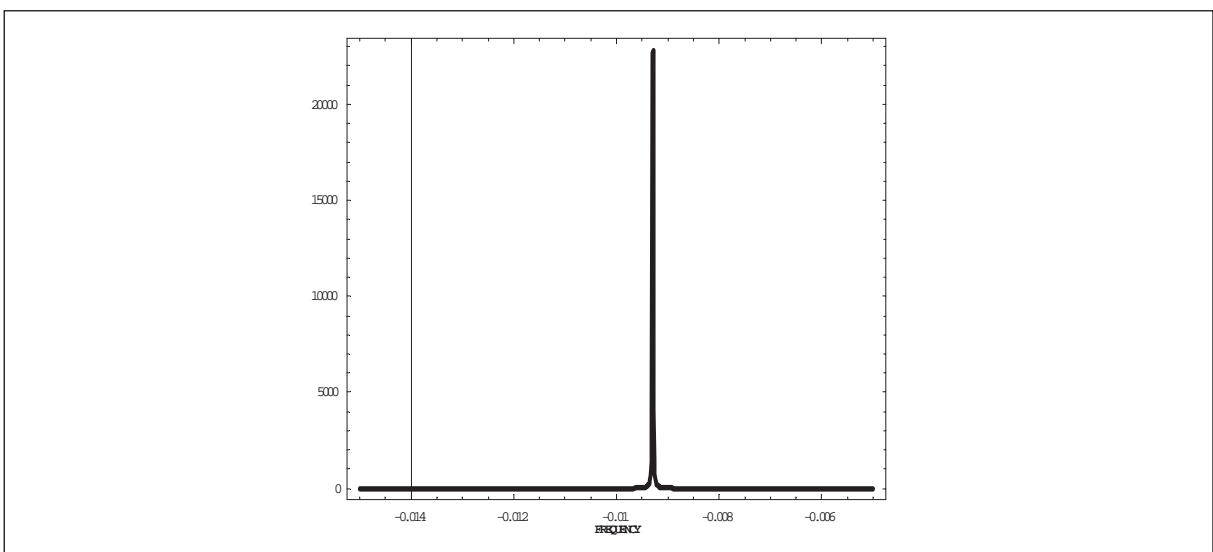


Рис. 35

#### 4.4.3 Поглощающий дефектный слой

Так же, как и в случае рассмотренных выше ДМС с поглощающими ХЖК слоями в ДМС с поглощающими дефектными слоями реализуется эффект аномально сильного поглощения. Эффект обнаруживается на частоте ДМ и достигает своего максимума (максимума  $1 - |T(d,L)|^2 - |R(d,L)|^2$ ) для определенного значения  $g$ , которое может быть найдено из выражений (71, 72) для  $|T(d,L)|^2$  и  $|R(d,L)|^2$ . Рис. 36 ( $N=33$ ) демонстрирует эффект аномально сильного поглощения. Как следует из Рис.36 ( $d/p=0,1$ :  $g=0,04976$  (a),  $g=0,08$  (b);  $d/p=22,25$ :  $g=0,00008891$  (c),  $g=0,00008891$  (d)),  $g$ , соответствующее максимальной величине аномального поглощения (максимум  $1 - |T(d,L)|^2 - |R(d,L)|^2$ ), зависит от отношения толщины слоя к шагу ХЖК  $d/p$  и для двух различных значениях отношения  $d/p$  достигается при  $g=0.04978$  и  $g=0.00008891$

В случае толстых ХЖК слоев ( $|q|L \gg 1$ ) в ДМС величина  $g$ , обеспечивающая максимум поглощения может быть найдена аналитически:

$$g_t = (L/d)[2\kappa^2/(q^2\tau L)]\exp[-2|q|L] \{1 + \{1/(2[(\tau/\kappa)^2 + \delta^2]^{1/2}) - (\tau/2\kappa)^2\} / (1 - [(\tau/\kappa)^2 + \delta^2]^{1/2} + (\tau/2\kappa)^2)\}^{-1} \quad (74)$$

Для частоты ДМ  $\omega_D$ , находящейся в середине ОСО, максимальное поглощение соответствует следующему значению  $g_t$ :

$$g_t = (2/3\pi)(p/d) \exp[-2\pi\delta(L/p)]. \quad (75)$$

Как показывают вычисления и формулы (74, 75), величина  $g$ , соответствующая максимуму поглощения, оказывается приблизительно обратно пропорциональной толщине дефектного слоя  $d$ .

#### 4.4.4 УСИЛИВАЮЩИЙ ДЕФЕКТНЫЙ СЛОЙ

В случае ДМС с усиливающим дефектным слоем ( $g < 0$ ) при некотором значении  $|g|$  происходит расходимость коэффициентов отражения и пропускания [18]. Соответствующее значение  $g$  является порогом лазерной генерации. Значения порогов лазерной генерации могут быть найдены в численном подходе с использованием выражений (72, 73) для  $|T(d,L)|^2$  и  $|R(d,L)|^2$  или найдены приближенно путем построения графиков  $|T(d,L)|^2$  и  $|R(d,L)|^2$  для варьируемых  $g$ . Вторая возможность проиллюстрирована рис. 33-36 ( $N=33$ ), на которых представлены “почти расходящиеся” значения  $|T(d,L)|^2$ ,  $|R(d,L)|^2$  или  $(1 - |T(d,L)|^2 - |R(d,L)|^2)$  для ДМС с усиливающим дефектным слоем. Использованные значения  $g$  на рис. 33 ( $d/p=0,25$ ,  $g=-0,0065957$ ), рис. 34 ( $d/p=2,25$ ,  $g=-0,001000$  (a); ( $d/p=22,25$ ,  $g=-0,00008891$  (b)), рис. 35 ( $d/p=0,01$ ,  $g=-0,04978$ )) близки к их пороговым значениям, обеспечивающим расходимости  $|T(d,L)|^2$  и  $|R(d,L)|^2$ . Результаты вычислений также демонстрируют, что минимальные значения порогов  $|g|$  соответствуют расположению  $\omega_D$  как раз по середине ОСО и  $|g|$  оказываются почти обратно пропорциональными толщине дефектного слоя. Действительно, рис. 33, 34 соответствуют значениям  $\omega_D$  близким к середине ОСО и демонстрируют падение порога лазерной генерации с увеличением толщины дефектного слоя. Рис. 39 соответствует значению частоты ДМ  $\omega_D$  вблизи границы ОСО и демонстрирует возрастание порога лазерной генерации с приближением значения частоты ДМ  $\omega_D$  к границе ОСО.

Аналитический подход к проблеме для толстых ХЖК слоев в ДМС ( $|q|L \gg 1$ ) приводит к аналогичным предсказаниям, а именно, значение пороговой величины  $g$  дается формулами (75, 76) с отрицательным знаком правой части соотношения. Для

толстых ХЖК слоев ДМС при  $\omega_D$  в середине ОСО пороговое значение  $g$  дается выражением:

$$g_t = -(2/3\pi)(p/d) \exp[-2\pi\delta(L/p)]. \quad (76)$$

Так что, как следует из формулы (76), чем тоньше дефектный слой, тем больше оказывается пороговое значение  $g$ .

Аналогичный результат, как было показано выше, также относится и к эффекту аномально сильного поглощения (формулы (74, 75)). А именно, чем тоньше дефектный слой, тем больше оказывается значение  $|g|$ , обеспечивающее максимальное поглощение в ДМС с поглощающим дефектным слоем.

### Заключение

Изложенная выше информация об оптических свойствах фотонных кристаллов (на примере фотонных жидких кристаллов) демонстрирует, как многообразны и порой неожиданны оказываются оптические эффекты, проявляющиеся в фотонных кристаллах. Основное качество жидких кристаллов, делающее их особенно привлекательными при изучении оптики фотонных кристаллов и приводящее к многочисленным приложениям ЖК, это их податливость к внешним относительно слабым воздействиям и, как следствие, возможность легко изменять их оптические характеристики. Весьма существенным является то, что за изменениями оптических характеристик ЖК часто стоят фундаментальные общефизические эффекты, актуальные также для других разделов физики конденсированного состояния. Это сочетание прикладной и общефизической значимости оптики фотонных ЖК делает ознакомление с ней совершенно естественным и актуальным для специалистов смежных областей.

Полезно иметь в виду, что общефизическая значимость ознакомления с оптикой фотонных кристаллов на примере ЖК связана также со следующим обстоятельством. Исследование некоторых явлений на примере ЖК, свойства которых легко поддаются изменениям под влиянием внешних воздействий, может рассматриваться как удобное модельное изучение явления в целом с целью оптимизации параметров для приложений с последующим использованием оптимизированной схемы на других объектах, предпочтительных в приложениях. Хорошим примером такого модельного использования ЖК являются исследования по РОС лазерам в холестериках, результаты которых переносятся на твердотельные РОС лазеры [3].

Существенным моментом для экспериментального наблюдения рассмотренных эффектов, в частности, эффекта аномально сильного поглощения волны накачки и аномально высокого усиления генерируемого лазерного излучения (понижение порога генерации) является требование высокого совершенства образца, такого, что в эксперименте наблюдаются осцилляции коэффициента отражения вне области селективного отражения (см. рис. 6). Недостаточное совершенство фотонного кристалла приводит к ослаблению эффекта аномально сильного поглощения. Аналогичное видимое ослабление эффекта аномально сильного поглощения может быть связанным с большой частотной шириной линии излучения волны накачки. В этом случае причиной видимого ослабления эффекта аномально сильного поглощения является происходящее в эксперименте усреднение по частоте в пределах ширины линии накачки выражений, описывающих эффект аномально сильного поглощения. Подобным образом несовершенство фотонного кристалла приводит к более слабому понижению порога лазерной генерации по сравнению со случаем совершенной структуры. Следует также отметить, что принятое выше предположение об отсутствии френелевского отражения на диэлектрических границах (равенство усредненной диэлектрической проницаемости

ХЖК диэлектрической проницаемости внешней среды) для своей реализации в эксперименте требует принятия специальных мер. Если же это условие не выполняется в эксперименте, отражения на диэлектрических границах приводит к частичному преобразованию дифрагирующей круговой поляризации в недифрагирующую, что также ослабляет эффект аномально сильного поглощения и изменяет поляризационные характеристики явления.

Надо также иметь в виду важное обстоятельство, что изложенные выше результаты для спиральных сред качественно справедливы для любых периодических сред, а аналитические формулы, относящиеся к спиральным средам, могут быть применены как полезное руководство для других периодических сред.

Немаловажно также то, что локализованные моды, рассмотренные здесь в приложении к РОС лазерам, проявляются и в других оптических явлениях. Например, в нелинейной оптике, проявляясь в повышении эффективности нелинейной генерации высших оптических гармоник и эффективности генерации Черенковского излучения в периодических средах [5].

В целом следует констатировать, что проведенное выше аналитическое рассмотрение проблемы локализованных мод в фотонных кристаллах проясняет физику локализованных мод и находится в полном согласии с соответствующими результатами, полученными в численном подходе к этой проблеме.

Работа поддержана грантами РФФИ № 12-02-01016-а, 14-02-92601-КО\_а и 14-02-90008-Бел-а.

### Литература

1. *Sakoda K.* Optical Properties of Photonic Crystals // Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg, 2005.
2. *Шабанов В.Ф., Ветров С.Я., Шабанов А.В.* Оптика реальных фотонных кристаллов // Изд. СО РАН, Новосибирск, 2005.
3. *Манцизов Б.И.* Когерентная и нелинейная оптика фотонных кристаллов // ФИЗМАТЛИТ, М., 2009.
4. *Де Жен П.* Физика жидких кристаллов // М., Мир, 1977.
5. *Беляков В.А.* Дифракционная оптика периодических сред сложной структуры // М., Наука, 1988.
6. *Беляков В.А., Сонин А.С.* Оптика холестерических жидких кристаллов // М., Наука, 1982.
7. *Belyakov V.A., and Dmitrienko V.E.* Optics of Chiral Liquid Crystals // Harwood Academic Publisher, 1989, p.54 in Soviet Scientific reviews / Section A, Physics Reviews (ed. I.M.Khalatnikov,), v.13, p.1-203.
8. *Belyakov V.A.* Diffraction Optics of Complex Structured Periodic Media // Springer-Verlag, New York, 1992.
9. *Звелто О.* Принципы работы лазеров (пер. с англ., 2 изд.) // МИР, М., 1984.
10. *Kopp V. I., Zhang Z.-Q., and Genack A. Z.* Lasing in chiral photonic structures // Prog. Quant. Electron., 2003, **27(6)**, 369.
11. *Belyakov V.A.* Localized Optical Modes in Optics of Chiral Liquid Crystals // in book (ed. by P.K.Choudry): New Developments in Liquid Crystals and Applications, Nova Publishers, New York, 2013, Chp. 7, p.199.
12. *Belyakov V.A., Semenov S.V.* Optical edge modes in photonic liquid crystals // JETP, 2009, **109**, 687.
13. *Belyakov V.A., Semenov S.V.* Optical defect modes in photonic chiral liquid crystals // JETP, 2011, **112**, 694.
14. *Song M.H., Park B., Takanishi Y., et al.* Defect modes in chiral liquid crystals with active defect layer // Jap.Jn.Appl.Phys., 2005, v.44, p.8165.
15. *Gevorgyan A.H., and Haratyunyan* Defect modes in chiral liquid crystals with a birefringent defect layer // Phys.Rev.E, 2007, **76**, 031701.
16. *Belyakov V.A.* Optical defect modes in chiral liquid crystals at birefringent defect layer // MCLC, 2012, **559**, 50.
17. *Belyakov V.A.* Optical defect modes in chiral liquid crystals at active defect layer // MCLC, 2012, **559**, 39.

# LOCALIZED MODES IN OPTICS OF PHOTONIC LIQUID CRYSTALS

V.A. Belyakov

*Landau Institute for Theoretical Physics, Moscow, Russia*

bel1937@mail.ru

Received 10.04.2014

Optical properties of photonic crystals are studied with a special attention to the role of localized optical modes. It is why the presentation of unusual properties of the localized optical modes in structures of finite size and their manifestation in the optics of photonic crystals and, in particular, in the distributed feedback lasing are the main subject of the paper. To be specific the presentation is performed for the spiral media. Namely, the analytic theory of chiral liquid crystals being nowadays a popular object for the linear and nonlinear optics investigations is presented.